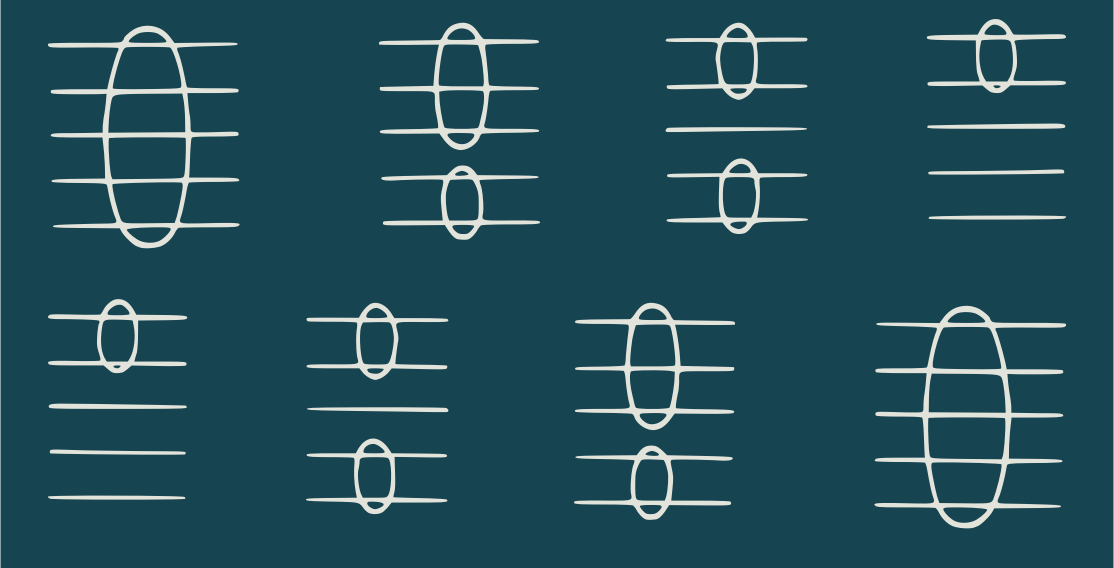
A. Akhiezer, S. Péletminski

Les Méthodes de la Physique Statistique



Éditions Mir Moscou

А. И. АХИЕЗЕР, С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ

МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. Akhiezer, S. Péletminski

LES MÉTHODES DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par ANNE SOKOVA

на французском языке

PRÉFACE

La monographie de A. Akhiezer et S. Péletminski que nous proposons au lecteur est consacrée à l'exposé des méthodes de la mécanique statistique. Cet ouvrage occupera sans aucun doute une place toute particulière parmi les monographies de mécanique statistique, car les auteurs utilisent une même méthode pour trouver des équations cinétiques pour les systèmes classiques et quantiques et des équations de la physique macroscopique, c'est-à-dire les équations de l'hydrodynamique pour un liquide ordinaire et superfluide et les équations de l'électrodynamique macroscopique.

Cette méthode d'étude de questions apparemment si différentes est basée sur l'idée d'une description abrégée des états hors d'équilibre des systèmes macroscopiques. La description abrégée apparaît tout naturellement au cours de l'évolution des systèmes physiques ayant un grand nombre de degrés de liberté, et il est donc naturel et judicieux d'utiliser cette description des états hors d'équilibre également pour obtenir les équations cinétiques et les équations de l'hydrodynamique. Si de plus le système est caractérisé par une interaction faible entre les particules ou par une densité faible de particules, l'étape hydrodynamique de l'évolution est précédée de l'étape cinétique et celle-ci peut être étudiée à l'aide des équations cinétiques. Par contre, si l'interaction entre les particules n'est pas faible, et que leur densité soit grande, il n'y a pas d'étape cinétique de l'évolution, l'étape hydrodynamique apparaît immédiatement et peut être étudiée à l'aide des équations de l'hydrodynamique.

A partir de la même conception d'une description abrégée, les auteurs établissent une théorie basée sur des principes généraux, tel que le principe d'affaiblissement des corrélations et les relations ergodiques liées aux particularités de la structure des hamiltoniens et à leurs propriétés de symétrie.

Les auteurs prêtent une attention particulière à l'étude des systèmes quantiques; l'exposé des problèmes de la statistique quantique est précédé d'un exposé clair des fondements de la mécanique quantique comprenant la théorie de la mesure.

Les auteurs utilisent également la méthode d'une description abrégée pour l'étude du comportement asymptotique des grandeurs

universelles telles que les fonctions de Green d'équilibre à deux temps.

Les auteurs prêtent une grande attention à l'étude des systèmes dont la symétrie a été spontanément perturbée, en particulier, aux systèmes à symétrie de gradient perturbée.

L'appareil mathématique utilisé est clair et concis tant dans son ensemble que pour les questions particulières. On peut, par exemple, noter l'étude des problèmes liés à l'entropie d'un gaz faiblement non parfait, aux développements quantiques du viriel de la théorie des équations cinétique, etc.

Mais le lecteur trouvera dans cette monographie non seulement l'exposé des fondements formels de la mécanique statistique, mais également un grand nombre d'applications concrètes importantes donnant une bonne illustration de la théorie du mouvement brownien, la théorie du ralentissement des neutrons, la théorie des phénomènes de transfert dans les cristaux et certaines questions de la théorie statistique des plasmas.

L'ouvrage réalise un équilibre judicieux entre la physique et les mathématiques, ce qui facilite la lecture et la compréhension.

Ce livre intéressant et précieux sera sans aucun doute très utile à un grand nombre de lecteurs, physiciens et mathématiciens, effectuant des recherches dans le domaine de physique statistique.

N. Bogolioubov,

membre de l'Académie
des Sciences de l'U.R.S.S.

PRÉFACE DES AUTEURS

Les propriétés des corps macroscopiques dépendent essentiellement de leur structure atomique et moléculaire. En effet, le nombre des atomes et des molécules qui constituent un corps macroscopique étant très grand, on voit apparaître des lois d'un type spécial, à savoir des lois statistiques, qui avec les lois du mouvement microscopique des atomes et des molécules déterminent les propriétés macroscopiques des corps.

La nature physique des processus se déroulant dans les corps macroscopiques peut être très variée. C'est pourquoi différents domaines des effets physiques exigent le développement de théories spéciales. Néanmoins ces théories font appel à une même méthode d'étude. Cette méthode est celle de la mécanique statistique basée sur l'étude des corps macroscopiques en tant que systèmes formés par un grand nombre de particules. Les valeurs exactes des coordonnées et des impulsions des différentes particules importent peu pour la description macroscopique (de plus, en fait, on ne connaît pas toutes ces grandeurs), mais on doit faire le moyennage sur ces grandeurs, ce qui implique l'introduction de la notion de probabilité d'un état.

En introduisant la notion de probabilité, il faut souligner que la description probabiliste n'est pas en principe indispensable en physique classique. Nous l'utilisons parce qu'il est pratiquement impossible et inutile d'ailleurs d'étudier le mouvement de chaque atome, bien que théoriquement, si les atomes suivaient les lois de la mécanique classique, ce soit possible. En fait le mouvement des atomes est régi par les lois de la mécanique quantique et la conception de probabilité se trouve être dans la nature des choses. De plus le caractère statistique du comportement des objets microscopiques ne contredit pas le déterminisme classique du comportement des objets macroscopiques, car l'étude macroscopique implique, comme nous l'avons déjà noté, le moyennage sur les variables dynamiques des atomes séparés. Le nombre de ces variables étant très grand, en conformité avec les théorèmes généraux de la théorie des probabilités le moyennage donne une diminution très importante de toutes les variances des grandeurs macroscopiques observées.

Il est très important que durant l'évolution que subit chaque système physique le caractère de la description probabiliste varie

également. Plus exactement, à diverses étapes de l'évolution d'un système physique, l'expression pour la probabilité d'un état a une structure différente, cette structure se simplifiant avec le temps. Ceci signifie que la probabilité d'un état d'un système après un temps suffisamment long dépend en fait d'un nombre limité de fonctions, c'est-à-dire que la probabilité est une fonctionnelle de certaines fonctions qui peuvent être utilisées pour la description macroscopique des systèmes physiques.

Ces fonctions satisfont à certaines équations. A différentes étapes de l'évolution d'un système physique, ce sont les équations cinétiques pour les fonctions de distribution des particules, ainsi que les équations de l'hydrodynamique et autres équations de transfert.

Le présent ouvrage est consacré à l'exposé des méthodes générales de la mécanique statistique, méthodes qui sont fondées sur l'idée d'une description abrégée d'un système à un grand nombre de degrés de liberté, et aux certaines applications de ces méthodes.

On commence par une étude des équations cinétiques pour les systèmes classiques (chapitre premier). On introduit ici les fonctions de distribution à particules multiples qui à l'étape cinétique de l'évolution sont des fonctionnelles des fonctions de distribution à une particule. Pour ces fonctionnelles on établit une chaîne d'équations intégrales, équivalente à la chaîne d'équations différentielles de Bogolioubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon et à la « condition aux limites » de Bogolioubov liée au principe d'affaiblissement des corrélations pour un système macroscopique. On expose dans ce chapitre la théorie des phénomènes de transfert basée sur l'équation cinétique de Boltzmann et déduit l'équation de Fokker-Planck pour les processus lents. A titre d'applications on envisage la théorie du mouvement brownien et la théorie du ralentissement des neutrons. Dans le premier chapitre on étudie également les fondements de la mécanique statistique des particules chargées. Le chapitre se termine par une discussion des questions liées à la réversibilité des mouvements mécaniques et à l'irréversibilité des processus macroscopiques.

Dans le chapitre 2, on trouve les problèmes concernant la mécanique statistique des systèmes quantifiés. En plus des principes généraux de la mécanique quantique, on envisage le principe d'affaiblissement des corrélations et les relations ergodiques pour les systèmes macroscopiques quantifiés.

Le chapitre 3 est consacré à la théorie des états d'équilibre des systèmes quantifiés. On expose ici des questions liées à la théorie thermodynamique des perturbations et aux développements quantiques du viriel.

En utilisant la méthode des valeurs quasi moyennes, on établit la théorie de la superfluidité des gaz de bosons et de fermions.

Dans le chapitre 4, on considère les méthodes d'étude des états d'équilibre des systèmes quantifiés. On introduit ici la réponse du système à une perturbation extérieure, on étudie les propriétés des fonctions de Green et on y développe la théorie générale des processus de relaxation, basée sur l'idée d'une description abrégée des systèmes macroscopiques. On étudie en détail le comportement asymptotique des fonctions de Green.

Le chapitre 5 est consacré aux équations cinétiques pour les systèmes quantifiés. On y trouve les équations cinétiques dans le cas d'une interaction faible et dans le cas d'une densité faible. On étudie l'entropie d'un gaz quantique faiblement non parfait hors d'équilibre. On obtient les équations cinétiques pour des particules dans un champ variable extérieur et on établit une relation existant entre ces équations et l'expression asymptotique des fonctions de Green dans le domaine de basses fréquences pour les systèmes normaux et dégénérés. On obtient également les équations cinétiques pour les particules et le rayonnement en interaction avec le milieu. A titre d'applications on envisage la théorie du son nul, la théorie de la conductibilité thermique des diélectriques, etc.

Dans le chapitre 6 on étudie l'étape hydrodynamique de l'évolution et on trouve les équations de l'hydrodynamique d'un liquide normal et d'un liquide superfluide. Dans ce même chapitre on obtient les équations de l'électrodynamique macroscopique et on établit les propriétés des fonctions de Green de l'électrodynamique.

Comme nous l'avons déjà mentionné, notre exposé est basé sur l'idée d'une description abrégée des systèmes formés d'un grand nombre de particules. C'est pourquoi on laisse de côté les problèmes dont la résolution n'est pas liée à cette méthode, tels que la théorie des équations pour les éléments diagonaux de l'opérateur statistique développée dans les travaux de Prigogine et de Van Hove. On n'expose pas non plus la technique des diagrammes, car ses résultats essentiels peuvent être obtenus à partir de la méthode de la description abrégée. Pour cette raison notre bibliographie n'est pas exhaustive et nous présentons nos excuses aux auteurs dont les travaux sur les méthodes de la physique statistiques n'y sont pas cités.

Les auteurs ont l'honneur de présenter les remerciements à V. Prikhodko, A. Sokolovski et V. Fédianine pour leur aide précieuse lors de la préparation du manuscrit.

A. Akhiezer,
S. Péletminski

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS CINÉTIQUES POUR LES SYSTÈMES CLASSIQUES

§ 1.1. Fonctions de distribution à particules multiples

1.1.1. Equation cinétique de Boltzmann. A la différence de la thermodynamique statistique qui étudie les états d'équilibre des systèmes macroscopiques formés d'un grand nombre de particules, la cinétique physique étudie différents processus physiques se déroulant dans ces systèmes.

Après un intervalle de temps suffisamment long (appelé temps de relaxation) tout système macroscopique soumis à lui-même passe à l'état d'équilibre statistique. C'est pourquoi la cinétique physique doit avoir, comme cas limite, la thermodynamique. Il est cependant évident à partir de considérations générales que l'état d'équilibre limite peut être décrit d'une manière bien plus simple que les processus qui ont amené à cet état. En effet, toutes propriétés thermodynamiques d'un corps macroscopique peuvent être étudiées à l'aide de la *distribution universelle de Gibbs* [42]

$$w(x_1, \ldots, x_N) = \exp\{\beta(F - \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N))\}, \qquad (1.1.1)$$

reliant la densité de probabilité d'équilibre $w(x_1, \ldots, x_N)$ d'un système dont les particules ont des coordonnées et des impulsions données x_i $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{p}_i)$ au hamiltonien de ce système $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N)$ et à des grandeurs macroscopiques telles que la température $T = \beta^{-1}$ et l'énergie libre F.

Cette distribution, établie par Gibbs en 1901, est vraie pour un système macroscopique quelconque, de plus parmi les grandeurs microscopiques relatives à ce système cette distribution ne contient que le hamiltonien du système et parmi les grandeurs macroscopiques, les paramètres caractérisant l'état d'équilibre, c'est-à-dire la température, le volume et le nombre de particules (l'énergie libre est une fonction de la température T, du volume $\mathcal{V}$ et du nombre de particules N).

L'universalité de la distribution de Gibbs, qui contient en principe toute la thermodynamique statistique, vient de ce qu'elle décrit les états d'équilibre. Lorsque l'on passe des états d'équilibre aux états de déséquilibre, l'universalité disparaît et la cinétique physique

donne, pour le déroulement dans le temps de divers processus aux différentes étapes de l'évolution du système, des relations distinctes qu'il est impossible de réunir en une formule universelle unique du type de la distribution de Gibbs. Ceci est dû à ce que, aux diverses étapes de l'évolution du système, l'état de celui-ci est décrit par des ensembles distincts de grandeurs, à la différence de la distribution de Gibbs qui ne contient que la température et le volume.

La thermodynamique statistique et la cinétique physique ont pour origine la théorie cinétique des gaz élaborée par Maxwell et Boltzmann dans la seconde moitié du XIXe siècle. En effet, sur l'exemple du gaz, qui est un système physique très simple, il est facile de comprendre la relation existant entre la thermodynamique statistique et la cinétique physique qui sont deux parties de la physique statistique.

Si, en première approximation, on ne tient pas compte de l'interaction entre les particules du gaz, son hamiltonien est

$$\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N} \left(\frac{p_l^2}{2m} + U(\boldsymbol{x}_l) \right),$$

où $\boldsymbol{p}_l$ et $\boldsymbol{x}_l$ sont l'impulsion et le rayon vecteur de la l-ième particule, $U(\boldsymbol{x}_l)$ son énergie potentielle dans un champ extérieur donné, m la masse de la particule et N le nombre de particules (les particules sont supposées être identiques). Pour cette forme de hamiltonien, la densité de probabilité $w(x_1, \ldots, x_n)$ prend la forme d'un produit de fonctions de distribution à une particule $f_0(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{p}_l)$

$$w(x_1, \ldots, x_N) \backsim \prod_{1 \leqslant l \leqslant N} f_0(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{p}_l),$$

$$f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = C \exp\left\{ -\beta \frac{p^2}{2m} - \beta U(\boldsymbol{x}) \right\}, \qquad (1.1.2)$$

où C est une constante de normalisation.

La fonction $f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ est appelée *distribution de Maxwell-Boltzmann*. Elle donne (après multiplication par $d^3x\, d^3p$) le nombre de particules, dont les coordonnées et les impulsions se trouvent dans les intervalles d^3x et d^3p au voisinage des valeurs données de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{p}$ après un long intervalle de temps (par rapport au temps de relaxation τ_r) lorsque le gaz passe à l'état d'équilibre statistique.

On peut également étudier le comportement de la fonction de distribution à une particule pour des temps t, inférieurs au temps de relaxation τ_r et, à la limite, le passage à la distribution de Maxwell-Boltzmann. Ce problème est à la fois simple et fondamental pour la cinétique physique. Il a été résolu par Boltzmann qui a établi une équation pour la fonction de distribution à une particule $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ hors d'équilibre pour le cas d'un gaz de densité faible [33]. Cette

équation est dite *équation cinétique de Boltzmann*

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}+F\frac{\partial f}{\partial p}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, \qquad (1.1.3)$$

où $v=p/m$ est la vitesse de la particule, $F=-\partial U/\partial x$ une force extérieure agissant sur la particule et $(\partial f/\partial t)_c$ l'*intégrale des collisions.* La fonction de distribution donne (après multiplication par $d^3x\, d^3p$) le nombre de particules dont les coordonnées et les impulsions à l'instant t se trouvent dans l'intervalle $d^3x\, d^3p$. Cette fonction satisfait à la condition de normalisation

$$\int d^3x d^3p f(x, p, t)=N.$$

Les termes $v\frac{\partial f}{\partial x}$ et $F\frac{\partial f}{\partial p}$ entrant dans l'équation cinétique donnent la variation de la fonction de distribution, due à l'entrée et à la sortie des particules dans l'élément $d^3x\, d^3p$ dans l'espace des coordonnées et des impulsions par suite du mouvement des particules sous l'action de la force extérieure, quant à la grandeur $(\partial f/\partial t)_c$, elle donne la variation de la fonction de distribution par suite de l'interaction des particules du gaz.

Si la densité du gaz n'est pas grande, seules les collisions binaires entrent en ligne de compte et l'intégrale des collisions s'écrit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c=\int d^3p_1\int d\Omega\,|v-v_1|\,\sigma(\theta, v-v_1)(f'f_1'-ff_1). \qquad (1.1.4)$$

p et p_1 sont ici les impulsions de deux particules quelconques avant la collision, p' et p_1' les impulsions de ces mêmes particules après la collision liées à p et p_1 par la loi de la conservation de l'impulsion et de l'énergie; $d\sigma=\sigma(\theta, v-v_1)\,d\Omega$ la section différentielle de diffusion dans l'angle solide $d\Omega$ (θ étant l'angle entre les vecteurs p_1-p et $p_1'-p'$) et $f=f(x, p, t)$, $f_1=f(x, p_1, t)$, $f'=f(x, p', t)$, etc. Les grandeurs des impulsions des particules après collision sont, de toute évidence, déterminées d'une manière univoque par les grandeurs p, p_1, θ.

On voit ainsi que l'intégrale des collisions contient la section de diffusion, c'est-à-dire une grandeur à caractère probabiliste. Aucune des équations dynamiques de la mécanique ne contient de grandeur de ce type. Ainsi, on peut dire que pour formuler l'équation cinétique, il y a lieu d'introduire une conception nouvelle pour la mécanique, à savoir la conception de probabilité. D'un autre côté l'irréversibilité des processus cinétiques porte un caractère probabiliste. C'est pourquoi, il est évident que l'équation cinétique est l'appareil mathématique permettant d'étudier les processus irréversibles dans les gaz et de déterminer les coefficients cinétiques des gaz, c'est-à-dire les coefficients de conductibilité thermique, de viscosité et de diffusion.

L'irréversibilité des processus cinétiques conduit à la croissance de l'entropie du système et l'équation cinétique permet de démontrer la loi de la croissance de l'entropie des gaz (*théorème H de Boltzmann*). La densité de l'entropie du gaz $s(\boldsymbol{x}, t)$ est alors donnée, en vertu de l'équation de Boltzmann, d'une manière combinatoire, à savoir:

$$s(\boldsymbol{x}, t) = -\int d^3p f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \ln f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t). \qquad (1.1.5)$$

En vertu de cette définition et de l'équation cinétique (1.1.3) on a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{s} =$$

$$= -\frac{1}{4} \int d^3p_1 \int d^3p \int d\Omega \, |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1| \sigma(\theta, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1) (f' f_1' - f f_1) \ln \frac{f f_1}{f' f_1'},$$

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t) = -\int d^3p \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \ln f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t),$$

d'où $\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x s(\boldsymbol{x}, t) \geqslant 0$. Le signe d'égalité correspond à l'état d'équilibre statistique pour lequel la fonction de distribution est donnée par la formule (1.1.2).

Comme l'équation cinétique ne contient que la dérivée première de la fonction de distribution par rapport au temps, on peut, pour cette équation, poser le problème de Cauchy, à savoir: déduire la fonction de distribution des particules, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ pour $t \neq 0$ à partir de la distribution initiale $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, 0)$. Ce problème a une solution unique [62], mais vu la structure spécifique de l'intégrale des collisions $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ ne sera positive que pour $t > 0$, c'est-à-dire à tous les instants postérieurs au moment initial. Pour ce qui est des instants précédant l'instant initial, la solution de l'équation cinétique peut ne pas être positive. C'est pourquoi la solution de l'équation cinétique pour $t < 0$ n'a en général pas de sens physique. Ainsi, dans l'équation cinétique de Boltzmann les deux directions du temps ne sont pas équivalentes. Ceci se trouve en accord avec le fait que l'équation cinétique est appelée à décrire des processus irréversibles.

La méthode utilisée par Boltzmann pour démontrer l'équation cinétique portait, en un certain sens, un caractère semi-intuitif; en particulier, la démonstration supposait que, de toute évidence, l'état d'un gaz ne peut être décrit que par une fonction de distribution à une particule, c'est-à-dire qu'on supposait négligeables les effets liés à la corrélation des particules. Ce qui est important, c'est que la méthode de Boltzmann ne peut pas, en principe, tenir compte de ces effets. Cependant il est très important d'en tenir compte, car il y a lieu de les estimer pour établir le critère d'applicabilité de l'équation cinétique, la théorie cinétique doit donner une réponse à cette question. De plus, l'étude des corrélations entre les particules

présente, par elle-même, un grand intérêt physique car elle permet d'étudier les processus cinétiques dans les gaz réels.

Ainsi apparaît le problème important de la déduction rigoureuse de l'équation cinétique et de la recherche des termes correctifs pour les gaz réels. Ce problème a été résolu par Bogolioubov qui a montré que l'équation cinétique de Boltzmann, tout comme les termes correctifs correspondants, peut être obtenue à partir des lois fondamentales de la mécanique et d'un certain principe général, dit principe d'affaiblissement des corrélations [20].

L'importance de la méthode élaborée par Bogolioubov est en ce qu'elle permet également d'étudier les processus cinétiques qui ne peuvent être décrits à l'aide de l'équation cinétique de Boltzmann.

Nous allons passer maintenant à l'exposé des méthodes permettant d'obtenir l'équation cinétique de Boltzmann et les autres équations cinétiques dans le cas des systèmes classiques.

1.1.2. Densité de probabilité des points de phase. Considérons l'espace des phases, formé par les coordonnées et les impulsions de toutes les particules du système physique étudié et introduisons dans cet espace la densité de probabilité $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_N; t)$ des points de phase, où x_l désigne le rayon vecteur $\boldsymbol{x}_l$ et l'impulsion $\boldsymbol{p}_l$ de la l-ième particule. Cette fonction signifie que la grandeur

$$dw = \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_N; t)\, dx_1 \ldots dx_N \tag{1.1.6}$$

donne la probabilité que, à l'instant t, les coordonnées et les impulsions des particules se trouvent dans les intervalles $dx_1 \equiv d^3x_1\, d^3p_1$, $dx_2 \equiv d^3x_2\, d^3p_2, \ldots$

Rappelons que la notion de probabilité suppose l'introduction d'un ensemble de systèmes identiques, dont le nombre relatif avec des valeurs données des caractéristiques dynamiques détermine la fonction $\mathcal{D}$. Le système étant formé par des particules identiques, la fonction de répartition est symétrique par rapport à ses arguments et il est tout naturel d'introduire la normalisation suivante:

$$\frac{1}{N!}\int dx_1 \ldots dx_N \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_N; t) = 1.$$

Cette normalisation conduit à une relation simple entre les formules quantique et classique.

Il y a lieu de souligner que la description du système à l'aide de la fonction $\mathcal{D}$ est en fait complète, c'est-à-dire que c'est la plus détaillée des descriptions microscopiques d'un système formé par un grand nombre de particules.

En plus de la densité de probabilité $\mathcal{D}$, on peut introduire la probabilité pour une ou plusieurs particules de se trouver dans des éléments donnés de l'espace des phases, indépendamment de la position des autres particules dans cet espace. Ces probabilités peuvent être obtenues par intégration de la fonction $\mathcal{D}$ sur toutes les variables,

à l'exception de celles qui correspondent aux particules données. On obtient ainsi une fonction de distribution à une, deux et dans le cas général s particules. Ainsi la fonction de distribution à une particule $f_1(x_1, t)$ est donnée par l'intégrale

$$f_1(x_1, t) = \frac{1}{(N-1)!} \int dx_2 \ldots dx_N \mathcal{D}(x_1 \ldots x_N; t),$$

et la fonction de distribution à s particules par l'intégrale

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) = \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \ldots dx_N \mathcal{D}(x_1, \ldots, x_N; t). \quad (1.1.7)$$

Ces fonctions sont des fonctions symétriques de leurs arguments.

Les fonctions de distribution à particules multiples sont liées par les relations

$$(N-s) f_s(x_1, \ldots, x_s, t) = \int dx_{s+1} f_{s+1}(x_1, \ldots, x_{s+1}, t) \quad (1.1.8)$$

et satisfont aux conditions de normalisation suivantes

$$\int dx_1 \ldots dx_s f_s(x_1, \ldots, x_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!}. \quad (1.1.9)$$

Nous allons supposer que les fonctions de distribution à particules multiples restent finies lorsque le nombre de particules et le volume augmentent indéfiniment, si toutefois le rapport du nombre de particules au volume du système reste constant.

La formule (1.1.8) montre que les fonctions d'ordre plus élevé portent toute l'information contenue dans les fonctions de distribution d'ordre inférieur. Ceci conduit à ce que, lorsque le nombre s augmente, les fonctions f_s deviennent de plus en plus compliquées. Cependant si la distance entre des particules ou des groupes de particules augmente, les fonctions à particules multiples sont notablement plus simples. Ceci est lié à ce qu'alors la corrélation entre les groupes de particules devient plus faible et la fonction de distribution à particules multiples se transforme en un produit de fonctions de distribution de chaque groupe de particules. Prenons, par exemple, parmi s particules deux groupes contenant respectivement s' et s'' particules et supposons que la distance R entre ces groupes augmente indéfiniment. On a alors

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) \xrightarrow[R\to\infty]{} f_{s'}(x'_1, \ldots, x'_{s'}, t) f_{s''}(x''_{1''}, \ldots, x''_{s''}, t), \quad (1.1.10)$$

où $s = s' + s''$, l'apostrophe désignant les coordonnées et les impulsions du premier groupe de particules, et la double apostrophe les grandeurs analogues pour le second groupe de particules.

Cette relation exprime le *principe de l'affaiblissement spatial des corrélations* lorsque les particules s'éloignent les unes des autres et constitue le postulat essentiel de la mécanique statistique. Il y a lieu

de souligner que le principe formulé ci-dessus de l'affaiblissement spatial des corrélations concerne les fonctions de distribution à particules multiples, pour lesquelles se trouve vérifié le passage à la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$, $N/\mathcal{V} = \text{const.}$

En vertu du principe d'affaiblissement des corrélations si les particules sont divisées en trois ou plus groupes, entre lesquels la distance augmente indéfiniment, la fonction de distribution à particules multiples correspondante s'écrit comme le produit de trois ou plus fonctions à particules multiples d'un nombre moindre d'arguments.

Il y a lieu de remarquer que la formule (1.1.8) se trouve être en accord avec le principe d'affaiblissement spatial des corrélations, compte tenu du fait que la fonction $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ a une limite pour $\mathcal{V} \to \infty$.

Introduisons les fonctions $g_s(x_1, \ldots, x_s, t)$, $s = 2, 3, \ldots$, données par les égalités

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) + g_2(x_1, x_2, t),$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, t) = f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) f_1(x_3, t) +$$
$$+ f_1(x_1, t) g_2(x_2, x_3, t) + f_1(x_2, t) g_2(x_1, x_3, t) +$$
$$+ f_1(x_3, t) g_2(x_1, x_2, t) + g_3(x_1, x_2, x_3, t), \qquad (1.1.11)$$

. . . .

en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations, ces fonctions s'annulent lorsque la distance entre deux particules quelconques devient très grande

$$g_s(x_1, \ldots, x_s, t) \underset{R\to\infty}{\to} 0, \qquad (1.1.12)$$

où R est la distance entre les groupes de particules s'éloignant l'un de l'autre. Les fonctions g_s sont appelées fonctions de corrélation.

1.1.3. Equations pour les fonctions de distribution à particules multiples. Nous allons maintenant obtenir les équations auxquelles satisfont les fonctions de distribution à particules multiples supposant pour plus de simplicité le système conservatif. Nous allons, à cet effet, trouver la solution formelle de l'équation de Hamilton. Les valeurs des coordonnées et des impulsions de la l-ième particule à l'instant t sont, de toute évidence, données par les valeurs des coordonnées et des impulsions de toutes les particules à l'instant initial $x_0 \equiv (x_1(0), \ldots, x_N(0))$

$$x_l = X_l(t, x_0) \equiv (\boldsymbol{X}_l(t, x_0), \mathcal{P}_l(t, x_0)). \qquad (1.1.13)$$

Les fonctions $\boldsymbol{X}_l$ satisfont aux équations de Hamilton [43]

$$\dot{\boldsymbol{X}}_l = \partial\mathcal{H}(X)/\partial\mathcal{P}_l, \quad \dot{\mathcal{P}}_l = -\partial\mathcal{H}(X)/\partial\boldsymbol{X}_l,$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\dot{X}_l = \{X_l, \mathcal{H}(X)\}_X, \qquad (1.1.14)$$

où les crochets de Poisson $\{A(X), B(X)\}_X$ sont donnés par la formule

$$\{A(X), B(X)\}_X = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N} \left(\frac{\partial A}{\partial X_l} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_l} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_l} \frac{\partial B}{\partial X_l} \right) \qquad (1.1.15)$$

($\mathcal{H}(X)$ est le hamiltonien du système, donné en fonction des variables X).

Le passage des grandeurs x_0 aux grandeurs X étant compte tenu de (1.1.13) une transformation canonique et vu que $\mathcal{H}(x_0) = \mathcal{H}(X(t, x_0))$ (le système étant conservatif), en vertu de l'invariance des crochets de Poisson par rapport à la transformation canonique, on a

$$\{X_l, \mathcal{H}(X)\}_X = \{X_l(t, x_0), \mathcal{H}(x_0)\}_{x_0},$$

par conséquent, l'équation (1.1.14) peut s'écrire comme suit

$$\dot{X}_l(t, x) = \{X_l(t, x), \mathcal{H}(x)\}_x,$$

où l'indice 0 de la grandeur x_0 a, pour plus de simplicité, été omis. Comme toutes les opérations de dérivation dans ces équations sont réalisées par rapport aux variables x, la solution formelle de ces équations s'écrit:

$$X_l(t, x) = S^{(N)}(t)\, x_l, \qquad S^{(N)}(t) = \exp[it\Lambda^{(N)}], \qquad (1.1.16)$$

où $\Lambda^{(N)}$ représente l'opérateur des crochets de Poisson

$$\Lambda^{(N)} = -i \sum_{1 \leqslant l \leqslant N} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_l} \frac{\partial}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial p_l} \right), \qquad (1.1.17)$$

qui est l'opérateur auto-adjoint dans l'espace des phases x_l.

Notons qu'une formule, analogue à (1.1.16), est vraie pour toute fonction des variables x_l:

$$\mathcal{F}(X_1(t, x), \ldots, X_s(t, x)) = S^{(N)}(t)\, \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_s). \qquad (1.1.18)$$

Si, à l'instant initial, le système se trouvait au point $x_0 = (x_1(0), \ldots, x_N(0))$ de l'espace des phases, à l'instant t la fonction $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_N; t)$ sera de toute évidence

$$\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_N; t) = \sum \prod_{1 \leqslant l \leqslant N} \delta(x_{i_l} - X_l(t, x_0)),$$

où la somme est prise sur toutes les permutations des indices i_l. Par contre, si les conditions initiales sont distribuées avec la densité de probabilité $\mathcal{D}(x_1(0), \ldots, x_N(0); 0)$, la densité de probabilité

$\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; t)$ sera égale à

$$\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; t) = \\ = \frac{1}{N!}\int dx_1(0) \ldots dx_N(0)\, \mathscr{D}(x_1(0), \ldots, x_N(0); 0). \quad (1.1.19) \\ \sum \prod_{1 \leqslant l \leqslant N} \delta(x_{i_l} - X_l(t, x_0)).$$

Pour un système conservatif on a $X(t, X(-t, x')) = x'$; c'est pourquoi la formule (1.1.19), après le changement de variables $x_0 \to X(-t, x')$, s'écrira comme suit

$$\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; t) = \\ = \frac{1}{N!}\int dx_1' \ldots dx_N' \mathscr{D}(X_1(-t, x'), \ldots, X_N(-t, x'); 0) \times \\ \times \sum \prod_{1 \leqslant l \leqslant N} \delta(x_{i_l} - x_l') = \mathscr{D}(X_1(-t, x), \ldots, X_N(-t, x); 0),$$

ou, en accord avec (1.1.18), sous la forme:

$$\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; t) = S^{(N)}(-t)\, \mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; 0). \quad (1.1.20)$$

Nous avons tenu compte de la symétrie des fonctions $\mathscr{D}(x_1, \ldots$ $\ldots, x_N; 0)$ et utilisé le théorème de Liouville

$$dx_1(0) \ldots dx_N(0) = dx_1' \ldots dx_N'.$$

En dérivant l'expression (1.1.20) par rapport à t et utilisant la définition (1.1.17) de l'opérateur $\Lambda^{(N)}$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; t) = \{\mathscr{H}(x_1, \ldots, x_N), \mathscr{D}(x_1, \ldots, x_N; t)\} \quad (1.1.21)$$

Nous allons supposer qu'entre les particules n'agissent que des forces binaires, décrites par le potentiel $V(x_l, \ldots, x_j) \equiv V_{l,j}$. Si de plus, on suppose la présence d'un certain champ extérieur constant $U(x)$, le hamiltonien du système s'écrira

$$\mathscr{H} = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N} \mathscr{H}(x_l) + \sum_{1 \leqslant l < j \leqslant N} V_{l,j}, \quad \mathscr{H}(x_l) = \frac{p_l^2}{2m} + U(x_l). \quad (1.1.22)$$

En substituant cette expression dans l'équation (1.1.21) et en tenant compte de la définition des fonctions de distribution à particules multiples, on obtient:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{1}{(N-s)!}\sum_{1 \leqslant l \leqslant s}\int d\tau_{N-s}\{\mathscr{H}(x_l), \mathscr{D}\} + \\ + \frac{1}{(N-s)!}\sum_{s+1 \leqslant l \leqslant N}\int d\tau_{N-s}\{\mathscr{H}(x_l), \mathscr{D}\} +$$

$$+\frac{1}{(N-s)!}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}\int d\tau_{N-s}\{V_{i,j},\mathscr{D}\}+$$

$$+\frac{1}{(N-s)!}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ s+1\leqslant j\leqslant N}}\int d\tau_{N-s}\{V_{i,j},\mathscr{D}\}+$$

$$+\frac{1}{(N-s)!}\sum_{s+1\leqslant i<j\leqslant N}\int d\tau_{N-s}\{V_{i,j},\mathscr{D}\},$$

où $d\tau_{N-s}=dx_{s+1}\dots dx_N$. Vu que

$$\int dx_i\{\mathscr{H}(x_i),\mathscr{D}\}=\int dx_i\,dx_j\{V_{i,j},\mathscr{D}\}=0,$$

le second et le cinquième termes dans cette formule s'annulent *). De plus

$$\frac{1}{(N-s)!}\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\int d\tau_{N-s}\{\mathscr{H}(x_i),\mathscr{D}\}+$$

$$+\frac{1}{(N-s)!}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}\int d\tau_{N-s}\{V_{i,j},\mathscr{D}\}=$$

$$=\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\mathscr{H}(x_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}V_{i,j},f_s\Big\}.$$

Enfin, tenant compte du fait que la fonction D est symétrique, on a

$$\frac{1}{(N-s)!}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ s+1\leqslant j\leqslant N}}\int d\tau_{N-s}\{V_{i,j},\mathscr{D}\}=\int dx_{s+1}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}V_{i,s+1},f_{s+1}\Big\}.$$

Donc

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}=\{\mathscr{H}^{(s)},f_s\}+\int dx_{s+1}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}V_{i,s+1},f_{s+1}\Big\},\quad s<N,\qquad(1.1.23)$$

où $\mathscr{H}^{(s)}$ est le hamiltonien d'un ensemble de s particules:

$$\mathscr{H}^{(s)}=\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\mathscr{H}(x_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}V_{i,j},\quad \mathscr{H}^{(1)}\equiv\mathscr{H}(x)=\frac{p^2}{2m}+U(x).$$

On voit que l'équation pour la fonction de distribution à s particules contient la fonction de distribution à $s+1$ particules. En d'autres termes, nous avons obtenu une chaîne infinie d'équations pour les fonctions de distribution à un grand nombre de particules.

*) La première de ces intégrales est nulle par suite de l'affaiblissement des corrélations pour des grandes distances entre les particules et du fait que l'on suppose le système homogène à l'infini.

Cette chaîne est dite *chaîne d'équations de Bogolioubov-Born-Green-Yvon-Kirkwood.* La solution de ces équations doit appartenir à la classe de fonctions qui satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations (on suppose le passage à la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$ effectué).

Le premier terme dans (1.1.23) donne la variation de la fonction de distribution d'un ensemble de s particules pour le cas où on néglige l'influence des autres particules, et le second terme tient compte de cette influence.

§ 1.2. Equations intégrales pour les fonctions de distribution à particules multiples

1.2.1. Equations intégrales pour les fonctions de distribution à l'étape cinétique de l'évolution. Dans le paragraphe précédent nous avons obtenu une chaîne infinie d'équations pour les fonctions de distribution à particules multiples, chaîne qui par elle-même est l'équivalent de l'équation de Liouville dans le cas limite $\mathcal{V} \to \infty$. La description de l'état du système se simplifie notablement dans les deux cas limites suivants : lorsque l'interaction entre les particules du système est faible, ou bien lorsque la densité des particules est faible et l'interaction est quelconque sans donner lieu toutefois à la formation d'états liés. Cette simplification est liée au caractère différent de la dépendance temporelle des fonctions de distribution à une et à un grand nombre de particules. C'est justement à l'étape initiale de l'évolution, lorsque le temps t est petit par rapport à un certain temps caractéristique de chaotisation τ_0, les fonctions de distribution à particules multiples sont soumises à des variations très rapides, alors que la fonction de distribution à une particule ne varie pratiquement pas. Cette fonction ne varie notablement que pour des temps comparables au temps de relaxation τ_r, qui est bien plus grand que τ_0. Le temps de relaxation τ_r détermine l'ordre de grandeur du temps pendant lequel s'établit la distribution de Maxwell, et il est d'autant plus grand que la densité des particules est petite et l'interaction est faible. La valeur du temps τ_r est de l'ordre de grandeur de l'intervalle de temps entre deux collisions, c'est-à-dire du temps de libre parcours. Pour ce qui est du temps τ_0, il ne dépend pratiquement ni de la densité des particules, ni de l'intensité de leur interaction et se trouve être de l'ordre de grandeur du temps d'une collision.

Pour expliquer la nécessité d'introduire le temps τ_0 nous allons envisager tout d'abord le cas d'un gaz parfait, c'est-à-dire un système de particules sans interaction. Dans ce cas la dépendance temporelle des fonctions de distribution à particules multiples peut directement être obtenue à partir des équations (1.1.23), (1.1.20) :

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) = S_0^{(s)}(-t) f_s(x_1, \ldots, x_s, 0),$$

où $S_0^{(s)}(t)$ est l'opérateur de l'évolution de s particules libres. Il est évident que

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) = f_s\left(x_1 - \frac{p_1}{m}t, p_1, \ldots, x_s - \frac{p_s}{m}t, p_s, 0\right).$$

A partir du principe d'affaiblissement des corrélations (1.1.10), on obtient:

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) \underset{t \gg \tau_0}{\longrightarrow} \prod_{1 \leqslant l \leqslant s} f\left(x_l - \frac{p_l}{m}t, p_l, 0\right) = \\ = \prod_{1 \leqslant l \leqslant s} S_0^{(1)}(-t) f_1(x_l, 0). \quad (1.2.1)$$

τ_0 est ici une grandeur de l'ordre de $r_c/\bar{v}$, $\bar{v}$ la vitesse moyenne des particules et r_c le rayon des corrélations, c'est-à-dire la distance à partir de laquelle les fonctions de distribution à particules multiples s'écrivent comme le produit de fonctions à une particule. Généralement, l'ordre de grandeur de r_c coïncide avec le rayon d'action des forces, de sorte que, comme nous l'avons déjà mentionné, τ_0 se trouve être la durée d'une collision.

La formule (1.2.1) montre que dans le cas de l'homogénéité spatiale la fonction de distribution à une particule ne dépend pas du temps, ce qui n'est pas vrai pour les fonctions de distribution à particules multiples (dans le cas de l'homogénéité spatiale elles dépendent des différences des coordonnées des particules) qui prennent rapidement, durant un intervalle de temps de l'ordre de τ_0, la forme d'un produit de fonctions de distribution à une particule.

Soit maintenant un système à interaction arbitraire entre des particules. Dans ce cas, après un intervalle de temps grand par rapport à τ_0, il n'y aura pas de factorisation du type (1.2.1) des fonctions de distribution à particules multiples, néanmoins leur comportement asymptotique pour $t \gg \tau_0$ se trouvera simplifié. Le fait est que les fonctions à particules multiples, à la différence des fonctions à une particule, varient rapidement durant un intervalle de temps de l'ordre de τ_0. C'est pourquoi elles auront le temps de tenir compte de chaque valeur instantanée de la fonction à une particule f_1, qui, comme nous l'avons déjà noté, ne varie notablement que durant un intervalle de temps de l'ordre de $\tau_r \gg \tau_0$. En d'autres termes, pour $t \gg \tau_0$, les fonctions de distribution à particules multiples deviennent des fonctionnelles de la fonction de distribution à une particule

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) \underset{t \gg \tau_0}{\longrightarrow} f_s(x_1, \ldots, x_s; f_1(x', t)), \quad (1.2.2)$$

de plus, la variation dans le temps de la fonction $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$

n'est déterminée, pour $t \gg \tau_0$, que par la dépendance du temps de la fonction de distribution à une particule.

Ainsi, bien que la fonction $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ dépende, dans le cas général, des valeurs initiales de toutes les fonctions de distribution à particules multiples $f_{s'}$, $(x_1, \ldots, x_{s'}, 0)$, $s' = 1, 2, \ldots$, cependant, après un temps grand par rapport à τ_0, cette dépendance devient notablement plus simple et n'apparaît que dans la fonction f_1; les fonctions f_s deviennent alors des fonctionnelles de f_1. C'est pourquoi les fonctionnelles $f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; f_1\,(x', t))$ sont universelles et ne dépendent pas du caractère des conditions initiales pour les fonctions à particules multiples. Cette « perte de mémoire » qui s'exprime à l'aide de l'expression asymptotique (1.2.2) est une propriété fondamentale des systèmes à un grand nombre de particules. Notons que seule est intéressante l'expression asymptotique dans le temps des fonctions de distribution car on ne connaît pas les fonctions de distribution initiales $f_s\,(x_1, \ldots, x_s, 0)$.

Nous allons maintenant, en rejetant l'étape initiale de l'évolution (pour $t \lesssim \tau_0$), chercher la solution de la chaîne d'équations sous la forme $f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; f_1\,(x', t))$. Pour obtenir une solution univoque, il y a lieu, avant tout, de formuler la « condition aux limites » pour les fonctionnelles $f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; f\,(x', t))$. Notons à cet effet que la fonction de distribution limite $f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; f_1\,(x', t))$ doit également satisfaire au principe d'affaiblissement des corrélations. C'est pourquoi, en vertu de (1.2.1), on a l'expression asymptotique suivante

$$S_0^{(s)}(-\tau)\, f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; f_1\,(x', t)) \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{1\leqslant i\leqslant s} S_0^{(1)}\,(-\tau)\, f_1\,(x_i, t),$$

$f_1\,(x, t)$ étant arbitraire, on en déduit:

$$\lim_{\tau\to\infty} S_0^{(s)}(-\tau)\, f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; S_0^{(1)}(\tau)\, f_1\,(x', t)) = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} f_1\,(x_i, t). \tag{1.2.3}$$

Cette expression se trouve être la « condition aux limites » cherchée.

Nous allons maintenant revenir à la chaîne d'équations (1.1.23), pour plus de simplicité nous allons supposer qu'il n'y a pas de champ extérieur. Pour $t \gg \tau_0$, la dérivée par rapport au temps d'une fonction à particules multiples, en vertu de (1.2.2), est

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \int dx\, \frac{\delta f_s\,(x_1, \ldots, x_s;\; f_1\,(x', t))}{\delta f_1\,(x, t)}\, \frac{\partial f_1\,(x, t)}{\partial t}, \tag{1.2.4}$$

où $\delta f_s/\delta f_1$ désigne une dérivée fonctionnelle. En utilisant cette formule, on peut écrire la chaîne d'équations (1.1.23) comme suit

$$\int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x, t)} \mathcal{L}(x; f) =$$
$$= \{\mathscr{H}^{(s)}, f_s(f)\} + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} V_{i,s+1}, f_{s+1}(f) \right\},$$
$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}(x; f(x', t)), \quad s = 2, 3, \ldots, \tag{1.2.5}$$
$$\mathcal{L}(x_1; f) = \{\mathscr{H}(x_1), f(x_1)\} + \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(x_1, x_2; f)\},$$

où $f(x, t) \equiv f_1(x, t)$, $f_s(f) \equiv f_s(x_1, \ldots, x_s; f(x', t))$, $\mathscr{H}(x) = p^2/2m$.

Dans ces équations nous allons considérer les termes ne contenant pas l'interaction. En introduisant les désignations suivantes

$$\mathcal{L}(x; f) = \mathcal{L}_0(x; f) + L(x; f),$$
$$\mathcal{L}_0(x; f) = \{\mathscr{H}(x), f(x)\} = -\frac{p}{m}\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \tag{1.2.6}$$
$$L(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(x_1, x_2; f)\},$$

on peut écrire (1.2.5) comme suit

$$\int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} \mathcal{L}_0(x; f) - \{\mathscr{H}_0^{(s)}, f_s(f)\} = \mathscr{K}_s(f), \tag{1.2.7}$$

où

$$\mathscr{K}_s(f) \equiv \mathscr{K}_s(x_1, \ldots, x_s; f(x)) = \{V^{(s)}, f_s(f)\} +$$
$$+ \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} V_{i,s+1}, f_{s+1}(f) \right\} - \int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} L(x; f), \tag{1.2.8}$$
$$\mathscr{H}_0^{(s)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathscr{H}(x_i), \quad V^{(s)} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant s} V_{i,j}.$$

Remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_0^{(1)}(-\tau) f(x) = \mathcal{L}_0(x; S_0^{(1)}(-\tau) f(x'))$$

et par conséquent

$$\int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} \mathcal{L}_0(x; f) \Big|_{f \to S_0^{(1)}(-\tau) f} = \frac{\partial}{\partial \tau} f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f),$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f) - \{\mathscr{H}_0^{(s)}, f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f)\} = \mathscr{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau) f). \tag{1.2.9}$$

Puis, tenant compte de la définition de $S_0^{(s)}(\tau)$ (1.1.17), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_0^{(s)}(\tau) f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f) = S_0^{(s)}(\tau) \mathscr{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau) f). \tag{1.2.10}$$

En intégrant la dernière équation par rapport à τ, de $-\infty$ à 0, compte tenu de la condition aux limites (1.2.3), on obtient finalement la chaîne suivante d'équations intégrales pour les fonctions de distribution à particules multiples [20,9]:

$$f_s(x_1, \ldots, x_s; f) = \\ = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} f(x_i) + \int_{-\infty}^{0} d\tau S_0^{(s)}(\tau)\mathscr{K}_s(x_1, \ldots, x_s; S_0^{(1)}(-\tau)f), \qquad (1.2.11)$$

où $\mathscr{K}_s$ est donné par la formule (1.2.8).

Notons que ces équations sont vraies dans le cas où dans le domaine asymptotique $\tau_r \gg t \gg \tau_0$ l'état du système peut être décrit par une fonction de distribution à une particule. Ceci est vrai pour les systèmes à faible interaction ou pour les systèmes de densité faible (on suppose que les états liés des particules sont impossibles).

Dans le cas d'une interaction faible, la solution des équations (1.2.11) s'obtient par la méthode des itérations. Ayant ainsi trouvé, avec une certaine approximation, la fonction de distribution à deux particules f_2, on obtient, à partir de (1.2.5), l'expression suivante pour la fonction de distribution à une particule

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x} = L(x; f), \\ L(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(x_1, x_2; f)\}. \end{gathered} \qquad (1.2.12)$$

Cette équation est appelée équation cinétique.

1.2.2. Théorie des perturbations pour les systèmes à densité faible des particules. Les équations (1.2.11) sont commodes pour étudier des systèmes à faible interaction entre les particules, car dans ce cas on peut facilement utiliser la théorie des perturbations. Le cas d'un système de densité faible et interaction quelconque entre les particules joue un rôle important. L'utilisation directe des équations (1.2.11) est ici difficile, cependant ces équations peuvent prendre une autre forme permettant d'appliquer la théorie des perturbations au cas des systèmes de densité faible.

A cet effet on écrit la chaîne des équations intégrales (1.2.11) comme suit

$$\begin{gathered} \mathscr{F}_s(\tau) = \mathscr{F}_s^{(0)}(\tau) + \int_{-\infty}^{0} d\tau' e^{\eta\tau'} S_0^{(s)}(\tau')\mathscr{K}_s(\tau+\tau'), \\ \eta \to +0, \quad \mathscr{F}_s(\tau) = f_s(S_0^{(1)}(-\tau)f), \\ \mathscr{K}_s(\tau) = \mathscr{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau)f), \quad \mathscr{F}_s^{(0)}(\tau) = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} S_0^{(1)}(-\tau)f(x_i). \end{gathered} \qquad (1.2.13)$$

En introduisant les composantes de Fourier des fonctions $\mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_s^{(0)}$, $\mathcal{K}_s$, correspondant à la variable τ

$$\mathcal{F}_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz\tau} \mathcal{F}_s(z),$$

on peut écrire (1.2.13) comme suit:

$$\mathcal{F}_s(z) = \mathcal{F}_s^{(0)}(z) + \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\tau(\eta+iz)} e^{i\Lambda_0^{(s)}\tau} \mathcal{K}_s(z),$$

d'où

$$i\Lambda_0^{(s)} \mathcal{F}_s(z) = i\Lambda_0^{(s)} \mathcal{F}_s^{(0)}(z) + \mathcal{K}_s(z) - (\eta + iz)(\mathcal{F}_s(z) - \mathcal{F}_s^{(0)}(z)),$$

où $\Lambda_0^{(s)}$ est le crochet opérationnel de Poisson pour le mouvement libre des particules. Compte tenu maintenant de ce que

$$i\Lambda_0^{(s)} \mathcal{F}_s^{(0)}(z) = -iz\mathcal{F}_s^{(0)}(z),$$

on écrit la dernière équation sous la forme suivante:

$$\{i(\Lambda^{(s)} + z) + \eta\} \mathcal{F}_s(z) = \eta \mathcal{F}_s^{(0)}(z) + K_s(z),$$

où $K_s(z)$ est l'image de Fourier de la fonction $K_s(\tau)$ donnée par les relations

$$K_s(\tau) = K_s(S_0^{(1)}(-\tau) f),$$

$$K_s(f) = \int dx_{s+1} \Big\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant s+1} V_{i,\, s+1},\ f_{s+1}(f) \Big\} - \\ - \int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} L(x;\ f), \qquad (1.2.14)$$

par conséquent

$$\mathcal{F}_s(z) = \{i(\Lambda^{(s)} + z) + \eta\}^{-1} \{\eta \mathcal{F}_s^{(0)}(z) + K_s(z)\}.$$

Remarquant ensuite que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iz\tau}}{\eta + i(\Lambda^{(s)} + z)} = \begin{cases} 0, & \tau > 0, \\ e^{\eta\tau} e^{i\Lambda^{(s)}\tau} & \tau < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{\eta \to +0} \eta \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\Lambda^{(s)}} \mathcal{F}_s^{(0)}(\tau) = \lim_{\tau \to -\infty} S^{(s)}(\tau) S_0^{(s)}(-\tau) \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} f(x_i),$$

on obtient finalement [20, 9]

$$f_s(x_1, \ldots, x_s;\ f) = \tilde{f}_s(x_1, \ldots, x_s;\ f) + \\ + \int_{-\infty}^{0} d\tau S^{(s)}(\tau) K_s(x_1, \ldots, x_s;\ S_0^{(1)}(-\tau) f), \qquad (1.2.15)$$

où

$$\tilde{f}_s(x_1, \ldots, x_s; f) = \lim_{\tau \to -\infty} S^{(s)}(\tau) S_0^{(s)}(-\tau) \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i)$$

et $K_s(x_1, \ldots, x_s; f)$ est donné par la formule (1.2.14).

Ces équations sont par définition équivalentes aux équations (1.2.11). Cependant à la différence de ces dernières, elles sont commodes à étudier les systèmes de densité faible. En effet, comme vu la condition de normalisation de la fonction de distribution à une particule f le développement suivant les puissances de la densité équivaut au développement fonctionnel suivant les puissances de f et comme le développement de f_s commence par la puissance s de f (compte tenu des définitions (1.2.14), (1.2.12)) le développement du terme intégral dans (1.2.15) commence par la puissance $s+1$ de f.

§ 1.3. Equations cinétiques et phénomènes de transfert dans les gaz

1.3.1. Equation cinétique dans le cas d'une interaction faible. Nous allons passer maintenant à une étude plus détaillée de la chaîne des équations intégrales pour les fonctions de distribution à particules multiples.

Dans le cas d'une interaction faible entre les particules la solution des équations (1.2.11) peut s'écrire comme un développement en série suivant les puissances de l'énergie d'interaction

$$f_s(f) = f_s^{(0)}(f) + f_s^{(1)}(f) + \ldots, s \geqslant 2. \qquad (1.3.1)$$

Il lui correspond le développement de la fonctionnelle L

$$L(f) = L^{(1)}(f) + L^{(2)}(f) + \ldots$$

$$L^{(m)}(f) \equiv L^{(m)}(x_1, f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2^{(m-1)}(x_1, x_2; f)\}. \qquad (1.3.2)$$

En substituant ces développements dans (1.2.11), on obtient le système suivant d'équations de récurrence pour la définition des fonctions $f_s^{(k)}$:

$$f_s^{(0)}(x_1, \ldots, x_s; f) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i),$$

$$f_s^{(k)}(f) = \int_{-\infty}^{0} d\tau S_0^{(s)}(\tau) \Big(\{V^{(s)}, f_s^{(k-1)}(f)\} + \int dx_{s+1} \Big\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}^{(k-1)}(f) \Big\} - \sum_{i=0}^{k} \int dx \frac{\delta f_s^{(i)}(\;)}{\delta f(x)} L^{(k-i)}(x; f)\Big)_{f \to S_0^{(1)}(\tau)}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (1.3.3)$$

Généralement on peut se limiter aux termes d'ordre zéro et un. En vertu des formules précédentes, la fonction $f_s^{(1)}$ s'écrit

$$f_s^{(1)}(x_1, \ldots, x_s; f) =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} d\tau \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq s} V\left(x_i - x_j + \frac{p_i - p_j}{m}\tau\right), \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i) \right\}. \quad (1.3.4)$$

Puis, conformément à (1.3.2) et (1.3.3), on a

$$L^{(1)}(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f(x_1) f(x_2)\}$$

ou

$$L^{(1)}(x; f) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (1.3.5)$$

où

$$U(x; f) \equiv U = \int d^3x' V(x - x') \int d^3p' f(x', p', t). \quad (1.3.6)$$

C'est pourquoi l'équation cinétique (1.2.12), en supposant l'interaction linéaire, s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (1.3.7)$$

Cette équation a un sens physique simple. La fonction U est le potentiel moyen agissant sur une particule donnée de la part de toutes les autres particules. On l'appelle donc potentiel self-consistent; quant à la grandeur $-\partial U/\partial x$, c'est une force self-consistent. L'équation (1.3.7) montre que la variation de la fonction de distribution f comporte, pour cette approximation, deux termes: le terme $v\, \partial f/\partial x$ lié à l'éloignement de la particule du voisinage du point x par suite du mouvement libre avec la vitesse $v = p/m$ et le terme $\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p}$, lié à l'éloignement de la particule du voisinage du point p de l'espace des impulsions par suite de l'action de la force self-consistent $-\partial U/\partial x$. L'équation (1.3.7) est appelée *équation cinétique à champ self-consistent.*

Nous allons maintenant chercher la forme de la fonctionnelle $L^{(2)}(x; f)$. En substituant (1.3.4) dans (1.3.2) pour $m = 2$, on obtient

$$L^{(2)}(x_1; f) = \int_{-\infty}^{0} d\tau \int dx_2 \left\{ V(x_1 - x_2), \left\{ V\left(x_1 - x_2 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\tau}{m}(p_1 - p_2)\right), f(x_1) f(x_2) \right\} \right\}.$$

Nous allons supposer que les dimensions des non-homogénéités a, caractéristiques du système, sont bien plus importantes que le rayon d'action des forces r_0 qui s'exercent entre les particules. Dans ce cas les gradients de la fonction de distribution à une particule $\partial f/\partial x$ peuvent être supposés petits. Pour cette raison on peut développer la fonction $f(x_2)$ figurant dans $L^{(2)}(x_1; f)$ en série suivant les puissances de $x_2 - x_1$ au voisinage du point x_1. L'approximation zéro par rapport aux gradients de f donne alors l'expression suivante pour $L^{(2)}(x_1; f)$ [20]:

$$L^{(2)}(x_1; f) = -\frac{\partial}{\partial p_1} \mathcal{J}(x_1; f),$$
$$\mathcal{J}_i(x_1; f) = C \int d^3p_2 \, | p_1 - p_2 |^{-3} ((p_1 - p_2)^2 \delta_{ik} - \\ -(p_1 - p_2)_i (p_1 - p_2)_k) \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial p_{1k}} f(x_2) - \frac{\partial f(x_2)}{\partial p_{2k}} f(x_1) \right)_{x_1 = x_2}, \tag{1.3.8}$$

où

$$C = \frac{m}{8\pi} \int_0^\infty dq q^3 V_q^2, \quad V_q = \int d^3x V(x) e^{-iqx}.$$

La fonctionnelle $L^{(2)}$ est appelée *intégrale des collisions*. On voit que dans le cas d'une interaction faible l'intégrale des collisions devient la divergence dans l'espace des impulsions par rapport à un certain vecteur $\mathcal{J}_i$ que l'on peut appeler courant des particules dans l'espace des impulsions.

L'équation cinétique (1.2.12), compte tenu des termes quadratiques par rapport à l'interaction, s'écrit donc comme suit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial p_i}. \tag{1.3.9}$$

Cette équation est appelée *équation intégrale de Fokker-Planck*.

1.3.2. Equation cinétique pour le cas des densités faibles. Dans le paragraphe précédent nous avons obtenu l'équation cinétique pour le cas d'une interaction faible entre les particules. Nous allons déduire l'équation cinétique pour un gaz de densité faible, l'interaction n'étant pas, dans ce cas, obligatoirement faible (nous allons seulement supposer que l'interaction entre les particules n'entraîne pas l'apparition d'états liés).

Pour équations initiales, on prend les équations (1.2.15). Nous allons chercher les fonctions de distribution à particules multiples sous la forme d'une série fonctionnelle, suivant les puissances de la fonction de distribution à une particule, car ce développement est en fait le développement suivant les puissances de la densité des particules

$$f_s(f) = f_s^{(s)}(f) + f_s^{(s+1)}(f) + \ldots, \quad s \geqslant 2$$

(comme nous l'avons déjà remarqué au paragraphe 1.2.2, le développement de $f_s(f)$ commence par un terme d'ordre s par rapport à la densité des particules). Le développement suivant de la fonctionnelle $L(x; f)$

$$L(x; f) = L^{(2)}(x; f) + L^{(3)}(x; f) + \dots,$$
$$L^{(k)}(x; f) = \int dx' \{V(x - x'),\ f_2^{(k)}(x, x'; f)\} \tag{1.3.10}$$

correspond à ce développement. L'équation cinétique pour la fonction de distribution à une particule f s'écrit en vertu de (1.2.12)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x} = L^{(2)}(x; f) + \dots \tag{1.3.11}$$

A partir des équations (1.2.15), on a:

$$f_s^{(s)}(x_1, \dots, x_s; f) = \tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; f) =$$
$$= \lim_{\tau\to\infty} S^{(s)}(-\tau)\, S_0^{(s)}(\tau) \prod_{1\leqslant i\leqslant s} f(x_i). \tag{1.3.12}$$

Pour trouver $L^{(2)}(x; f)$ il faut connaître la fonction $f_2^{(2)}(f)$ qui, conformément à (1.3.12), s'écrit:

$$f_2^{(2)}(x_1, x_2; f) = \lim_{\tau\to\infty} f\left(S^{(2)}(-\tau)\, x_1 + \tau S^{(2)}(-\tau)\frac{p_1}{m},\ S^{(2)}(-\tau)\, p_1\right) \times$$
$$\times f\left(S^{(2)}(-\tau)\, x_2 + \tau S^{(2)}(-\tau)\frac{p_2}{m},\ S^{(2)}(-\tau)\, p_2\right).$$

Vu l'existence des limites

$$\lim_{\tau\to\infty} S^{(2)}(-\tau)\, p_i = \mathcal{P}_i(x_1, x_2),$$
$$\lim_{\tau\to\infty}\left(S^{(2)}(-\tau)\, x_i + \tau S^{(2)}(-\tau)\frac{p_i}{m}\right) = X_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

on peut écrire $f_2^{(2)}(f)$ comme suit

$$f_2^{(2)}(x_1, x_2; f) = f(X_1, \mathcal{P}_1)\, f(X_2, \mathcal{P}_2),$$

d'où en vertu de (1.3.10) on a

$$L^{(2)}(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2),\ f(X_1, \mathcal{P}_1)\, f(X_2, \mathcal{P}_2)\}$$

Supposons maintenant que le rayon d'action des forces r_0 est petit par rapport aux dimensions caractéristiques de l'hétérogénéité a, $r_0 \ll a$, c'est-à-dire par rapport aux distances pour lesquelles la fonction de distribution à une particule $f(x)$ varie notablement. Comme $|X_i - x_i| \sim r_0$ $(i = 1, 2)$, en approximation zéro par

rapport au gradient, on peut écrire $L^{(2)}$ sous la forme:

$$L^{(2)}(x_1;\ f)=$$
$$=\int d^3x'\delta(x'-x_1)\int dx_2\{V(x_1-x_2),\ f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)\}_{x_1,\ x_2}. \tag{1.3.13}$$

Les variables x_1, p_1, x_2, p_2 devenant les variables X_1, $\mathcal{P}_1$, X_2, $\mathcal{P}_2$ lors du mouvement réel d'un système de deux particules avec le hamiltonien $\mathcal{H}^{(2)}=p_1^2/2m+p_2^2/2m+V(x_1-x_2)$, ces deux groupes de variables sont liés entre eux par une transformation canonique. Exprimé en fonction des variables $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, le hamiltonien $\mathcal{H}^{(2)}$ s'écrit

$$\mathcal{H}^{(2)}=\mathcal{P}_1^2/2m+\mathcal{P}_2^2/2m,$$

car $\mathcal{H}^{(2)}=S^{(2)}(-\tau)\,\mathcal{H}^{(2)}$ et $\lim\limits_{\tau\to\infty}S^{(2)}(\tau)\,V(x_1-x_2)=0$. C'est pourquoi, compte tenu de l'invariance des crochets de Poisson par rapport à la transformation canonique, on a

$$\{\mathcal{H}^{(2)},\ f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)\}_{x_1,\ x_2}=$$
$$=\{\mathcal{H}^{(2)},\ f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)\}_{X_1,\ X_2}=0$$

et par conséquent

$$\{V(x_1-x_2),\ f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)\}_{x_1,\ x_2}=$$
$$=\frac{p_2-p_1}{m}\frac{\partial}{\partial x_2}f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2).$$

Calculons maintenant l'intégrale sur x_2 du crochet de Poisson figurant dans l'expression de $L^{(2)}(x_1;\ f)$. Cette intégration s'effectue en fait sur la différence x_2-x_1, car la translation étant invariante $\mathcal{P}_1(x_1,\ x_2)$, $\mathcal{P}_2(x_1,\ x_2)$ dépendent de la différence x_2-x_1. On passe donc, dans l'intégrale sur x_2 aux coordonnées cylindriques ξ, b, φ dont l'origine se trouve au point x_1 et l'axe ξ est dirigé le long du vecteur p_2-p_1:

$$\int d^3x_2\{V(x_1-x_2),\ f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)\}=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}dbb\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\frac{|p_2-p_1|}{m}, \tag{1.3.14}$$

$$\frac{d}{d\xi}f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}dbb\frac{|p_2-p_1|}{m}\{f(x',\ \mathcal{P}_1)f(x',\ \mathcal{P}_2)\}_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}.$$

Par définition $\mathcal{P}_1(x_1, x_2)$, $\mathcal{P}_2(x_1, x_2)$ sont les impulsions des deux particules à l'instant $\tau = -\infty$. Ces particules à l'instant $\tau = 0$ se trouvaient aux points x_1, x_2, leurs impulsions étaient respectivement p_1, p_2. Il est évident que si $\xi = (x_2 - x_1)(p_2 - p_1)/|p_2 - p_1| > 0$, la collision des particules a eu lieu pour $\tau < 0$, au contraire, si $\xi < 0$, elle a eu lieu pour $\tau > 0$. On a donc

$$\mathcal{P}_i(x_1, x_2)|_{\xi=\infty} = p'_i(p_1, p_2, b), \quad \mathcal{P}_i(x_1, x_2)|_{\xi=-\infty} = p_i, \quad (1.3.15)$$

où p'_1, p'_2 sont les impulsions des particules à l'infini (si les impulsions initiales sont p_1 et p_2 et le paramètre de visée égal à b). Par conséquent, en substituant (1.3.15) dans (1.3.14), on obtient

$$L^{(2)}(x_1; f) = \int d^3p_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} db b \frac{|p_2 - p_1|}{m} \{f(x_1, p'_1) f(x_1, p'_2) - \\ - f(x_1, p_1) f(x_1, p_2\}. \quad (1.3.16)$$

Si la collision est caractérisée par l'angle θ (θ étant angle entre $p'_1 - p'_2$ et $p_1 - p_2$), b se trouve être une fonction de $|p_2 - p_1|$ et de θ. La grandeur

$$\sigma(\theta, v_2 - v_1) = \frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta}$$

sera alors la section différentielle de dispersion. On peut donc écrire l'équation (1.3.11) sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \\ = \int d^3p_2 \int d\Omega |v_2 - v_1| \sigma(\theta, v_2 - v_1) \{f(x_1, p'_1) f(x_1, p'_2) - \\ - f(x_1, p_1) f(x_2, p_2)\} \equiv L^{(2)}(x_1; f). \quad (1.3.17)$$

Nous avons obtenu l'équation cinétique de Boltzmann, équation qui, en vertu de la démonstration précédente, est vraie pour des densités assez faibles des particules, lorsque $N/\mathcal{V} \ll r_0^{-3}$, quant à l'intensité de l'interaction, elle peut être arbitraire, pourvu qu'elle n'entraîne pas l'apparition d'états liés. De plus, il faut que l'hétérogénéité spatiale de la distribution des particules soit suffisamment faible *).

Lorsque nous avons trouvé l'équation cinétique (1.3.17), nous avons supposé qu'aucune force extérieure n'agit sur la particule. En présence de ces forces le hamiltonien du système doit contenir l'énergie potentielle correspondante. Si de plus les forces sont suffisamment faibles et varient lentement dans l'espace, elles n'auront aucune

*) Dans [63] on peut trouver une étude des corrections à l'intégrale des collisions de Boltzmann.

influence sur le processus de collision et leur action ne sera que cinématique, c'est-à-dire que dans le premier membre de (1.3.17), on voit apparaître, comme on peut le voir à partir de (1.1.23), le terme $F\,\partial f/\partial \boldsymbol{p}$, où F est la force extérieure agissant sur la particule

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\,\frac{\partial f}{\partial x}+F\,\frac{\partial f}{\partial p}=L^{(2)}(x\,;\,f). \qquad (1.3.18)$$

1.3.3. Théorie des phénomènes de transfert dans les gaz. La théorie des phénomènes de transfert dans les gaz est une application importante de l'équation cinétique de Boltzmann. Pour élucider la structure de cette théorie, remarquons avant tout, qu'après un intervalle de temps long par rapport au temps de relaxation τ_r (τ_r étant l'intervalle de temps durant lequel s'établit la distribution de Maxwell), il devient superflu de décrire l'état du système à l'aide de la fonction de distribution, car lors de cette étape de l'évolution du système son état peut être décrit par les grandeurs hydrodynamiques: la densité de masse $\rho^{(m)}(\boldsymbol{x}, t)$, la densité d'énergie $\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ (ou la température $T(\boldsymbol{x}, t)$) et la densité d'impulsion $\pi(\boldsymbol{x}, t)$ (ou la vitesse hydrodynamique $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$). Ceci signifie que pour $t \gg \tau_r$ la fonction de distribution devient une fonctionnelle des grandeurs hydrodynamiques

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \underset{t\gg\tau_r}{\longrightarrow} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}\,;\,\rho^{(m)}(\boldsymbol{x}', t),\ \varepsilon(\boldsymbol{x}', t),\ \pi(\boldsymbol{x}', t)). \qquad (1.3.19)$$

Cette fonctionnelle est universelle en ce sens qu'elle ne dépend pas de la fonction de distribution initiale, dont la « mémoire » ne se trouve conservée que dans les grandeurs hydrodynamiques $\rho^{(m)}$, ε, π. De plus, cette fonctionnelle dépend du temps de la même manière que les grandeurs hydrodynamiques.

Ainsi, à l'étape hydrodynamique de l'évolution, la solution de l'équation cinétique doit être recherchée sous la forme

$$f=f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}\,;\,\rho^{(m)}(\boldsymbol{x}', t),\ \varepsilon(\boldsymbol{x}', t),\ \pi(\boldsymbol{x}', t)) \qquad (1.3.20)$$

Comme pour $t \gg \tau_0$ les fonctions de distribution à particules multiples sont des fonctionnelles universelles de la fonction à une particule, pour $t \gg \tau_r$ elles deviennent, en vertu de (1.2.2), des fonctionnelles universelles des grandeurs hydrodynamiques *).

Remarquons que la relation (1.3.19) correspondant à l'étape hydrodynamique de l'évolution est analogue à la relation (1.2.2), correspondant à l'étape cinétique de l'évolution, avec cette seule différence que dans la relation (1.3.19) la fonction de distribution à une particule remplace la fonction de distribution à particules multiples, alors que, dans (1.2.2), au lieu de la fonction de distri-

*) Gilbert, Chapman et Enskog [119] ont trouvé la solution de l'équation cinétique sous la forme (1.3.20). Cette méthode a été généralisée compte tenu des corrections à l'équation cinétique de Boltzmann par Bogolioubov [20].

bution à une particule, on a dans (1.3 19) les grandeurs hydrodynamiques. Remarquons également que lorsque l'on trouve la solution de l'équation cinétique sous la forme (1.3.20), on n'a pas besoin de conditions aux limites supplémentaires du type (1.2.3), nécessaires à l'étape cinétique pour trouver la fonction de distribution à particules multiples à partir de la chaîne d'équations (1.1.23).

La relation (1.3.19) suppose que les intervalles de temps τ_m et les distances spatiales a_m caractéristiques donnant lieu à des variations importantes des grandeurs hydrodynamiques sont grands par rapport au temps τ_r et à la longueur $l = \tau_r \bar{v}$ de libre parcours des particules du gaz ($\bar{v}$ étant la vitesse moyenne thermique), ceci signifie que les dérivées temporelle et spatiale de la fonction de distribution (tout comme pour les grandeurs hydrodynamiques) sont des grandeurs petites. C'est pourquoi, dans ce cas, il y a lieu de chercher la solution de l'équation de Boltzmann sous la forme d'un développement suivant les puissances du paramètre l/a_m, et du point de vue formelle, sous la forme d'une série suivant les gradients des densités de masse, d'énergie et d'impulsion

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \ldots \tag{1.3.21}$$

Il est évident que la fonctionnelle f doit satisfaire aux conditions

$$\begin{gathered} \rho^{(m)}(\boldsymbol{x}, t) = \langle m \rangle, \quad \varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = \langle mv^2/2 \rangle, \\ \pi(\boldsymbol{x}, t) \equiv \rho^{(m)}(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \langle m\boldsymbol{v} \rangle, \end{gathered} \tag{1.3.22}$$

où

$$\langle A(\boldsymbol{p}) \rangle = \int d^3p A(\boldsymbol{p})\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; \rho^{(m)}, \varepsilon, \pi), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m.$$

Pour trouver les équations hydrodynamiques pour les grandeurs $\rho^{(m)}$, u, T, on remarque que si une certaine grandeur $\chi(\boldsymbol{p})$ concernant une molécule se conserve lors de la collision des molécules, c'est-à-dire si

$$\chi(\boldsymbol{p}_1) + \chi(\boldsymbol{p}_2) = \chi(\boldsymbol{p}_1') + \chi(\boldsymbol{p}_2')$$

($\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ et $\boldsymbol{p}_1'$, $\boldsymbol{p}_2'$ étant les impulsions des particules avant et après la collision), il est facile de vérifier qu'on a l'identité

$$\int d^3p\chi(p)\, L^{(2)}(x;\ f) = 0.$$

C'est pourquoi, en multipliant l'équation cinétique (1.3.17) par χ et en intégrant sur $\boldsymbol{p}$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \chi \rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle v\chi \rangle = 0.$$

En substituant successivement $\chi = m, p, p^2/2m$, on obtient les équations hydrodynamiques cherchées

$$\frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.3.23)$$

où t_{ik} est le tenseur des tensions et q_i la densité du flux d'énergie

$$t_{ik} = m^{-1} \langle p_i p_k \rangle, \quad q_i = m^{-1} \langle p_i p^2/2m \rangle. \quad (1.3.24)$$

Pour que les équations écrites aient un sens physique concret, on doit calculer les grandeurs t_{ik} et q_i, et pour cela il faut connaître la fonction de distribution des molécules du gaz, c'est-à-dire résoudre l'équation cinétique de Boltzmann. A cet effet nous allons revenir au développement (1.3.21). En portant (1.3.21) dans l'équation cinétique de Boltzmann, on obtient:

$$L^{(2)}(x;\ f^{(0)}) = 0, \quad (1.3.25)$$

$$L_1^{(2)}(x;\ f^{(1)}) = \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}\right)^{(1)} + v\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x}, \quad (1.3.26)$$

où $L_1^{(2)}(x;\ f^{(1)})$ est l'intégrale des collisions, linéarisée par rapport à $f - f^{(0)} \approx f^{(1)}$ et $(\partial f^{(0)}/\partial t)^{(1)}$ la dérivée $\partial f^{(0)}/\partial t$ calculée à l'aide de l'équation (1.3.23) à l'approximation linéaire par rapport aux gradients. (Rappelons que $f^{(0)}$ et $f^{(1)}$ dépendent du temps et des coordonnées autant que les grandeurs hydrodynamiques en dépendent.) Il est évident qu'en ordre de grandeur, on a $L_1^{(2)}(x;\ f^{(1)}) \sim -\tau_r^{-1} f^{(1)}$. En vertu de la condition (1.3.22), on a:

$$\rho^{(m)} = \langle m \rangle^{(0)}, \quad \varepsilon = \langle mv^2/2 \rangle^{(0)}, \quad \rho^{(m)} u_i = \langle mv_i \rangle^{(0)}, \quad (1.3.27)$$

$$\langle m \rangle^{(k)} = 0, \quad \langle mv^2/2 \rangle^{(k)} = 0, \quad \langle mv_i \rangle^{(k)} = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, \quad (1.3.28)$$

où $\langle A \rangle^{(l)} = \int d^3p A(p) f^{(l)}(x,\ p;\ \rho^{(m)},\ \varepsilon,\ \pi), \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

La solution de l'équation (1.3.25), compte tenu des conditions (1.3.27), est donnée par la distribution locale de Maxwell

$$f^{(0)} = \rho^{(m)} m^{-1} (2\pi m T)^{-3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2T}(v - u)^2\right\}, \quad (1.3.29)$$

où $\rho^{(m)}$, T, u sont des fonctions des coordonnées et du temps, de plus la température locale $T(x,\ t)$ est liée à la densité d'énergie locale $\varepsilon(x,\ t)$ par la relation

$$\varepsilon(x,\ t) = \frac{3}{2} m^{-1} \rho^{(m)}(x,\ t)\, T(x,\ t) + \frac{1}{2} \rho^{(m)}(x,\ t)\, u^2(x,\ t). \quad (1.3.30)$$

(En vertu des conditions (1.3.27), la solution de l'équation (1.3.25) est univoque.)

Connaissant $f^{(0)}$, il est facile de calculer t_{ik} et q_i à l'approximation zéro par rapport aux gradients

$$\begin{aligned} t_{ik}^{(0)} &= m^{-1}\langle p_i p_k\rangle^{(0)} = p\delta_{ik} + \rho^{(m)}u_i u_k, \\ q_i^{(0)} &= m^{-1}\langle p_i p^2/2m\rangle^{(0)} = (\varepsilon + p)\, u_i, \end{aligned} \qquad (1.3.31)$$

où $p = \rho^{(m)}m^{-1}T$ est la densité du gaz parfait. En utilisant ces formules, à partir de (1.3.23) il est facile de trouver les grandeurs $\partial\rho^{(m)}/\partial t$, $\partial u/\partial t$, $\partial T/\partial t$ en première approximation par rapport aux gradients

$$\left(\frac{\partial\rho^{(m)}}{\partial t}\right)^{(1)} = -\frac{\partial\rho^{(m)}u_i}{\partial x_i}, \quad \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^{(1)} = -u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho^{(m)}}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{(1)} = -u_i\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{2}{3}T\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

C'est pourquoi, conformément à (1.3.29), l'équation (1.3.26) peut s'écrire comme suit

$$L_1^{(2)}(x\,;\, f^{(1)}) = f^{(0)}\left\{\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\tilde{v}_i\left(\frac{m\tilde{v}^2}{2T} - \frac{5}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{m}{T}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\tilde{v}_i\tilde{v}_k - \frac{1}{3}\tilde{v}^2\delta_{ik}\right)\right\},$$

où $\tilde{v}_i = v_i - u_i$. Compte tenu de la structure tensorielle du second membre de cette équation, la fonction $f^{(1)}$ doit s'écrire sous la forme

$$f^{(1)} = -\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}A_i - \frac{1}{T}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}B_{ik}, \qquad (1.3.32)$$

avec

$$A_i = \tilde{v}_i A(\tilde{v}^2), \quad B_{ik} = \left(\tilde{v}_i\tilde{v}_k - \frac{1}{3}\tilde{v}^2\delta_{ik}\right)B(\tilde{v}^2)$$

et A et B des fonctions scalaires de $\tilde{v}^2$, $\rho^{(m)}$, T. Les fonctions A_i et B_{ik} satisfont aux équations

$$\begin{aligned} L_1^{(2)}(x\,;\, A_i) &= -f^{(0)}\tilde{v}_i\left(\frac{m\tilde{v}^2}{2T} - \frac{5}{2}\right), \\ L_1^{(2)}(x\,;\, B_{ik}) &= -f^{(0)}m\left(\tilde{v}_i\tilde{v}_k - \frac{1}{3}\tilde{v}^2\delta_{ik}\right). \end{aligned} \qquad (1.3.33)$$

Ces équations déterminent la fonction B d'une manière univoque, et la fonction A à $Cf^{(0)}$ près, où C est une constante arbitraire donnée par la troisième condition (1.3.28), à savoir

$$\int d^3p\,\tilde{v}^2 A(\tilde{v}^2) = 0.$$

Remarquons que les deux premières conditions de (1.3.28) sont automatiquement vérifiées.

Après avoir trouvé les fonctions A et B (à cet effet il n'existe que des méthodes numériques), on peut calculer le tenseur des tensions

t_{ik} et la densité du flux d'énergie q_i aux termes quadratiques en gradients près

$$t_{ik}=t_{ik}^{(0)}+t_{ik}^{(1)}+\ldots, \quad q_i=q_i^{(0)}+q_i^{(1)}+\ldots, \tag{1.3.34}$$

où $t_{ik}^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ sont donnés par les formules (1.3.31) et où de plus

$$t_{ik}^{(1)}=m\langle\tilde{v}_i\tilde{v}_k\rangle^{(1)}=-\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right),$$

$$q_i^{(1)}=t_{ik}^{(1)}u_k+\langle\tilde{v}_i m\tilde{v}^2/2\rangle^{(1)}=t_{ik}^{(1)}u_k-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Les grandeurs η et $\varkappa$ figurant dans ces relations sont les coefficients de viscosité et de conductibilité thermique; conformément à (1.3.32), ils sont déterminés par les intégrales suivantes

$$\eta=\frac{m}{15T}\int d^3pv^4B(v^2), \quad \varkappa=\frac{m}{6T}\int d^3pv^4A(v^2).$$

Leurs ordres de grandeur sont

$$\eta\sim\frac{2}{3}\bar{v}\rho^{(m)}l, \quad \varkappa\sim\frac{1}{3}c_pl\bar{v},$$

avec $\bar{v}=(3T/m)^{1/2}$, $c_p=5/2$ la chaleur spécifique du gaz à pression constante rapportée à une molécule et l le libre parcours moyen d'une molécule.

En substituant (1.3.34) dans (1.3.23), on obtient un système fermé d'équations hydrodynamiques, compte tenu des processus de dissipation.

D'une manière analogue, on peut développer la théorie de la diffusion des gaz, mais à cet effet, il y a lieu d'envisager un mélange de gaz et d'écrire, pour chacun de ses constituants, l'équation cinétique correspondante. Nous n'allons pas étudier cette question et nous y reviendrons au chapitre 6, où nous obtiendrons les équations hydrodynamiques générales non seulement pour les gaz, mais également pour les liquides à plusieurs constituants *).

§ 1.4. Equations cinétiques pour les particules en interaction avec le milieu ambiant

1.4.1. Equation différentielle de Fokker-Planck pour les processus lents. Dans le cas d'une interaction faible les impulsions des particules, lors de chaque collision, ont de petites variations, c'est pourquoi chaque processus dans un système à faible interaction entre les particules sera lent. Dans 1.3.1 nous avons montré que, dans ce cas, l'intégrale des collisions est une divergence dans l'espace des impulsions, d'un certain vecteur appelé courant des collisions, qui est un opérateur intégral par rapport aux fonctions de distribution.

*) On peut trouver dans [44, 103, 117] et [10] un exposé plus détaillé de la théorie cinétique des gaz.

La structure du courant des collisions se simplifie et l'opérateur intégral devient différentiel, quand on envisage non pas les collisions mutuelles des particules, mais les collisions avec certains objets étrangers, en particulier avec les particules, ne faisant pas partie du système étudié et se trouvant à l'état d'équilibre statistique. Pour nous en rendre compte considérons des variables dynamiques quelconques $\xi_i \equiv \xi$ (non obligatoirement des impulsions) caractérisant l'état des particules du système, qui par suite des collisions avec certains objets accusent de petites variations. L'état du système étant supposé connu, il y a lieu de trouver les variations de la fonction de distribution $f(\xi, t)$ dues aux collisions. Les collisions peuvent, à cet effet, être caractérisées par une probabilité ne dépendant que des variables ξ_i et de leurs variations $\Delta\xi_i$. Désignons par $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi) \prod_i d\,\Delta\xi_i$ la probabilité pour que, durant l'intervalle de temps Δt, les variables dynamiques ξ_i, par suite des collisions, aient des variations se trouvant entre $\Delta\xi_i$ et $\Delta\xi_i + d\,\Delta\xi_i$. Les grandeurs $\Delta\xi_i$ sont supposées petites par rapport à ξ_i, et la grandeur Δt petite par rapport à l'intervalle de temps entre deux collisions successives et grande par rapport à la durée d'une collision. On suppose que la probabilité $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$ satisfait à la condition de normalisation suivante

$$\int w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi) \prod_i d\Delta\xi_i = 1. \tag{1.4.1}$$

En vertu du sens attribué à la probabilité $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$, la fonction de distribution $f(\xi, t+\Delta t)$, à l'instant $t+\Delta t$, est liée à la fonction de distribution $f(\xi, t)$ à l'instant t, par l'équation:

$$f(\xi, t+\Delta t) = \int w_{\Delta t}(\xi-\Delta\xi, \Delta\xi)\, f(\xi-\Delta\xi, t) \prod_i d\Delta\xi_i. \tag{1.4.2}$$

Nous allons supposer que les variables dynamiques n'ont que de petites variations durant le processus des collisions. Pour que cette hypothèse soit vraie il faut supposer que la fonction $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$ augmente rapidement pour $\Delta\xi \to 0$. Dans ce cas, on peut développer la fonction $f(\xi - \Delta\xi, t)\, w_{\Delta t}(\xi - \Delta\xi, \Delta\xi)$ en série suivant les puissances de $\Delta\xi$ figurant dans le premier argument et écrire (1.4.2) comme suit

$$\begin{aligned} f(\xi, t+\Delta t) = f(\xi, t) + \int \Big\{ -\Delta\xi_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}\big(f(\xi, t)\, w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)\big) + \\ + \frac{1}{2}\Delta\xi_j\Delta\xi_k \frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}\big(f(\xi, t)\, w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)\big) - \\ - \frac{1}{6}\Delta\xi_j\Delta\xi_k\Delta\xi_l \left(\frac{\partial^3 f(\eta, t)\, w_{\Delta t}(\eta, \Delta\xi)}{\partial\eta_j\,\partial\eta_k\,\partial\eta_l}\right)_{\eta=\xi+\theta\Delta\xi} \Big\} \prod_i d\Delta\xi_i, \end{aligned}$$

où $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (nous avons ici utilisé la condition de normalisation (1.4.1)). En introduisant les moments de la probabilité $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$

$$\langle \Delta\xi_i \ldots \Delta\xi_s \rangle_{\Delta t} = \int w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)\, \Delta\xi_i \ldots \Delta\xi_s \prod_j d\Delta\xi_j$$

et en supposant finies les limites

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta\xi_i \rangle_{\Delta t}}{\Delta t} = A_i(\xi), \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta\xi_i \Delta\xi_k \rangle_{\Delta t}}{\Delta t} = B_{ik}(\xi) \qquad (1.4.3)$$

et que pour i, k, l quelconques

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta\xi_i \Delta\xi_k \Delta\xi_l \rangle_{\Delta t}}{\Delta t} = 0$$

on obtient finalement l'équation suivante pour la fonction de distribution $f(\xi, t) \equiv f$ [78, 118, 64]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}(A_i(\xi) f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k}(B_{ik}(\xi) f). \qquad (1.4.4)$$

Cette équation, à la différence de l'équation cinétique intégrale (1.3.9), est différentielle et s'appelle *équation de Fokker-Planck*. Cette équation est vraie lorsque les variables dynamiques caractérisant la particule varient lentement lors de la diffusion des particules, quant à la diffusion par elle-même, elle a lieu sur des objets externes dont l'état est donné.

Tout comme dans (1.3.8), l'intégrale des collisions $L(\xi; f)$ a la forme d'une divergence dans l'espace des variables dynamiques d'un certain vecteur appelé courant des collisions $\mathcal{J}_i$:

$$L(\xi; f) = -\frac{\partial \mathcal{J}_i(\xi)}{\partial \xi_i}, \quad \mathcal{J}_i(\xi) = A_i(\xi) f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_k}(B_{ik}(\xi) f), \quad (1.4.5)$$

mais le courant a la forme d'un opérateur différentiel et non d'un opérateur intégral, appliqué à la fonction de distribution.

Il est facile de voir que si la probabilité $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$ a une distribution normale de Gauss, soit

$$w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi) = \\ = (\det B)^{-1/2} (2\pi \Delta t)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{(\Delta\xi_i - A_i \Delta t)\, B_{ik}^{-1} (\Delta\xi_k - A_k \Delta t)}{2\Delta t} \right\}, \quad (1.4.6)$$

où B_{ik} est une matrice définie positive, $\det B$ son déterminant, n le nombre de variables ξ_i, les formules (1.4.3) sont vérifiées. De plus si $w_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$ est une distribution de Gauss, non seulement le moment trois mais également tous les moments suivants $\langle \Delta\xi_i \Delta\xi_k \ldots \Delta\xi_s \rangle_{\Delta t}$ tendent vers zéro pour $\Delta t \to 0$ plus rapidement que Δt, c'est-à-dire que dans ce cas l'équation de Fokker-Planck sera vérifiée. Remarquons que l'assertion inverse est également

vraie, à savoir, si l'équation de Fokker-Planck a la forme (1.4.4), la probabilité $w_{\Delta t}$ (ξ, $\Delta\xi$) au voisinage de chaque point de l'espace ξ est déterminée par la distribution locale de Gauss (1.4.6) de paramètres B_{ik} et A_i dépendant de ξ *).

1.4.2. Théorie du mouvement brownien. L'équation différentielle de Fokker-Planck peut également être obtenue d'une autre manière à partir des équations différentielles pour les grandeurs physiques ε_i en présence de forces aléatoires.

Nous allons supposer que la variation dans le temps des grandeurs ξ_i est donnée par les équations différentielles

$$\dot{\xi}_i = -a_{ik}\xi_k + \tilde{Y}_i(t;\,\omega), \quad \tilde{Y}_i(t;\,\omega) = K_i + Y_i(t;\,\omega), \quad (1.4.7)$$

où a_{ik}, K_i sont des constantes, et Y (t; ω) les forces dites aléatoires, dépendant tant du temps que des paramètres aléatoires ω (les grandeurs aléatoires Y_i dépendent du temps et sont donc également un processus aléatoire). Nous allons montrer comment, à partir de ces équations (qui sont appelées *équations de Langevin*) on peut trouver la fonction de distribution f (ξ, t) pour les grandeurs ξ. Supposons que pour $t = 0$ les grandeurs ξ soient égales à ξ (0); on peut alors, à partir des équations (1.4.7), trouver les valeurs des grandeurs $\xi = \xi$ (t, ξ (0); ω) à l'instant t pour des valeurs données des paramètres aléatoires ω:

$$\xi(t,\,\xi(0);\,\omega) = e^{-at}\xi(0) + \int_0^t d\tau e^{-a(t-\tau)}\tilde{Y}(\tau;\,\omega), \quad (1.4.8)$$

où $a \equiv \| a_{ik} \|$ est la matrice formée par les grandeurs a_{ik} (elle agit sur les vecteurs ξ (0) et $\tilde{Y}$ (τ, ω)). La fonction de distribution des grandeurs ξ à l'instant t, pour des valeurs données des grandeurs ξ (0) et des paramètres ω, conformément aux résultats du paragraphe 2.1.2, est une fonction delta multidimensionnelle, soit

$$f(\xi;\,t;\,\xi(0),\,\omega) = \delta(\xi - \xi(t,\,\xi(0);\,\omega)) \equiv \prod_i \delta(\xi_i - \xi_i(t,\,\xi(0);\,\omega)).$$

Si la distribution de la grandeur ξ à l'instant initial a pour densité de probabilité f (ξ (0), 0) et si les paramètres ω ne sont pas donnés, la fonction de distribution des grandeurs ξ à l'instant t est

$$f(\xi,\,t) = \int d\xi(0)\, f(\xi(0),\,0) \langle \delta(\xi - \xi(t,\,\xi(0);\,\omega))\rangle, \quad (1.4.9)$$

où les crochets $\langle \ldots \rangle$ indiquent le moyennage sur le paramètre ω. En utilisant la relation $\delta(\xi) = (2\pi)^{-n} \int dq \exp[iq\xi]$ (n étant le

*) Dans [118], [64] on peut trouver un exposé plus détaillé de cette méthode.

nombre de variables ξ), on peut, compte tenu de (1.4.8), écrire $\langle\delta(\xi - \xi(t, \xi(0); \omega))\rangle$ comme suit

$$\langle\delta(\xi-\xi(t,\xi(0);\omega))\rangle=(2\pi)^{-n}\int dqG(q,t)\exp[iq(\xi-e^{-at}\xi(0))].$$

où

$$G(q,t)=\left\langle\exp\left\{-iq\int_0^t d\tau e^{-a(t-\tau)}\tilde{Y}(\tau;\omega)\right\}\right\rangle. \quad (1.4.10)$$

En développant la fonction de distribution $f(\xi, t)$ en intégrale de Fourier

$$f(\xi,t)=(2\pi)^{-n}\int dqe^{iq\xi}f(q,t) \quad (1.4.11)$$

on trouve, en vertu de (1.4.9),

$$f(q,t)=G(q,t)f(e^{-\tilde{a}t}q,0), \quad (1.4.12)$$

où $\tilde{a}$ est la matrice transposée de a.

Pour trouver l'équation de Fokker-Planck, nous allons supposer que le processus aléatoire $Y_i(t;\omega)$ est un processus stationnaire de Gauss. Ceci signifie, qu'on a les relations

$$\langle Y_{i_1}(t_1;\omega)\ldots Y_{i_{2n+1}}(t_{2n+1};\omega)\rangle=0, \quad (1.4.13)$$

$$\langle Y_{i_1}(t_1;\omega)\ldots Y_{i_{2n}}(t_{2n};\omega)\rangle=$$
$$=\sum g_{i_1i_2}(t_1-t_2)\ldots g_{i_{2n-1}i_{2n}}(t_{2n-1}-t_{2n}),$$

où $g_{i_1i_2}(t_1 - t_2)$ est une fonction de la différence t_1 et t_2, la somme étant prise sur toutes les paires possibles des grandeurs i_1, t_1; i_2, t_2; . . .; i_{2n}, t_{2n} (le nombre de combinaisons possibles est de toute évidence égal à $(2n-1)!!=2n!/n!2^n$). Les fonctions $g_{i_1i_2}(t_1-t_2)$ diffèrent de zéro sur un certain intervalle $t_1 - t_2$, à savoir $|t_1 - t_2| \leqslant \tau_0$ où la grandeur τ_0 caractérise la mémoire du processus aléatoire $Y_i(t;\omega)$. Pour plus de simplicité nous allons supposer que $\tau_0 = 0$, de sorte que

$$g_{i_1i_2}(t_1-t_2)=C_{i_1i_2}\delta(t_1-t_2),$$

où $C_{i_1i_2}$ sont des constantes. En introduisant la désignation suivante

$$M(q,t)=\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2 qe^{-at_1}g(t_1-t_2)e^{-\tilde{a}t_2}q\equiv$$
$$\equiv\int_0^t dt_1 qe^{-at_1}Ce^{-\tilde{a}t_1}q \quad (1.4.14)$$

(on utilise la forme matricielle), on trouve en vertu de (1.4.10), (1.4.13)

$$G(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{(2n)!}{n!\,2^n}(-i)^{2n}M^n(q,t)\exp\left\{-iq\int_0^t d\tau e^{-a\tau}K\right\}$$

ou

$$G(q,t)=\exp\left\{-iq\int_0^t d\tau e^{-a\tau}K-\frac{1}{2}M(q,t)\right\}. \qquad (1.4.15)$$

Il est facile de voir que $G(q, t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial G(q,t)}{\partial t}+qa\frac{\partial G(q,t)}{\partial q}+iKqG(q,t)=-\frac{1}{2}qCqG(q,t)$$

et à la condition initiale

$$G(q,0)=1.$$

Notons qu'on a la formule

$$\frac{\partial}{\partial t}f(e^{-\tilde{a}t}q,0)+qa\frac{\partial}{\partial q}f(e^{-\tilde{a}t}q,0)=0.$$

En vertu de (1.4.12) la fonction $f(q, t)$ satisfait à une équation analogue à celle de $G(q, t)$. En passant des variables q aux variables ξ on obtient donc

$$\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial t}+K\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{a\xi f(\xi,t)+\frac{1}{2}C\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial\xi}\right\}. \qquad (1.4.16)$$

Notons qu'on aurait obtenu la même équation pour $\tau_0\neq 0$, il suffit que soit vérifiée l'inégalité $\tau_0\ll\bar{a}^{-1}$ où $\bar{a}$ donne l'ordre de grandeur des éléments matriciels a_{ik}. La grandeur $\bar{a}^{-1}$ donne, comme on peut le voir à partir de (1.4.16), le temps durant lequel la fonction $f(\xi, t)$ varie notablement.

Nous avons ainsi obtenu l'équation de Fokker-Planck dans laquelle cependant les grandeurs A et B ne dépendent pas de ξ. (L'équation générale de Fokker-Planck correspond à l'équation de Langevin (1.4.7) dans laquelle les grandeurs a_{ij} et K_i dépendent de ξ_i.) Nous allons maintenant exposer la théorie du mouvement brownien en nous basant sur cette équation.

L'équation initiale est celle du mouvement brownien d'une particule, à savoir

$$\dot{\boldsymbol{v}}=-\gamma\boldsymbol{v}+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{Y},\quad \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}, \qquad (1.4.17)$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{v}$ sont la coordonnée et la vitesse de la particule, $\boldsymbol{K}$ une force extérieure déterministe (par exemple, la force de pesanteur), $\boldsymbol{Y}$ une force aléatoire, et γ le coefficient de frottement. Pour une particule brownienne sphéroïdale de rayon a et de masse m la grandeur γ est

donnée par la formule de Stokes $\gamma = 6\pi a\eta/m$, où η est le coefficient de viscosité du milieu.

Notons que les équations de Langevin (1.4.17) correspondent à la méthode semi-phénoménologique où l'action du milieu est divisée en deux: d'un côté, le frottement hydrodynamique décrit par le terme $-\gamma v$ et de l'autre, les chocs aléatoires se déroulant à une fréquence élevée décrits par la force aléatoire Y. Il y a lieu de procéder à une telle distinction car la fréquence de chocs est supérieure au coefficient de frottement. Il est naturel de supposer que la force Y décrivant les chocs aléatoires est un processus gaussien stationnaire (1.4.13).

En vertu de (1.4.17), les grandeurs ξ_l dans (1.4.7) désignent maintenant le rayon vecteur et la vitesse de la particule brownienne $\xi \equiv (x, v)$, les éléments de la matrice a sont donc

$$a_{v_i v_k} = \gamma\delta_{ik}, \quad a_{x_i v_k} = -\delta_{ik}, \quad a_{x_i x_k} = a_{v_i x_k} = 0. \qquad (1.4.18)$$

Les vecteurs de la force aléatoire Y_i et de la force déterministe K_i ont maintenant pour composantes

$$Y_{v_i} = Y_i, \quad Y_{x_i} = 0, \quad K_{v_i} = K_i, \quad K_{x_i} = 0.$$

Enfin les grandeurs C_{ik} sont

$$C_{v_i v_k} = C\delta_{ik}, \quad C_{x_i x_k} = C_{v_i x_k} = C_{x_i v_k} = 0.$$

(La matrice $C_{v_i v_k}$ est multiple de la matrice unitaire, vu l'isotropie du milieu.) C'est pourquoi l'équation de Fokker-Planck (1.4.16) pour la fonction de distribution $f(x, v, t)$ des particules browniennes, s'écrit alors [118]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + K\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\gamma v_i f + \frac{1}{2} C \frac{\partial f}{\partial v_i}\right). \qquad (1.4.19)$$

Dans cette équation la grandeur K (qui était supposée constante) peut être une fonction lentement variable de x.

Il est facile d'obtenir cette équation à partir de l'équation de Fokker-Planck généralisée (1.4.4). A cet effet il suffit de tenir compte de $\Delta x = v\,\Delta t$, donc

$$w_{\Delta t}(x, v; \Delta x, \Delta v) = \delta(\Delta x - v\,\Delta t)\, w_{\Delta t}(x, v; \Delta v).$$

En utilisant cette formule et la définition (1.4.4) des grandeurs A_l, B_{ik}, on obtient

$$A_{x_i}(\xi) = v_i, \quad B_{x_i v_k} = B_{v_i x_k} = B_{x_i x_k} = 0.$$

En supposant de plus que

$$A_{v_i}(\xi) = K_i(x) - \gamma v_i, \quad B_{v_i v_k} = C\delta_{ik},$$

on obtient l'équation (1.4.19).

Nous allons montrer maintenant que la grandeur C est donnée d'une manière univoque par la température du milieu. A cet effet à l'état d'équilibre la distribution des particules browniennes doit suivre la loi de Maxwell:

$$f_0(x, v) = Q \exp\left\{-\frac{1}{T}\left(\frac{mv^2}{2} + U(x)\right)\right\},$$

où T est la température du milieu, Q une constante donnant le nombre de particules browniennes et $mK = -\nabla U(x)$. En substituant cette expression dans (1.4.19), il est facile de voir que $C = 2\gamma T/m$ et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + K\frac{\partial f}{\partial v} = L(x, v; f), \tag{1.4.20}$$

où

$$L(x, v; f) = \gamma \frac{\partial}{\partial v_i}\left(v_i f + \frac{T}{m}\frac{\partial f}{\partial v_i}\right).$$

Nous allons maintenant trouver la fonction $G(q, t)$ dans le cas du mouvement brownien. En utilisant dans la transformation de Fourier (1.4.11) les désignations $\xi = (x, v)$, $q = (k, q)$, on obtient, en vertu de (1.4.14) et (1.4.15),

$$G(q, t) = \exp\left\{-i\int_0^t d\tau\, q(\tau) K - \gamma\frac{T}{m}\int_0^t d\tau\, q^2(\tau)\right\}, \tag{1.4.21}$$

où

$$q(\tau) = q e^{-\gamma\tau} + k\gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma\tau}).$$

Cette expression et les équations (1.4.11), (1.4.12) permettent de trouver la fonction de distribution $f(x, v, t)$ à un instant quelconque si l'on connaît la distribution initiale $f(x, v, 0)$.

Si, à l'instant initial, la distribution de particules browniennes était homogène dans l'espace et toutes les particules avaient la vitesse v_0, c'est-à-dire $f(x, v, 0) = n\delta(v - v_0)$, où n est la densité des particules browniennes, leur fonction de distribution à l'instant t sera alors, en vertu de (1.4.21), (1.4.12), [118]

$$f(x, v, t) = n\left(\frac{m}{2\pi T(1 - e^{-2\gamma t})}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m(v - e^{-\gamma t}v_0)^2}{2\tau(1 - e^{-2\gamma t})}\right\}$$

(on suppose que $K = 0$). On voit que, lorsque t augmente, la distribution $f(x, v, t)$ tend vers la loi de Maxwell, le temps de relaxation τ_r est de l'ordre de grandeur de l'inverse du coefficient de frottement $\tau_r \sim \gamma^{-1}$.

Nous allons de plus trouver le caractère des variations de la fonction de distribution des particules browniennes dans le cas

d'un espace non homogène pour $t \gg \tau_r$. Pour plus de simplicité on pose $K = 0$. L'intégrale $\int_0^t d\tau\, q^2(\tau)$ pour $t \gg \gamma^{-1}$ figurant dans l'expression (1.4.21) pour $G(q, t)$ est égale à

$$\int_0^t d\tau q^2(\tau) \xrightarrow[t \gg \gamma^{-1}]{} \frac{k^2}{\gamma^2} t + \frac{1}{2\gamma}\left(q^2 + \frac{2qk}{\gamma} - 3\frac{k^2}{\gamma^2}\right).$$

Donc

$$G(q, t) \xrightarrow[t \gg \gamma^{-1}]{} \exp\left\{-\frac{\gamma T}{m}\left[\frac{k^2}{\gamma^2} t + \frac{1}{2\gamma}\left(q^2 + \frac{2qk}{\gamma} - 3\frac{k^2}{\gamma^2}\right)\right]\right\} \equiv$$
$$\equiv G_\infty(q, t). \quad (1.4.22)$$

En vertu de (1.4.12), la fonction de distribution $f(\xi, t) \equiv f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ est liée à la fonction $G(\xi, t)$ par la relation

$$f(\xi, t) = \int d\xi_0 G(\xi - \xi(t, \xi_0), t) f(\xi_0, 0),$$

où

$$G(\xi, t) = (2\pi)^{-6} \int dq e^{iq\xi} G(q, t), \qquad \xi(t, \xi_0) = e^{-at}\xi_0.$$

Puis, en vertu de (1.4.17), (1.4.18), les composantes $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ du vecteur $\xi(t, \xi_0) \equiv (\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}(t))$ satisfont aux équations

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\gamma \boldsymbol{v}, \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{v}(t) = e^{-\gamma t}\boldsymbol{v}_0, \qquad \boldsymbol{x}(t) = -\gamma^{-1}e^{-\gamma t}\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{x}_0 + \gamma^{-1}\boldsymbol{v}_0.$$

Donc pour $t \gg \gamma^{-1}$ on a, en vertu de (1.4.22),

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) \xrightarrow[t \gg \gamma^{-1}]{} \int d^3x_0\, d^3v_0 G_\infty\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 - \frac{\boldsymbol{v}_0}{\gamma}, \boldsymbol{v}, t\right) f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}_0, 0) \equiv$$
$$\equiv f_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t), \quad (1.4.23)$$

où

$$G_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) = (2\pi)^{-6} \int d^3k\, d^3q e^{ik\boldsymbol{x} + iq\boldsymbol{v}} G_\infty(k, q, t).$$

Remarquant que

$$(2\pi)^{-3} \int d^3q e^{-aq^2} = (4\pi a)^{-3/2}, \qquad (1.4.24)$$

après des calculs simples on obtient

$$G_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) =$$
$$= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} \left(4\pi\left(t - \frac{2}{\gamma}\right)\mathscr{D}\right)^{-3/2} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{x} - \gamma^{-1}\boldsymbol{v})^2}{4\mathscr{D}(t - 2\gamma^{-1})}\right\}.$$
$$(1.4.25)$$

où

$$\mathcal{D} = T/m\gamma. \tag{1.4.26}$$

Nous allons maintenant montrer que la fonction de distribution $f_\infty(x, v, t)$ est une certaine fonctionnelle universelle de la densité des particules browniennes $n(x, t)$

$$f_\infty(x, v, t) = f(x, v; n(x', t)). \tag{1.4.27}$$

La densité des particules browniennes $n(x, t)$ pour $t \gg \gamma^{-1}$ est donnée par la formule

$$n(x, t) = \int d^3v\, f_\infty(x, v, t),$$

d'où en vertu de (1.4.23), (1.4.25)

$$n(x, t) = \int d^3x_0\, d^3v_0 f(x_0, v_0, 0) \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \left(4\pi\mathcal{D}\left(t - \frac{2}{\gamma}\right)\right)^{-3/2} \times$$
$$\times \int d^3v \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T} - \frac{(x - x_0 - \gamma'(v + v_0))^2}{4\mathcal{D}(t - 2\gamma^{-1})}\right\}.$$

En utilisant la formule (1.4.24), on obtient finalement

$$n(x, t) =$$
$$= \int d^3x_0\, d^3v_0 \frac{f(x_0, v_0, 0)}{\left(4\pi\mathcal{D}\left(t - \frac{3}{2\gamma}\right)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left(x - x_0 - \frac{v_0}{\gamma}\right)^2}{4\mathcal{D}\left(t - \frac{3}{2\gamma}\right)}\right\}. \tag{1.4.28}$$

Il est facile de voir que la densité des particules $n(x, t)$ satisfait à l'équation différentielle de diffusion

$$\partial n/\partial t = \mathcal{D}\,\Delta n, \tag{1.4.29}$$

et par conséquent $\mathcal{D}$ est le coefficient de diffusion des particules browniennes. (La formule (1.4.26) reliant le coefficient de diffusion $\mathcal{D}$ et le coefficient de frottement γ est dite *formule d'Einstein.*)

Compte tenu de la formule (1.4.25) et en utilisant (1.4.28), on peut écrire l'expression (1.4.23) pour $f_\infty(x, v, t)$, comme suit

$$f_\infty(x, v, t) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}}\, n\left(x - \frac{v}{\gamma},\ t - \frac{1}{2\gamma}\right). \tag{1.4.30}$$

On voit ainsi que la fonction de distribution des particules browniennes, à l'instant t, est déterminée par la densité des particules à l'instant $t - \frac{1}{2\gamma}$. Mais en vertu de l'équation de diffusion (1.4.29), la grandeur $n\left(x, t - \frac{1}{2\gamma}\right)$ peut s'exprimer en fonction de la densité

des particules browniennes $n(x, t)$ et de ses dérivées spatiales à l'instant t:

$$n\left(x,\ t-\frac{1}{2\gamma}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(-\frac{\mathscr{D}}{2\gamma}\Delta\right)^l n(x,\ t).$$

C'est pourquoi la fonction de distribution $f_\infty(x,\ v,\ t)$ est en fait une fonctionnelle de la densité des particules $n(x',\ t)$.

Ainsi, on voit que, pour $t \gg \gamma^{-1}$ la description de l'état des particules browniennes se simplifie, à savoir pour $t \gg \gamma^{-1}$ l'état des particules browniennes peut être caractérisé par la densité des particules $n(x,\ t)$, quant à la fonction de distribution, elle devient une fonctionnelle de la densité $n(x',\ t)$:

$$f(x,\ v,\ t)\xrightarrow[t\gg\gamma^{-1}]{} f(x,\ v;\ n(x';\ t)),$$

$$f(x,\ v;\ n(x',\ t))= \tag{1.4.31}$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(-\frac{\mathscr{D}}{2\gamma}\Delta\right)^l n\left(x-\frac{v}{\gamma},\ t\right),$$

la densité des particules $n(x,\ t)$ satisfait à l'équation de diffusion (1.4.29) et la mémoire de l'état initial $f(x_0,\ v_0,\ 0)$ ne se trouve contenue, comme on peut le voir à partir de la formule (1.4.28), que dans la densité des particules $n(x,\ t)$.

La simplification apparue dans la description de l'état des particules browniennes s'obtient à partir du schéma général exposé dans les paragraphes 1.2.1., 1.3.3. du passage de la description microscopique complète à la description cinétique et de la description cinétique à la description hydrodynamique. Plus bas nous verrons que cette simplification de la description de l'état du système dans le temps apparaît non seulement pour les systèmes classiques, mais également pour les systèmes quantiques et peut être le fondement de l'élaboration de la physique cinétique.

Notons que la grandeur $n\left(x-\frac{v}{\gamma},\ t\right)$ entrant dans la formule (1.4.31) peut être développée suivant les puissances de $\frac{v}{\gamma}$:

$$n\left(x-\frac{v}{\gamma},\ t\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)^s (v\nabla)^s n(x,\ t). \tag{1.4.32}$$

La fonctionnelle $f(x,\ v;\ n(x',\ t))$ s'écrira alors sous la forme d'un développement en série suivant les gradients de la fonction $n(x,\ t)$. Comme. en vertu de (1.4.26), on a $\mathscr{D}\gamma^{-1}\sim l^2$, $v\gamma^{-1}\sim l$ (l étant le libre parcours moyen de la particule brownienne), ce développement est, en fait, le développement en série suivant les

puissances de l/a_m, où la grandeur a_m caractérise les dimensions des hétérogénéités. Les deux premiers termes de ce développement sont:

$$f(x, v; n(x', t)) = f^{(0)} + f^{(1)} + \ldots$$

$$f^{(0)} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} n(x, t), \tag{1.4.33}$$

$$f^{(1)} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} \left(-\frac{1}{\gamma} v\nabla\right) n(x, t).$$

Il y a lieu de remarquer que la fonctionnelle (1.4.31) contient les corrections (à la distribution de Maxwell) d'ordre élevé que l'on veut, alors que l'équation de diffusion est une équation exacte et ne contient pas de termes correctifs liés aux dérivées spatiales d'ordre supérieur au second.

Pour conclure ce paragraphe considérons le mouvement brownien en présence d'un champ de forces extérieur faible. Tout comme en l'absence de forces extérieures, la fonction de distribution $f(x, v, t)$ sera pour $t \gg \gamma^{-1}$ une fonctionnelle seulement d'une variable hydrodynamique, à savoir de la densité des particules $n(x, t)$:

$$f(x, v, t) \xrightarrow[t \gg \gamma^{-1}]{} f(x, v; n(x', t)),$$

cette fonctionnelle satisfaisant à l'équation cinétique de Fokker-Planck (1.4.20). La densité des particules browniennes

$$n(x, t) = \int d^3v f(x, v; n(x', t)) \tag{1.4.34}$$

satisfait en vertu de (1.4.20) à l'équation suivante

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad j = \int d^3v v f(x, v; n(x', t)).$$

En développant f en série suivant les puissances du gradient de la densité:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \ldots$$

on obtient, en vertu de (1.4.20), les équations suivantes pour $f^{(0)}$, $f^{(1)}$:

$$L(x, v; f^{(0)}) = 0,$$

$$L(x, v; f^{(1)}) = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)} + v \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} + K \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v}, \tag{1.4.35}$$

où

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)} = -\operatorname{div} \int d^3v v f^{(0)}.$$

A partir de la formule (1.4.34), on obtient les conditions supplémentaires imposées à $f^{(0)}$, $f^{(1)}$

$$n=\int d^3vf^{(0)}, \quad \int d^3vf^{(1)}=0. \tag{1.4.36}$$

C'est pourquoi, à partir de l'équation (1.4.35), on trouve qu'en première approximation f est donné par

$$f^{(0)}=n(x, t)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right), \tag{1.4.37}$$

et par conséquent

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)}=0.$$

A partir de la seconde équation (1.4.35), compte tenu de (1.4.36), on obtient:

$$f^{(1)}=-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)\boldsymbol{v}\left(\nabla n-\frac{m}{T}\boldsymbol{K}n\right). \tag{1.4.38}$$

(Pour $\boldsymbol{K}=0$ les formules (1.4.37), (1.4.38) deviennent les formules (1.4.33).) Connaissant $f^{(1)}$, il est facile de trouver la densité du courant $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{j}=-\mathscr{D}\left(\nabla n-\frac{m}{T}\boldsymbol{K}n\right)$$

($\mathscr{D}$ étant donné par la formule (1.4.26)), par conséquent l'équation de diffusion en présence d'un champ de forces s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\operatorname{div}(\mathscr{D}\nabla n-\gamma^{-1}\boldsymbol{K}n). \tag{1.4.39}$$

(Cette équation est dite *équation de Smolukhovski.*) Ainsi en présence d'un champ de forces extérieur le courant a deux composantes: le courant de diffusion $\mathscr{D}\nabla n$ et le courant dû au champ de forces $\gamma^{-1}Kn$. Le courant total est de toute évidence nul si les particules sont réparties suivant la loi de Boltzmann.

1.4.3. Théorie du ralentissement des neutrons. Le ralentissement des neutrons dans les substances est un autre problème important où apparaît l'équation de Fokker-Planck. Si un neutron rapide se déplace dans une substance, par suite des collisions des neutrons avec les noyaux doués d'énergie thermique (on peut supposer que ces noyaux sont immobiles) le neutron se trouve ralenti. Lors de chaque collision du neutron avec le noyau, il perd en moyenne une énergie égale à $\frac{m}{M}\varepsilon$, où m et ε sont la masse et l'énergie du neutron et M la masse du noyau de la substance.

Pour décrire le processus de ralentissement il y a lieu d'introduire la fonction de distribution des neutrons $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)\equiv f_p(\boldsymbol{x}, t)$ sur

les impulsions p et les coordonnées x et d'établir l'équation cinétique pour cette fonction. Si, pour plus de simplicité, on ne tient pas compte de la capture des neutrons par les noyaux de la substance, l'équation cinétique s'écrit comme suit [5]:

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+v\frac{\partial f_p}{\partial x}=\int d^3p\left\{w(p,\ p')\,\delta\left(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}+\frac{(p-p')^2}{2M}\right)f_{p'}-\right.$$
$$\left.-w(p'\ p)\,\delta\left(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-\frac{(p-p')^2}{2M}\right)f_p\right\}\equiv L(x,\ p;\ f),\quad (1.4.40)$$

où $\varepsilon_p=p^2/2m$, $v=p/m$ et $w(p',\ p)\,\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'}-(p-p')^2/2M)dp'$ est la probabilité rapportée à l'unité de temps de passage du neutron de l'état d'impulsion p à l'état d'impulsion p' se trouvant dans l'intervalle p', $p'+dp'$ (comme lors de ce passage le noyau initialement au repos acquiert l'impulsion $p-p'$, dans la fonction δ on voit apparaître l'énergie de report du noyau $(p-p')^2/2M$). Le premier terme dans l'intégrale des collisions donne la variation de la fonction de distribution des neutrons due au passage des neutrons de l'état p' à l'état p par suite des collisions, et le second terme détermine la variation de la fonction de distribution due au passage des neutrons de l'état p à l'état p' par suite également des collisions avec les noyaux au repos. Il est évident que la fonction $w(p,\ p')$ donnant la probabilité est proportionnelle à la densité des noyaux. Notons que si l'on avait tenu compte du mouvement des noyaux et à cet effet introduit la fonction de distribution des noyaux $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ sur les impulsions $\mathcal{P}$, dans l'intégrale des collisions on aurait de toute évidence

$$w(p,\ \mathcal{P};\ p',\ \mathcal{P}')\,(f_{p'}\mathcal{F}(\mathcal{P})-f_p\mathcal{F}(\mathcal{P}')),$$

où $w(p,\ \mathcal{P};\ p',\ \mathcal{P}')$ est la probabilité rapportée à l'unité de temps de transition du neutron de l'état d'impulsions p et $\mathcal{P}$ dans l'état d'impulsions p' et $\mathcal{P}'$. En posant $\mathcal{F}(\mathcal{P})=n\delta(\mathcal{P})$ dans cette intégrale des collisions, on arrive de nouveau à l'intégrale des collisions $L(x;\ p;\ f)$ où, vu le report du noyau, la fonction $w(p,\ p')$ n'est pas symétrique par rapport à la permutation de p et p'.

Notons que s'il était nécessaire de tenir compte de la capture des neutrons, il faudrait ajouter à L le terme $-\tau_c^{-1}f_p$ où τ_c est la durée de vie du neutron par rapport à la capture (cette grandeur est une fonction de l'énergie du neutron).

Nous allons envisager ici le cas d'un ralentisseur lourd, lorsque $M\gg m$. Le ralentissement sera alors lent car lors de chaque collision du neutron avec le noyau le neutron perdra une quantité insignifiante d'énergie. Nous allons montrer que dans ce cas le ralentissement sera décrit par une équation du type de l'équation de Fokker-Planck.

Si $M \gg m$, les fonctions $w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ et $\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2/2M)$ peuvent être développées en série suivant les puissances de M^{-1}:

$$w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = w_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') + w_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') + \ldots,$$

$$\delta\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} + \frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2}{2M}\right) = \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) + \frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2}{2M}\delta'(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) + \ldots,$$

l'intégrale des collisions s'écrit alors:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) = L^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) + L^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) + \ldots,$$

où

$$L^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) = \int d^3p' w_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\,\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})(f_{p'} - f_p), \tag{1.4.41}$$

$$L^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) = \int d^3p'\delta(\varepsilon_p + \varepsilon_{p'})\{w_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')f_{p'} - w_1(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p})f_p\} + \\ + \int d^3p'\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2}{2M}\{w_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')f_{p'} + w_0(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p})f_p\}\,\delta'(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}).$$

L'intégrale exacte des collisions (1.4.40) satisfait de toute évidence à la condition $\int d^3pL(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) = 0$ et l'intégrale des collisions $L^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f)$ à la condition

$$\int dO_pL^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f) = 0, \tag{1.4.42}$$

où dO_p est l'élément de l'angle solide du vecteur $\boldsymbol{p}$.

Comme $|L^{(1)}| \ll |L^{(0)}|$ la grandeur

$$n(\boldsymbol{x}, \varepsilon; t) = \int \frac{dO_p}{4\pi} f_p(\boldsymbol{x}, t), \qquad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

variera lentement dans le temps. Elle donne la distribution des neutrons suivant les énergies.

Après un intervalle de temps long par rapport au temps τ_e entre deux collisions successives du neutron avec les noyaux f_p deviendra une certaine fonctionnelle de $n(\boldsymbol{x}, \varepsilon; t)$:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \xrightarrow[t \gg \tau_e]{} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; n(\boldsymbol{x}', \varepsilon'; t)) \equiv f_p(\boldsymbol{x}; n),$$

cette fonctionnelle devant satisfaire à la relation

$$\int \frac{dO_p}{4\pi} f_p(\boldsymbol{x}; n) = n(\boldsymbol{x}, \varepsilon; t). \tag{1.4.43}$$

En intégrant l'équation cinétique (1.4.40) sur dO_p et compte tenu de (1.4.42), on obtient une équation temporelle pour $n(\boldsymbol{x}, \varepsilon; t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}\int \frac{dO_p}{4\pi} \boldsymbol{v} f_p(\boldsymbol{x}, n) = \int \frac{dO_p}{4\pi} L^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}; f(n)). \tag{1.4.44}$$

Supposons que les dimensions caractéristiques des hétérogénéités spatiales des fonctions de distribution des neutrons sont grandes par rapport à leur libre parcours moyen. On peut alors chercher la fonctionnelle $f(x, p; n(x', \varepsilon'; t))$ sous la forme d'un développement suivant les puissances de m/M et des gradients $\partial n/\partial x$

$$f(x, p; n) = n(x, \varepsilon; t) + f_p^{(1)}(x; n) + \ldots,$$

où $f^{(1)}$ peut contenir des termes proportionnels à m/M et $\partial n/\partial x$. En vertu de (1.4.43), on a

$$\int dO_p f_p^{(1)}(x; n) = 0. \qquad (1.4.45)$$

Conformément à (1.4.40), l'équation donnant $f^{(1)}$ est de la forme

$$\int d^3p' w_0(p, p')\,\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})(f_{p'}^{(1)} - f_p^{(1)}) + L^{(1)}(x, p; n) =$$
$$= \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)} + v\frac{\partial n}{\partial x}, \qquad (1.4.46)$$

où $(\partial n/\partial t)^{(1)}$ est la vitesse des variations de la fonction de distribution des neutrons par les énergies, calculée à l'approximation linéaire par rapport aux gradients de la fonction n et du paramètre m/M. Compte tenu de (1.4.44), on a

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)} = L^{(1)}(x, p; n).$$

C'est pourquoi l'équation (1.4.46) prend la forme

$$\int d^3p' w_0(p, p')\,\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})(f_{p'}^{(1)} - f_p^{(1)}) = v\,\partial n/\partial x.$$

D'où compte tenu de (1.4.45), on obtient:

$$f_p^{(1)}(x; n) = -\tau_e(\varepsilon)\, v\,\partial n/\partial x, \quad \varepsilon = \varepsilon_p, \qquad (1.4.47)$$

où

$$\tau_e^{-1}(\varepsilon) = \int d^3p' w_0(p, p')\,\delta(\varepsilon - \varepsilon')(1 - \cos\vartheta), \quad \varepsilon' = \varepsilon_{p'},$$

et ϑ l'angle des vecteurs p et p'. La grandeur $\tau_e(\varepsilon)$ donne le temps après lequel la distribution des neutrons peut être donnée par la fonction de distribution sur les énergies, τ_e est de l'ordre de grandeur de l'intervalle de temps entre deux collisions successives des neutrons avec les noyaux.

Ainsi, en vertu de (1.4.44), la fonction de distribution n des neutrons sur les énergies à l'approximation quadratique par rapport aux gradients de n et linéaire par rapport à m/M satisfait à l'équation

$$\partial n/\partial t - \mathcal{D}(\varepsilon)\,\Delta n = L^{(1)}(x, p; n),$$

où

$$\mathscr{D}(\varepsilon) = 1/3v^2\tau_e(\varepsilon). \tag{1.4.48}$$

Comme n n'est fonction que de l'énergie des neutrons, le premier terme dans la formule (1.4.41), lorsqu'on substitue f à n, s'annule (il ne faut pas oublier que $w_1(p, p')$ dépend de p^2, p'^2, pp'), on obtient ainsi l'équation suivante pour $L^{(1)}(x, p; n)$:

$$L^{(1)}(x, p; n) = \\ = \int d^3p' \frac{(p-p')^2}{2M} \{w_0(p, p')\, n(\varepsilon') - w_0(p', p)\, n(\varepsilon)\}\, \delta'(\varepsilon - \varepsilon').$$

Remarquant que

$$(n(\varepsilon') - n(\varepsilon))\, \delta'(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{\partial n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon'),$$

on a

$$L^{(1)}(x, p; n) = g(\varepsilon) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} + h(\varepsilon)\, n,$$

où

$$g(\varepsilon) = \int d^3p' \frac{(p-p')^2}{2M} w_0(p, p')\, \delta(\varepsilon - \varepsilon'), \tag{1.4.49}$$

$$h(\varepsilon) = \int d^3p' \{w_0(p, p') + w_0(p', p)\}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{(p-p')^2}{2M}.$$

La grandeur $h(\varepsilon)$ peut de toute évidence s'écrire

$$h(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int d^3p' \{w_0(p, p') + w_0(p', p)\} \frac{(p-p')^2}{2M}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon') - \\ - \int d^3p'\, \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ (w_0(p, p') + w_0(p', p)) \frac{(p-p')^2}{2M} \right\},$$

d'où en utilisant la formule donnant $g(\varepsilon)$ et en remarquant que $d^3p' = (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon'}\, d\varepsilon'\, dO_{p'}$, il est facile de montrer que

$$h(\varepsilon) = g'(\varepsilon) + (2\varepsilon)^{-1} g(\varepsilon).$$

La grandeur $L^{(1)}(x, p; n)$ s'écrit donc comme suit

$$L^{(1)}(x, p; n) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \sqrt{\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, n(\varepsilon) \right\}.$$

On obtient ainsi l'équation cinétique suivante pour la fonction de distribution des neutrons sur les énergies

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \mathscr{D}(\varepsilon)\, \Delta n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \sqrt{\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, n \right\}. \tag{1.4.50}$$

Compte tenu de (1.4.47), (1.4.49) il est facile de trouver la relation existant entre les grandeurs $g(\varepsilon)$ et $\tau_e(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon)=\frac{2m\varepsilon}{M}\tau_e^{-1}(\varepsilon). \tag{1.4.51}$$

En introduisant la fonction $n(\varepsilon)$ au lieu de $\nu(\varepsilon)$, soit

$$\nu(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\,g(\varepsilon)\,n(\varepsilon), \tag{1.4.52}$$

l'équation (1.4.50) s'écrit

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}-\mathscr{D}(\varepsilon)\,\Delta\nu=g(\varepsilon)\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon}.$$

De plus, si au lieu de ε on introduit la nouvelle variable indépendante τ:

$$\tau\equiv\tau(\varepsilon)=-\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}d\varepsilon'\,\frac{\mathscr{D}(\varepsilon')}{g(\varepsilon')}. \tag{1.4.53}$$

où ε_0 est une constante quelconque, on obtient finalement l'équation suivante pour la fonction $\nu=\nu(\boldsymbol{x},\tau;t)$:

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=\mathscr{D}(\tau)\left\{\Delta\nu-\frac{\partial\nu}{\partial t}\right\}. \tag{1.4.54}$$

La variable τ entrant dans cette équation peut, en vertu de (1.4.53), (1.4.48), s'écrire comme suit:

$$\tau(\varepsilon)=-\frac{1}{3}\frac{M}{m^2}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\tau_e^2(\varepsilon')\,d\varepsilon',$$

ou en introduisant le libre parcours moyen des neutrons $l(\varepsilon)=v\tau_e(\varepsilon)$

$$\tau(\varepsilon)=-\frac{1}{6}\frac{M}{m}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}d\varepsilon'\,\frac{l^2(\varepsilon')}{\varepsilon'}. \tag{1.4.55}$$

Lorsque le libre parcours moyen ne dépend pas de l'énergie, on a

$$\tau(\varepsilon)=\frac{1}{6}\frac{M}{m}l^2\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

L'équation (1.4.54) décrit le processus de ralentissement des neutrons dans le cas d'un ralentisseur lourd. C'est, comme on peut le voir, une équation du type de l'équation de Fokker-Planck.

L'équation cinétique (1.4.40) ne contient pas de terme tenant compte de la quantité de neutrons fournis par la source au ralentisseur. Si $q\,d^3x\,d^3p$ est le nombre de neutrons émis par la source par seconde dans l'élément de l'espace des phases $d^3x\,d^3p$ dans le membre

de droite de (1.4.50) il y a lieu d'ajouter le terme q. Dans l'équation (1.4.54) on voit apparaître un terme tenant compte de la présence des sources

$$\mathcal{L}^{-1}(\tau)\frac{\partial \nu}{\partial t}=\Delta\nu-\frac{\partial \nu}{\partial \tau}+S(\tau, x), \tag{1.4.56}$$

où

$$S(\tau, x)=-\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\partial \tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}\int \frac{dO_p}{4\pi}\,q=\frac{6m\varepsilon^{3/2}}{Ml^2(\varepsilon)}\int \frac{dO_p}{4\pi}\,q.$$

Dans le cas stationnaire, lorsque S ne dépend pas de t, cette équation s'écrit

$$\Delta\nu+S(\tau, x)=\partial\nu/\partial\tau. \tag{1.4.57}$$

Considérons le cas simple où, à l'origine des coordonnées, on a une source ponctuelle de neutrons émettant par seconde q_0 neutrons d'énergie ε_0:

$$q=q_0\delta(x)\,\delta(\varepsilon-\varepsilon_0)\,(4\pi(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2})^{-1}.$$

On a alors $S(\tau, x)=3\varepsilon q_0(4\pi M(2m)^{1/2}l^2(\varepsilon))^{-1}\,\delta(x)\,\delta(\varepsilon-\varepsilon_0)$. Dans ce cas la solution de l'équation (1.4.57) s'écrit

$$\nu=\frac{q_0}{2\pi}(8\pi m\tau)^{-3/2}\theta(\tau)\exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau}\right\}$$

(on a choisi τ de telle sorte que $\tau=0$ corresponde à l'énergie ε_0 du neutron quittant la source). Comme la fonction de distribution des neutrons $n(\varepsilon)$ est liée à ν par la relation (1.4.57) on a

$$n(x, \varepsilon)=\frac{q_0}{4\pi}\frac{M}{m}\frac{l(\varepsilon)}{v\varepsilon^{3/2}}(8\pi m\tau(\varepsilon))^{-3/2}\theta(\varepsilon_0-\varepsilon)\exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau(\varepsilon)}\right\}. \tag{1.4.58}$$

En intégrant cette expression sur x on obtient la distribution énergétique des neutrons $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon)=4\pi m(2m\varepsilon)^{1/2}\int d^3x\,n=q_0\frac{M}{2m}\frac{l(\varepsilon)}{v\varepsilon}\theta(\varepsilon_0-\varepsilon)$$

($N(\varepsilon)\,d\varepsilon$ est le nombre de neutrons dans l'intervalle énergétique $d\varepsilon$).

La formule (1.4.58) montre que la probabilité pour qu'un neutron d'énergie $\varepsilon=\varepsilon(\tau)$ se trouve à la distance r de la source est donnée par la distribution de Gauss. En vertu de (1.4.58), la distance quadratique moyenne $(\langle x^2\rangle)^{1/2}$ que le neutron doit parcourir pour être ralenti de l'énergie ε_0 à l'énergie ε, est égale à $(\langle x^2\rangle)^{1/2}=(6\tau(\varepsilon))^{-1/2}$. Ainsi la grandeur τ donne le carré moyen du parcours de ralentissement du neutron. Cette grandeur est appelée « âge » du neutron.

Nous allons nous arrêter maintenant sur la condition imposée pour l'application de l'approximation envisagée dite approximation de diffusion. Cette approximation est vraie, de toute évidence, dans le cas où la fonction de distribution $n(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ varie lentement à des distances de l'ordre du libre parcours moyen l, durant un intervalle de temps de l'ordre du temps de libre parcours moyen τ_c:

$$ln^{-1} \mid \nabla n \mid \ll 1, \quad \tau_c n^{-1} \mid \partial n/\partial t \mid \ll 1.$$

En appliquant le premier de ces critères à la solution (1.4.58), on obtient la condition $|\boldsymbol{x}| \ll \tau/l$. Cette condition signifie que l'approximation de diffusion est applicable à de grandes distances de la source. En vertu de (1.4.55), cette distance ne doit pas être supérieure à $M/ml \cdot \ln \varepsilon_0/\varepsilon$. Cette condition est liée à ce que, à de grandes distances, la distribution de Gauss se trouve remplacée par une distribution exponentielle de la forme $\exp\{-|\boldsymbol{x}|/l\}$. En effet, dans le domaine $|\boldsymbol{x}| > \tau l^{-1}$ l'expression (1.4.58) conduit à une densité de neutrons très faible, c'est pourquoi la densité des neutrons dans ce domaine sera déterminée par les neutrons qui y arriveront après un petit nombre de collisions, le nombre de ces neutrons étant proportionnel à $\exp\{-|\boldsymbol{x}|/l\}$. Il est évident qu'on ne peut pas utiliser l'approximation de diffusion au voisinage immédiat de la source, car pour que soit vraie la description simplifiée, le neutron doit subir plusieurs collisions.

§ 1.5. Mécanique statistique des systèmes de particules chargées

1.5.1. Equation cinétique pour les électrons du plasma. Les résultats obtenus au paragraphe 1.3.1 peuvent être utilisés dans le cas du plasma, qui est un gaz entièrement ou partiellement ionisé, mais en moyenne électriquement neutre. L'interaction électrostatique entre les particules joue un rôle essentiel dans le plasma non relativiste, entièrement ionisé. Cette interaction n'est cependant pas donnée par la loi de Coulomb ordinaire, mais par une loi de Coulomb tenant compte de l'effet d'écran dû à la présence des charges des deux signes. En vertu de cette loi, l'énergie potentielle de deux particules de charge e se trouvant à une distance r l'une de l'autre est égale à

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \exp\left\{-\frac{r}{r_D}\right\},$$

où $r_D = (T/8\pi ne^2)^{1/2}$ est le rayon d'écranisation ou rayon de Debye (T est la température et n la densité des particules du plasma).

Si l'énergie moyenne d'interaction entre deux particules du plasma $\overline{V} \sim e^2 n^{1/3}$ est petite par rapport à l'énergie cinétique, c'est-à-dire si $e^2 n^{1/3} \ll T$, pour la description des propriétés cinétiques

du plasma on peut utiliser l'équation (1.3.9). Pour expliquer la forme concrète de cette équation, dans le cas du plasma, nous n'allons pas tenir compte du mouvement des ions supposant, pour plus de simplicité, que le rôle de la composante lourde du plasma se réduit à la création d'un fond compensateur de charge positive. Nous n'allons donc considérer que la composante légère du plasma, à savoir les électrons, dont la fonction de distribution $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$ satisfait à l'équation (1.3.9) du champ self-consistent

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + eE\frac{\partial f}{\partial p} = L^{(2)}(x; f), \tag{1.5.1}$$

où E est le champ électrique agissant sur les électrons et $L^{(2)}$ l'intégrale des collisions donnée par la formule (1.3.8). Le champ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ est self-consistent. Le potentiel $\varphi \equiv e^{-1}U$, en vertu de (1.3.6), est donné par la fonction de distribution des électrons

$$\Delta\varphi = 4\pi e\left(\int d^3p f(x, p, t) - n\right) \tag{1.5.2}$$

(le dernier terme dans l'équation de Poisson est lié à la présence d'un fond de charges positives). L'équation cinétique (1.5.1) en l'absence de l'intégrale des collisions $L^{(2)}$ est appelée *équation cinétique de Vlassov* [40]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + eE\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{1.5.3}$$

Dans le cas général l'intégrale des collisions $L^{(2)}$ est de la forme (1.3.8). Dans le cas de l'interaction coulombienne, $V_q = 4\pi e^2/q^2$ et la constante C donnant $L^{(2)}$ diverge; cette divergence logarithmique apparaît tant à la limite supérieure qu'inférieure. La divergence à la limite supérieure est liée à ce que nous avons utilisé la théorie des perturbations qui n'est pas applicable ici, car à des distances petites (q grands) l'énergie potentielle d'interaction des particules n'est pas petite par rapport à l'énergie cinétique. Par contre, à la limite inférieure, c'est-à-dire lorsque les paramètres de visée sont grands (q petits) il faut tenir compte de l'écranisation de la charge conduisant à une diminution de l'énergie d'interaction des particules du plasma. Comme pour $q \ll r_D^{-1}$ l'interaction des particules n'est pas effective, la limite inférieure q_{min} dans l'intégrale donnant C est de l'ordre de grandeur de r_D^{-1}, $q_{min} \approx r_D^{-1}$; quant à la limite supérieure q_{max}, son ordre de grandeur est donné par la condition d'égalité des énergies cinétique et potentielle $T \approx e^2 q_{max}$, d'où $q_{max} \approx Te^{-2}$. C'est pourquoi en ordre de grandeur on a $C \approx \approx 2\pi m e^4 \ln T^{3/2}/e^3 n^{1/2}$. L'intégrale des collisions $L^{(2)}$ est appelée *intégrale des collisions de Landau* [72].

1.5.2. Théorie des écrans. Dans le paragraphe précédent nous avons expliqué comment on peut lever la divergence de l'intégrale des collisions de Landau à partir de l'effet d'écranisation. Nous allons maintenant donner la théorie rigoureuse de cet effet [20, 13, 77], pour plus de simplicité, nous allons supposer que les ions sont au repos et donnent seulement un fond de charge positive uniformément répartie. Nous supposerons que l'énergie moyenne d'interaction de deux électrons est petite par rapport à leur énergie thermique de sorte que $e^2n^{1/3}/T \ll 1$ ou $g = (nr_D^3)^{-1} \ll 1$. Nous allons partir de la chaîne d'équations intégrales (1.2.11). Cependant l'application directe de ces équations aux électrons du plasma conduit à des difficultés formelles dues à ce que les forces de Coulomb agissent à grande distance. Pour expliquer ces difficultés, nous allons revenir à l'équation (1.2.8) pour le noyau $\mathcal{K}_s(f)$. L'intégrale $\int dx_{s+1}\{V(x_i-x_{s+1}), f_{s+1}(f)\}$ figurant dans $\mathcal{K}_s$ est divergente, de toute évidence, dans le domaine des x_{s+1} grands car $V(x_i - x_{s+1}) = e^2/|x_i - x_{s+1}|$, et $f_{s+1}(x_1, \ldots, x_{s+1}; f)$ en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations pour $x_{s+1} \to \infty$ s'écrit

$$f_{s+1}(x_1, \ldots, x_{s+1}; f) \xrightarrow[x_{s+1}\to\infty]{} f_s(x_1, \ldots, x_s; f)\, f(x_{s+1})$$

($f(x_{s+1})$ pour des x_{s+1} grands ne dépend pas de x_{s+1}). En utilisant la dernière relation, on peut écrire l'expression de $\mathcal{K}_s(f)$ comme suit:

$$\mathcal{K}_s(f) = \Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s} U'(x_i; f), f_s(f)\Big\} + \{V^{(s)}, f_s(f)\} + \int dx_{s+1}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}(f) - f_s(f)\, f(x_{s+1})\Big\} - \int dx' \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x')} L(x'; f),$$

où

$$L(x_1; f) = \{U'(x_1; f), f(x_1)\} + \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(f) - f(x_1) f(x_2)\},$$

$$U'(x_1; f) = \int d^3x' V(x_1 - x') \int d^3p' f(x', p').$$

Les derniers termes dans les expressions de $\mathcal{K}_s(f)$ et de $L(f)$ convergent, par contre, les premiers termes sont divergents, vu la divergence de l'intégrale donnant $U'(x; f)$. Cependant cette divergence est purement formelle et peut être levée en tenant compte du fond compensant de la charge positive. En effet, grâce à ce fond dans le second membre de la chaîne d'équations différentielles (1.1.23) il est à introduire le terme

$$-n\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s} \int d^3x V(x - x_i), f_{s+1}(f)\Big\} \qquad s = 1, 2, \ldots$$

dû à l'interaction des électrons avec les ions à charge positive (N désignant leur nombre et $n = N/\mathcal{V}$ leur densité). Dans la chaîne d'équations (1.2.11) il faut remplacer $\mathcal{K}_s(f)$, $L(x; f)$ par les grandeurs

$$\mathcal{K}_s(f) = \Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s} U(x_i; f), f_{s+1}(f)\Big\} + \int dx_{s+1}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}(f) - f_s(f)\, f(x_{s+1})\Big\} - \int dx' \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x')} L(x'; f) + \{V^{(s)}, f_s(f)\}, \quad (1.5.4)$$

$$L(x_1; f) = \{U(x_1; f), f(x_1)\} + \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(f) - f(x_1) f(x_2)\},$$

où

$$U(x;\ f)=\int d^3x'V(x-x')\left[\int d^3p'f(x',\ p')-n\right], \qquad (1.5.5)$$

l'intégrale entrant dans cette expression étant divergente.

Il est facile de voir que le dernier terme dans l'expression de $\mathcal{K}_s(f)$ est proportionnel au paramètre petit g et peut être considéré comme une perturbation. En effet, au lieu de $x\equiv(x,\ p)$ on introduit les nouvelles variables indépendantes $\xi\equiv(\xi,\ \eta)$, $\xi=x/r_D$, $\eta=p/\bar{p}$ où $\bar{p}$ est la valeur caractéristique de l'impulsion de l'électron, $\bar{p}\sim(2mT)^{1/2}$. Les fonctions à particules multiples f_s étant pour $|x|\sim r_D$, $|p|\sim\bar{p}$, de l'ordre de grandeur $f_s\sim(n/\bar{p}^3)^s$, les fonctions

$$\tilde{f}_s(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_s;\ \tilde{f})\equiv(\bar{p}^3/n)^s f_s(x_1,\ \ldots,\ x_s;\ f)$$

seront pour $|\xi|\sim|\eta|\sim1$ de l'ordre de l'unité. Puis, en introduisant, au lieu de τ, la nouvelle variable d'intégration $\tilde{\tau}=\tau\bar{p}/mr_D$, on obtient la chaîne suivante d'équations intégrales pour la fonction $\tilde{f}_s$:

$$\tilde{f}_s(\tilde{f})=\prod_{1\leqslant i\leqslant s}\tilde{f}(\xi_i)+\int_{-\infty}^{0}d\tilde{\tau}S_0^{(s)}(\tau)\tilde{\mathcal{K}}_s(S_0^{(1)}(-\tau)\tilde{f}),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_s(\tilde{f})=\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\tilde{U}(\xi_i;\ \tilde{f}),\ \tilde{f}_s(\tilde{f})\Big\}-\int d^3\xi'\,\frac{\delta\tilde{f}_s(\tilde{f})}{\delta\tilde{f}(\xi')}\tilde{L}(\xi';\ \tilde{f})+$$

$$+\int d^3\xi_{s+1}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\tilde{V}(\xi_i-\xi_{s+1}),\ \tilde{f}_{s+1}(\tilde{f})-\tilde{f}_s(\tilde{f})\tilde{f}(\xi_{s+1})\Big\}+$$

$$+\frac{1}{nr_D^3}\{\tilde{V}^{(s)},\ \tilde{f}_s(\tilde{f})\},$$

où

$$\tilde{L}(\xi_1;\ \tilde{f})=\{\tilde{U}(\xi_1;\ \tilde{f}),\ \tilde{f}(\xi_1)\}+\int d^3\xi_2\{\tilde{V}(\xi_1-\xi_2),\ \tilde{f}_2(\tilde{f})-\tilde{f}(\xi_1)\tilde{f}(\xi_2)\},$$

$$\tilde{U}(\xi;\ \tilde{f})=\int d^3\xi'\tilde{V}(\xi-\xi')\left(\int d^3\eta'\tilde{f}(\xi',\ \eta')-1\right)$$

et $\tilde{V}(\xi)=|\xi|^{-1}$ (les crochets de Poisson sont calculés sur les variables ξ, η).

Vu la présence dans le dernier terme de $\tilde{\mathcal{K}}_s$ du facteur g on peut utiliser la théorie des perturbations en supposant que le crochet de Poisson $\{V^{(s)},\ f_s\}$ dans (1.5.4) est une grandeur petite. Le développement des fonctions de distribution à particules multiples en série suivant les puissances de g

$$f_s(f)=f_s^{(0)}(f)+f\quad(f)+\ \ldots$$

donne le développement de la fonctionnelle $L(x;\ f)$ suivant les puissances de g

$$L(x;\ f)=L^{(0)}(x;\ f)+L^{(1)}(x;\ f)+\ \ldots,$$

où

$$L^{(0)}(x_1;\ f)=\{U(x_1;\ f),\ f(x_1)\}+$$

$$+\int dx_2\{V(x_1-x_2),\ f_2^{(0)}(x_1,\ x_2;\ f)-f(x_1)f(x_2)\}, \qquad (1.5.6)$$

$$L^{(k)}(x_1;\ f)=\int dx_2\{V(x_1-x_2),\ f_2^{(k)}(f)\},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

A l'approximation zéro on a

$$f_s^{(0)}(f) = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} f(x_i) \tag{1.5.7}$$

et par conséquent

$$L^{(0)}(x;\, f) = \{U(x;\, f),\, f(x)\} = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}, \tag{1.5.8}$$

où $U(x; f)$ est le potentiel self-consistent (1.5.5) qui tient compte de l'action du fond de charges positives. Il est facile de voir que l'équation cinétique obtenue pour cette approximation coïncide avec l'équation de Vlassov.

Considérons ensuite la première approximation de la fonction f_s. Pour plus de simplicité nous allons nous limiter au cas homogène dans l'espace, lorsque $L^{(0)}(x; f) = 0$. Remarquons qu'en vertu de (1.5.6), (1.5.7) on a

$$\int dx' \frac{\delta f_s^{(0)}(f)}{\delta f(x')} L^{(1)}(x';\, f) =$$
$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant s} \int dx_{s+1} \Big\{V(x_i - x_{s+1}),\, f_2^{(1)}(x_i,\, x_{s+1};\, f) \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ j\neq i}} f(x_j)\Big\},$$

il vient donc conformément à (1.2.11), (1.5.4),

$$f_s^{(1)}(f) = \int_{-\infty}^{0} d\tau S_0^{(s)}(\tau)\, \mathcal{K}_s^{(1)}(f),$$

$$\mathcal{K}_s^{(1)}(f) = \sum_{1\leqslant i\leqslant s} \int dx_{s+1} \Big\{V(x_i - x_{s+1}),\, f_{s+1}^{(1)}(f) - f_s^{(1)}(f)\, f(x_{s+1}) -$$
$$- f_2^{(1)}(x_i,\, x_{s+1};\, f) \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant s\\ j\neq i}} f(x_j)\Big\} + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant s} \{V(x_i - x_j),\, f(x_i)\, f(x_j)\} \prod_{\substack{1\leqslant r\leqslant s\\ r\neq i,\, j}} f(x_r).$$

Cette chaîne infinie d'équations intégrales liées de la fonction $f_s^{(1)}$ admet, comme on peut facilement le vérifier, une solution exacte de la forme

$$f_s^{(1)}(f) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant s} g(x_i,\, x_j) \prod_{\substack{1\leqslant r\leqslant s\\ r\neq i,\, j}} f(x_r), \tag{1.5.9}$$

où $g(x_1, x_2)$ satisfait à l'équation intégrale suivante

$$g(x_1,\, x_2) = \int_{-\infty}^{0} d\tau S_0^{(2)}(\tau) \Big(\int dx_3 \{V(x_1 - x_3),\, f(x_1)\, g(x_2,\, x_3)\} +$$
$$+ \int dx_3 \{V(x_2 - x_3),\, f(x_2)\, g(x_1,\, x_3)\} + \{V(x_1 - x_2),\, f(x_1)\, f(x_2)\} \Big). \tag{1.5.10}$$

(Comme $f_2^{(1)} = g(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ coïncide avec la fonction de corrélation binaire définie par (1.1.11).) En vertu de l'équation (1.5.10) la fonction $g(x_1, x_2)$ ne dépend que de la différence des arguments spatiaux $g(x_1, x_2) = g(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, p_1, p_2)$.

En introduisant la désignation

$$G(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2,\, p_1,\, p_2) = \int dx_3 (\{V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3),\, f(x_1)\}\, g(x_2,\, x_3) +$$
$$+ \{V(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3),\, f(x_2)\}\, g(x_1,\, x_3)) + \{V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2),\, f(x_1)\, f(x_2)\},$$

on peut écrire comme suit l'équation (1.5.10)

$$g(x, p_1, p_2)=\int_{-\infty}^{0} d\tau G(x+\tau(v_1-v_2), p_1, p_2), \quad v_i=\frac{p_i}{m}. \tag{1.5.11}$$

Remarquant ensuite que

$$G(x, p_1, p_2)=\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial x}\int d^3x' V(x-x')h(-x', p_2)-$$
$$-\frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial x}\int d^3x' V(x-x')h(x', p_1)+$$
$$+\frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1}f(p_2)-\frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2}f(p_1)\right), \tag{1.5.12}$$

où

$$h(x, p)=\int d^3p' g(x, p, p'),$$

et en intégrant (1.5.11) sur p_2, on obtient l'équation intégrale suivante pour la fonction $h(x, p)$

$$h(x, p_1)=\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial x}\int d^3x'\int d^3p_2\int_{-\infty}^{0} d\tau V(x-x'+v_{12}\tau)h(-x', p_2)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\int d^3x'\int d^3p_2\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2}V(x-x'+v_{12}\tau)h(x', p_1)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\int d^3p_2\int_{-\infty}^{0} d\tau V(x+v_{12}\tau)\left(\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1}f(p_2)-\frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2}f(p_1)\right), \tag{1.5.13}$$

avec $v_{12}=v_1-v_2$. Il est évident qu'après avoir trouvé h à l'aide des formules (1.5.11) et (1.5.12), on peut restituer la fonction g. C'est pourquoi le problème revient à trouver la fonction h à partir de l'équation intégrale (1.5.13). A cet effet en introduisant les composantes de Fourier $h(x, p)$ et $V(x)$

$$h_k(p)\int d^3x e^{-ikx}h(x, p), \quad V_k=\int d^3x e^{-ikx}V(x),$$

on obtient l'équation intégrale suivante pour $h_k(p)$

$$h_k(p_1)=-\pi i\int d^3p_2 V_k^{\cdot}\delta_+(\varkappa v_{12})\left\{\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1\varkappa}}h_k^*(p_2)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial f(p_2)}{\partial p_{2\varkappa}}h_k(p_1)+\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1\varkappa}}f(p_2)-\frac{\partial f(p_2)}{\partial p_{2\varkappa}}f(p_1)\right\}, \tag{1.5.14}$$

où

$$\delta_+(x)=-\frac{1}{\pi i}\frac{1}{x+i0}=\delta(x)+\frac{i}{\pi}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \quad \varkappa=\frac{k}{|k|}, \quad p_\varkappa=p\varkappa.$$

En vertu de (1.5.6), (1.5.9) l'intégrale des collisions $L^{(1)}(x;\ f)$ peut s'écrire comme suit

$$L^{(1)}(x;\ f)=-\frac{\partial}{\partial p}\int d^3kV_k\boldsymbol{k}\,\mathrm{Im}\,h_k\,(p). \tag{1.5.15}$$

Dans le cas d'une interaction purement coulombienne, lorsque $V_k = 4\pi e^2/k^2$, cette expression s'écrit

$$L^{(1)}(x;\ f)=-4\pi e^2\frac{\partial}{\partial p}\int d^3k\,\frac{\boldsymbol{k}}{k^3}\,\mathrm{Im}\,h_k\,(p). \tag{1.5.16}$$

Remarquons maintenant que l'équation (1.5.14) contient, en fait, non pas la fonction h, mais son intégrale sur les composantes de l'impulsion $p_\perp$ perpendiculaires au vecteur $\varkappa$:

$$\widetilde{h}_k\,(p_\varkappa)=\int d^2p_\perp h_k\,(p).$$

C'est pourquoi, l'équation (1.5.14) peut s'écrire

$$\varepsilon\,(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_1)\,h_k\,(p_1)=-\pi iV_k\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{2\varkappa}\left\{\frac{\partial f\,(p_1)}{\partial p_{1\varkappa}}\,\widetilde{h}_k^*\,(p_{2\varkappa})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial f\,(p_1)}{\partial p_{1\varkappa}}\,\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{2\varkappa})-\frac{\partial\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{2\varkappa})}{\partial p_{2\varkappa}}\,f\,(p_1)\right\}\delta_+\,(\varkappa v_{12}), \tag{1.5.17}$$

où

$$\varepsilon\,(\boldsymbol{k},\,\omega)=1-\pi iV_k\int d^3p_2\delta_+\,(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{k}\,\frac{\partial f\,(p_2)}{\partial p_2}, \tag{1.5.18}$$

$$\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_\varkappa)=\int d^2p_\perp f\,(p).$$

En intégrant cette équation sur $p_{1\perp}$ on obtient l'équation intégrale suivante pour $\widetilde{h}_k\,(p_\varkappa)$:

$$\varepsilon\,(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_1)\widetilde{h}_k\,(p_{1\varkappa})=-\pi iV_k\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{2\varkappa}\left\{\frac{\partial\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}\,\widetilde{h}_k^*\,(p_{2\varkappa})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}\,\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{2\varkappa})-\frac{\partial\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{2\varkappa})}{\partial p_{2\varkappa}}\,\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{1\varkappa})\right\}\delta_+\,(\varkappa v_{12}). \tag{1.5.19}$$

Il est facile de montrer, à partir de la définition de $\delta_+\,(x)$ que le terme ne contenant pas $\widetilde{h}$ dans l'équation (1.5.19) est purement réel. C'est pourquoi on a

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon\,(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_1)\,\widetilde{h}_k\,(p_{1\varkappa})=-\pi V_k\,\frac{\partial\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{2\varkappa}\delta_+\,(\varkappa v_{12})\widetilde{h}_k^*\,(p_{2\varkappa}),$$

et comme

$$\mathrm{Im}\ \varepsilon\,(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_1)\,\mathrm{Re}\,\widetilde{h}_k\,(p_{1\varkappa})\equiv-\pi V_k\,\frac{\partial\widetilde{f}\,(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{2\varkappa}\,\mathrm{Re}\,\delta_+\,(\varkappa v_{12})\,\mathrm{Re}\,\widetilde{h}_k^*\,(p_{2\varkappa}),$$

on obtient l'équation suivante

$$\operatorname{Re}\varepsilon(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k v}_1)\operatorname{Im}\widetilde{h}_{\boldsymbol{k}}(p_{1\varkappa})=mV_{\boldsymbol{k}}\frac{\partial \widetilde{f}(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}dp_{2\varkappa}\frac{\operatorname{Im}\widetilde{h}_k(p_{2\varkappa})}{p_{2\varkappa}-p_{1\varkappa}}.$$

Cette équation homogène n'a qu'une seule solution triviale, à savoir

$$\operatorname{Im}\widetilde{h}_k(p_{1\varkappa})=0.$$

Ainsi la fonction $\widetilde{h}_k(p_\varkappa)$ est purement réelle. En éliminant des équations (1.5.17), (1.5.19) la grandeur $\int_{-\infty}^{\infty} dp_{2\varkappa}\delta_+(\varkappa v_{12})\widetilde{h}_{\boldsymbol{k}}(p_{2\varkappa})$ on obtient la relation suivante entre les fonctions h_k et $\widetilde{h}_k$:

$$h_k(\boldsymbol{p}_1)\frac{\partial\widetilde{f}(\varkappa;p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}-\widetilde{h}_k(p_{1\varkappa})\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1)}{\partial p_{1\varkappa}}=\frac{\pi i V_k}{\varepsilon(\boldsymbol{k},\boldsymbol{kv}_1)}\left\{f(\boldsymbol{p}_1)\frac{\partial\widetilde{f}(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}-\right.$$

$$\left.-\widetilde{f}(\varkappa;\ p_{1\varkappa})\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1)}{\partial p_{1\varkappa}}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}dp_{2\varkappa}\delta_+(\varkappa v_{12})\frac{\partial\widetilde{f}(\varkappa;\ p_{2\varkappa})}{\partial p_{2\varkappa}}=$$

$$=\frac{1-\varepsilon(\boldsymbol{k},\boldsymbol{kv}_1)}{\varepsilon(\boldsymbol{k},\boldsymbol{kv}_1)}\left\{f(\boldsymbol{p}_1)\frac{\partial\widetilde{f}(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}}-\widetilde{f}(\varkappa;\ p_{1\varkappa})\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1)}{\partial p_{1\varkappa}}\right\}. \qquad (1.5.20)$$

Remarquant maintenant que

$$\operatorname{Im}\varepsilon(\boldsymbol{k},\boldsymbol{kv}_1)=-\pi mV_k\frac{\partial\widetilde{f}(\varkappa;\ p_{1\varkappa})}{\partial p_{1\varkappa}},$$

et compte tenu de ce que la fonction $\widetilde{h}_k$ est réelle, on obtient à partir de (1.5.20)

$$\operatorname{Im}h_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{p}_1)=\frac{\pi V_k}{|\varepsilon(\boldsymbol{k},\boldsymbol{kv}_1)|^2}\int d^3p_2\delta(\varkappa v_{12})\varkappa\left\{f(\boldsymbol{p}_1)\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_2)}{\partial\boldsymbol{p}_2}-f(\boldsymbol{p}_2)\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1)}{\partial\boldsymbol{p}_1}\right\}.$$

En substituant cette expression dans (1.5.15), on déduit l'expression définitive pour l'intégrale des collisions, compte tenu de l'éffet d'écranisation :

$$L^{(1)}(x;\ f)=-\partial\mathscr{J}_i/\partial p_i, \qquad (1.5.21)$$

où

$$\mathscr{J}_i(p_1)=\pi\int d^3p_2Q_{ij}(\boldsymbol{p}_1;\ \boldsymbol{p}_2)\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_2)}{\partial p_{2j}}f(\boldsymbol{p}_1)-\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_1)}{\partial p_{1j}}f(\boldsymbol{p}_2)\right),$$

$$Q_{ij}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)=\int d^3k\delta(\boldsymbol{kv}_1-\boldsymbol{kv}_2)\frac{k_ik_j|V_k|^2}{|\varepsilon(\boldsymbol{k},\boldsymbol{kv}_1)|^2}.$$

En posant dans cette formule $\varepsilon = 1$ (ce qui correspond à la théorie des perturbations classique donnée dans 1.3.1), on tombe sur l'intégrale des collisions de Landau. L'expression (1.5.21) doit remplacer dans l'équation cinétique (1.5.1) avec le champ self-consistent l'intégrale des collisions de Landau.

Ainsi pour tenir compte de l'écranisation, il faut remplacer les composantes de Fourier de l'interaction coulombienne V_k par la grandeur $\widetilde{V}_k = V_k/\varepsilon(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{kv})$ où $\varepsilon(\boldsymbol{k},\ \omega)$ est donné par la formule (1.5.18). Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la grandeur $\varepsilon(\boldsymbol{k},\ \omega)$ est compte tenu de dispersion spatiale et temporelle la constante diélectrique du plasma.

A la différence de l'intégrale des collisions (1.3.8), l'intégrale des collisions (1.5.21), comme on peut facilement s'en convaincre, n'est pas divergente dans le domaine des petites impulsions transmises. C'est ce qui justifie la procédure utilisée dans 1.3.2 pour des distances de visée importantes. Notons cependant que l'intégrale (1.5.21) reste divergente dans le domaine des $|\boldsymbol{k}|$ grands, et pour lever cette divergence, il faut de nouveau utiliser la procédure donnée dans le paragraphe 1.3.2. Cette divergence est liée à ce que la théorie des perturbations exposée dans le présent paragraphe n'est pas applicable dans le domaine des paramètres de visée petits. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe 1.2.2, cette divergence n'apparaît pas lorsqu'on utilise un développement suivant les puissances de la densité.

Remarquons que l'expression (1.5.21) pour l'intégrale des collisions est vraie non seulement pour un plasma homogène, mais aussi pour un plasma hétérogène, autant que soient suffisamment petits les gradients de la fonction de distribution (dans notre démonstration nous avons omis, dans l'intégrale des collisions, les termes contenant les dérivées spatiales de la fonction de distribution).

Soulignons que l'équation cinétique (1.5.1) avec le champ self-consistent et l'intégrale des collisions généralisée (1.5.21) peut être utilisée si le paramètre $g = (nr_D^3)^{-1}$ du plasma est petit, de même que les effets de corrélation d'ordre élevé pour l'état initial du plasma (un tel plasma est dit calme).

1.5.3. Equation de dispersion pour les ondes dans un plasma. La présence d'un champ self-consistent donne lieu à l'apparition dans le plasma d'ondes électromagnétiques spécifiques. Pour en rendre compte nous allons nous référer à l'équation de Vlassov (1.5.3) et supposons que la fonction de distribution f des électrons diffère peu de la fonction f_0 à l'équilibre, $f = f_0 + \delta f$. Après la linéarisation par rapport à δf l'équation de Vlassov s'écrit

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{E} \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = 0,$$

où $\boldsymbol{E}$ est le champ électrique self-consistent. La solution formelle de cette équation avec la condition initiale $\delta f|_{t=-\infty} = 0$ s'écrit [11, 104, 65]:

$$\delta f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = -e \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} \int_{-\infty}^{t} d\tau \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x} - (t-\tau)\boldsymbol{v}, \tau). \quad (1.5.22)$$

Connaissant δf, on peut trouver la densité microscopique du courant électrique

$$j_i(\boldsymbol{x}, t) = e \int d^3p v_i \delta f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = \\ = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' \sigma_{il}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t') E_l(\boldsymbol{x}', t'),$$

avec $\sigma_{il}(\boldsymbol{x}, t) = -e^2 \int d^3p v_i \frac{\partial f_0}{\partial p_l} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t)$. En passant aux composantes de Fourier du champ électrique $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$ et de la densité

du courant électrique $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)$

$$\boldsymbol{E}(x, t) = \int d\omega d^3k e^{ikx - i\omega t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \boldsymbol{j}(x, t) = \int d\omega d^3k e^{ikx - i\omega t} j(\boldsymbol{k}, \omega),$$

on trouve

$$j_i(\boldsymbol{k}, \omega) = \sigma_{il}(\boldsymbol{k}, \omega) E_l(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{1.5.23}$$

où $\sigma_{il}(\boldsymbol{k}, \omega)$ est le tenseur de conductibilité donné par la formule

$$\sigma_{il}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\pi e^2 \int d^3p v_i \frac{\partial f_0}{\partial p_l} \delta_+(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}), \quad \delta_+(x) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{x + i0}.$$

Comme nous n'avons à notre disposition que le seul vecteur $\boldsymbol{k}$, il est commode de séparer dans le tenseur $\sigma_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega)$ les composantes longitudinale σ^l et transversale σ^t

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\boldsymbol{k}, \omega) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \sigma^t(\boldsymbol{k}, \omega),$$

$$\sigma^l(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{\pi e^2}{k^2} \int d^3p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2 \delta_+(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}), \tag{1.5.24}$$

$$\sigma^t(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{\pi e^2}{2k^2} \int d^3p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} [\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}]^2 \delta_+(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}), \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}.$$

Nous allons faire appel aux équations de Maxwell-Lorentz pour les composantes de Fourier du champ électrique $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$ et de l'induction magnétique $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega)$

$$\begin{gathered} i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega)] = -\frac{i\omega}{c} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega), \\ i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)] = \frac{i\omega}{c} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega). \end{gathered} \tag{1.5.25}$$

En substituant l'expression (1.5.23) pour la densité du courant, on trouve

$$\begin{aligned} i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}] &= -\frac{i\omega}{c} \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c} (\sigma^l \boldsymbol{E}^l + \sigma^t \boldsymbol{E}^t) = \\ &= -\frac{i\omega}{c} \left(1 + \frac{4\pi i \sigma^l}{\omega}\right) \boldsymbol{E} - \frac{4\pi}{c} (\sigma^t - \sigma^l) \frac{1}{k^2} [\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}]], \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

où $\boldsymbol{E}^l$ et $\boldsymbol{E}^t$ sont les composantes longitudinale et transversale du champ électrique

$$\boldsymbol{E}^l = \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} (\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{E}^t = -\frac{1}{k^2} [\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}]].$$

D'un autre côté les équations de Maxwell pour un milieu, écrites pour les composantes de Fourier, sont:

$$i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{H}] = -\frac{i\omega}{c} \boldsymbol{D}, \quad i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}] = \frac{i\omega}{c} \boldsymbol{B}, \tag{1.5.27}$$

avec $\boldsymbol{H}$ l'intensité du champ magnétique et $\boldsymbol{D}$ l'induction électrique. Pour un milieu isotrope

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega) = \mu(\boldsymbol{k}, \omega)\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega), \qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{1.5.28}$$

où ε et μ sont respectivement la constante diélectrique et la perméabilité magnétique. En comparant (1.5.26) et (1.5.27), on voit que

$$\begin{aligned} \varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) &= 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\, \sigma^l(\boldsymbol{k}, \omega), \\ \mu^{-1}(\boldsymbol{k}, \omega) &= 1 - \frac{4\pi i\omega}{c^2k^2}\, (\sigma^t(\boldsymbol{k}, \omega) - \sigma^l(\boldsymbol{k}, \omega)). \end{aligned} \tag{1.5.29}$$

En utilisant la formule (1.5.24) pour $\sigma^l(\boldsymbol{k}, \omega)$, on peut trouver la constante diélectrique du plasma:

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi^2 ie^2}{\omega k^2} \int d^3p\, \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, (\boldsymbol{kv})^2\, \delta_+(\omega - \boldsymbol{kv}) \tag{1.5.30}$$

ou

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi^2 ie^2}{k^2} \int d^3p\, \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, (\boldsymbol{kv})\, \delta_+(\omega - \boldsymbol{kv}).$$

Pour ce qui est de la perméabilité magnétique, dans le cas de plasma, elle est pratiquement égale à l'unité (le second terme dans l'expression de μ^{-1} contient en dénominateur une quantité grande, à savoir c^2).

Les formules (1.5.24), (1.5.30) se rapportent au cas où seule une composante du plasma est mobile, les électrons. Mais il est facile de généraliser ces formules et de prendre en considération le mouvement des ions du plasma. $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) - 1$, de même que $\sigma^l(\boldsymbol{k}, \omega)$ et $\sigma^t(\boldsymbol{k}, \omega)$ seront alors représentés comme une somme de grandeurs du type (1.5.24) pour différentes sortes de particules.

Pour que le système homogène (1.5.27), avec les conditions (1.5.28), admette une solution non triviale, il faut, de toute évidence, que soit vérifiée l'une des conditions

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 0 \tag{1.5.31}$$

ou

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) - \frac{k^2c^2}{\omega^2\mu(\boldsymbol{k}, \omega)} = 0. \tag{1.5.32}$$

Nous avons obtenu des équations reliant les pulsations ω aux vecteurs $\boldsymbol{k}$ des ondes pouvant se propager dans le plasma. Ces équations sont dites *équations de dispersion*. On voit aisément que l'équation de dispersion (1.5.31) correspond aux oscillations électromagnétiques longitudinales du plasma, et l'équation (1.5.32) aux oscillations transversales.

En supposant que la fonction de distribution à l'équilibre suit la loi de Maxwell

$$f_0 = \frac{n}{(2\pi mT)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{T}\right\},$$

où n est le nombre de particules, il est facile de voir que dans le cas limite des ondes longues, lorsque $kr_D \ll 1$, $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ est donné par la formule suivante

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}(1 + 3(kr_D)^2) + \\ + i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_0}(kr_D)^{-3} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{1}{k^2 r_D^2}\right\},$$

où ω_0 est la fréquence de Langmuir, $\omega_0 = (4\pi ne^2/m)^{1/2}$.

En égalant à zéro cette expression, on obtient:

$$\omega = \omega_0(1 + 3/2\,(kr_D)^2) - i\gamma_k, \tag{1.5.33}$$

où

$$\gamma_k = \frac{1}{2}\omega_0 \operatorname{Im} \varepsilon = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{\omega_0}{(kr_D)^3} \exp\left\{-\frac{1}{2k^2 r_D^2} - \frac{3}{2}\right\}.$$

Le fait que ω soit complexe avec $\operatorname{Im}\omega < 0$ signifie que les ondes transversales du plasma s'amortissent, leur coefficient d'amortissement étant égal à γ_k, et la fréquence à $\omega_l = \omega_0\left(1 + \frac{3}{2}k^2 r_D^2\right)$. On voit que les ondes longitudinales du plasma s'amortissent, même si les collisions entre les particules sont négligeables. Cet amortissement est appelé *amortissement de Landau*. Il est lié à l'interaction de résonance des particules et des ondes, où se trouve vérifiée la condition $\omega = kv$, ainsi qu'à ce que la fonction de distribution des particules décroît lorsque l'énergie augmente [75].

Pour les ondes transversales l'équation de dispersion (1.5.32) donne la relation suivante entre la fréquence ω_t et le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$:

$$\omega_t^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2. \tag{1.5.34}$$

Dans l'équation (1.5.1) nous avons omis l'intégrale des collisions, ce qui n'est possible que si la condition $\omega\tau_r \gg 1$, τ_r étant le temps de relaxation de la fonction de distribution des particules, est vérifiée.

§ 1.6. Irréversibilité des processus macroscopiques et hypothèse ergodique

1.6.1. Réversibilité des mouvements mécaniques et irréversibilité des processus macroscopiques. Les équations de la mécanique classique sont invariantes par rapport à l'inversion du temps. Par

conséquent si $X(t, x)$ est une solution des équations de Hamilton (tout comme dans le § 1.1 $x_i = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{p}_i)$, $X_i = (\boldsymbol{X}_i, \mathcal{P}_i)$, $X(0, x) = x$), $\tilde{X}(-t, \tilde{x})$ sera alors également une solution de ces équations, où $\tilde{x}_i = (\boldsymbol{x}_i, -\boldsymbol{p}_i)$, $\tilde{X}_i = (\boldsymbol{X}_i, -\mathcal{P}_i)$, de plus

$$\tilde{X}(-t, \tilde{x}) = X(t, x). \tag{1.6.1}$$

Cette relation montre que la trajectoire de phase correspondant au mouvement du système inversé dans le temps ($\tilde{X}(-t, \tilde{x})$) coïncide avec la trajectoire de phase du mouvement direct. (Notons que (1.6.1) découle de l'égalité $\mathcal{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{p})$.)

Cependant, malgré la réversibilité des mouvements mécaniques, les processus macroscopiques réels sont irréversibles, c'est-à-dire que pour eux, les deux sens du temps ne sont pas équivalents, bien que tous ces processus soient basés sur le mouvement des atomes et des molécules séparés. C'est pourquoi une contradiction semble exister entre la mécanique classique et la mécanique statistique. Mais cette contradiction n'est qu'apparente et peut être levée en tenant compte du fait que les systèmes macroscopiques sont formés par un grand nombre de particules. Pour comprendre ce qui se passe lorsque le nombre de particules du système augmente, nous allons préciser tout d'abord le caractère de la trajectoire de phase d'un système réalisant un mouvement fini.

Si le mouvement mécanique est borné, alors un certain intervalle de temps $T(x_0, \varepsilon)$, la trajectoire de phase $X(t, x_0)$ presque de tous les points x_0 se trouvera au voisinage de phase aussi petit que l'on veut du point initial x_0 avec un rayon égal à ε, puis elle quittera ce voisinage, avec $T(x_0, \varepsilon) \to \infty$ pour $\varepsilon \to 0$. (L'intervalle de temps $T(x_0, \varepsilon)$ est appelé période du *cycle de Poincaré*.) A partir de ce *théorème réciproque de Poincaré* dont nous ne donnerons pas la démonstration *) on voit que le mouvement fini d'un système mécanique compliqué est quasi périodique. La période du cycle de Poincaré $T(x_0, \varepsilon)$ dépend notablement du nombre de particules N du système et augmente rapidement avec N [118]. On peut étudier la dépendance de $T(x_0, \varepsilon) = T_N(x_0, \varepsilon)$ vis-à-vis de N pour $N \to \infty$ pour certains systèmes dynamiques simples, par exemple pour des systèmes d'oscillateurs liés. On voit que $T_N(x_0, \varepsilon)$ croît exponentiellement avec N [81].

Le fait que pour $N \to \infty$ la période du cycle $T_N(x_0, \varepsilon)$ tend vers l'infini permet d'expliquer la contradiction mentionnée entre la mécanique classique et la mécanique statistique. En effet, lorsqu'on passe à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $\mathcal{V} \to \infty$,

---

*) La démonstration du théorème n'est basée que sur le théorème de Liouville de conservation du volume de phase lorsque la transformation $x \to X(t, x$ a lieu [110], [118].

$N/\mathscr{V}$ = const) dans les fonctions de distribution à particules multiples (1.1.7) et dans les équations de mouvement correspondantes (1.1.23), les périodes des cycles de Poincaré seront infinies. C'est pourquoi dans ces systèmes macroscopiques limites le théorème réciproque de Poincaré ne se trouve pas en contradiction avec leur passage à l'état d'équilibre statistique, car la durée de cette transition est bien plus petite que $T_N(x_0, \varepsilon)$, même si l'on considère que le nombre de particules du système est fini et pas très grand.

Soulignons cependant qu'à la limite ($N \to \infty$), les équations (1.1.23), pour les fonctions de distribution à particules multiples resteront invariantes par rapport à la transformation $t \to -t$. En considérant les fonctions de distribution à particules multiples comme des fonctionnelles des fonctions de distribution à particules multiples initiales $f_s(x_1, \ldots, x_s, t) = f_s(x_1, \ldots, x_s, t; f_{s'}(x'_1, \ldots \ldots, x'_{s'}, 0))$, on a

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t; f_{s'}(x'_1, \ldots, x'_{s'}, 0)) = \\ = f_s(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s, -t; f_{s'}(\tilde{x}'_1, \ldots, \tilde{x}'_{s'}, 0)). \quad (1.6.2)$$

A cet effet, on peut se poser la question de savoir comment les équations décrivant les processus macroscopiques, par exemple les équations de diffusion et de conductibilité, les équations de l'hydrodynamique et même l'équation cinétique de Boltzmann deviennent non invariantes par rapport à l'inversion du temps. La réponse à cette question est la suivante: l'invariance des équations décrivant les processus macroscopiques par rapport à l'inversion du temps apparaît dans la théorie, lorsque l'on passe de la description complète, à l'aide des fonctions de distribution à particules multiples $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ à la description approchée à l'aide des fonctionnelles $f_s(x_1, \ldots, x_s; f(x', t)) \equiv f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(+)}(x', t))$ figurant dans le paragraphe 1.2.1:

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t; f_{s'}(x'_1, \ldots, x'_{s'}, 0)) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \\ \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(+)}(x', t)), \quad (1.6.3)$$

où la « mémoire » de l'état initial $f_{s'}(x'_1, \ldots, x'_{s'}, 0)$, dans les fonctions de distribution à particules multiples $f_s^{(+)}$, ne se conserve que par l'intermédiaire de la fonction de distribution à une particule

$$f^{(+)}(x, t) \equiv f^{(+)}(x, t; f_{s'}(x'_1, \ldots, x_{s'}, 0)).$$

En effet ces fonctionnelles, correspondant à la description abrégée de l'état du système, exprimée par la fonction de distribution à une particule, donnent une bonne approximation des fonctions exactes $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ pour $t \gg \tau_0$. Cependant ces fonctionnelles ne

conviennent pas du tout pour décrire l'état du système pour $t \ll -\tau_0$. En effet, en supposant que les fonctionnelles $f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(+)})$ peuvent être utilisées pour décrire l'état du système pour $t \gg \tau_0$, nous avons établi une équation pour la fonction de distribution à une particule, équation qui dans le plus simple des cas est l'équation de Boltzmann. Cependant, comme nous l'avons déjà noté au paragraphe 1.1.1, cette équation n'est pas applicable pour $t \gg -\tau_0$ car dans ce cas sa solution peut même être négative.

D'un autre côté, il est évident que, pour $t \ll -\tau_0$, la description de l'état du système se trouve simplifiée et pour le décrire, on

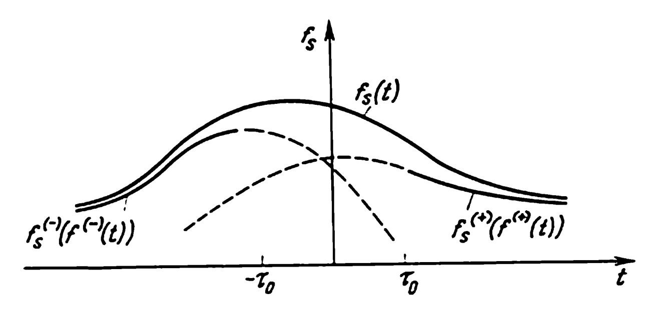


Fig. 1

peut utiliser les fonctionnelles $f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(-)}(x', t))$, qui donnent une bonne approximation des fonctions de distribution à particules multiples $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$, pour $t \ll -\tau_0$:

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t;\ f_{s'}(x_1', \ldots, x_{s'}', 0)) \xrightarrow[t \ll -\tau_0]{} \\ \xrightarrow[t \ll -\tau_0]{} f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s: f^{(-)}(x', t)). \quad (1.6.4)$$

La « mémoire » de l'état du système pour $t = 0$ se conserve alors par l'intermédiaire de la fonction de distribution à une particule $f^{(-)}(x, t)$ qui est une fonctionnelle de toutes les fonctions $f_{s'}(x_1', \ldots, x_{s'}', 0)$:

$$f^{(-)}(x, t) \equiv f^{(-)}(x, t;\ f_{s'}(x_1', \ldots, x_{s'}', 0)).$$

La fonction de distribution $f^{(-)}(x, t)$, comme on peut le voir, satisfait également à l'équation cinétique de Boltzmann, où, cependant, on a changé le signe devant l'intégrale des collisions. Il est donc naturel que les fonctionnelles $f_s^{(+)}$ qui donnent une bonne approximation des fonctions $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ pour $t \gg \tau_0$ ne soient pas utilisables pour $t \ll -\tau_0$ et inversement, les fonctionnelles $f_s^{(-)}$, donnant une bonne approximation des fonctions $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ pour $t \ll -\tau_0$ se trouvent être non utilisables pour $t \gg \tau_0$. C'est ce qu'on peut voir sur la fig. 1 où l'on a donné une représentation sché-

matique de la fonction exacte $f_s(t)$, ainsi que les fonctionnelles $f_s^{(+)}(f^{(+)}(t))$, $f_s^{(-)}(f^{(-)}(t))$. Les parties des courbes en pointillé donnent les prolongements formels de ces fonctionnelles sur les intervalles de temps $t < +\tau_0$ et $t > -\tau_0$ où elles n'ont pas de sens physique. Nous dirons que les fonctions $f_s^{(\pm)}$ sont des fonctions de distribution grossières à particules multiples.

Il ne faut pas penser que les fonctionnelles $f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(+)})$ et $f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(-)})$ ne sont pas liées entre elles. Au contraire, vu la réversibilité des mouvements mécaniques, c'est-à-dire vu l'invariance des mouvements mécaniques par rapport à la transformation $t \to -t$, il n'est pas difficile de trouver une relation entre elles. En effet, à partir de (1.6.2), (1.6.3) et (1.6.4), on a:

$$f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(-)}(x', t; f_{s'}(x'_1, \ldots, x'_{s'}, 0))) =$$
$$= f_s^{(+)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s; f^{(+)}(x', -t; f_{s'}(\tilde{x}'_1, \ldots, \tilde{x}'_{s'}, 0))). \quad (1.6.5).$$

D'où, en posant $s = 1$, on obtient:

$$f^{(-)}(x, t; f_{s'}(x'_1, \ldots, x'_{s'}, 0)) = f^{(+)}(\tilde{x}, -t; f_{s'}(\tilde{x}'_1, \ldots, \tilde{x}'_{s'}, 0)),$$

et par conséquent

$$f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f(x)) = f_s^{(+)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s; f(\tilde{x})). \quad (1.6.6)$$

Les fonctionnelles $f_s^{(+)}(f)$ satisfont à la chaîne d'équations intégrales (1.2.11), (1.2.8). En utilisant la condition aux limites

$$\lim_{\tau \to -\infty} S_0^{(s)}(-\tau) f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; S_0^{(1)}(\tau) f) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} f(x_i), \quad (1.6.7)$$

il est facile de montrer que les fonctionnelles $f_s^{(-)}(f)$ satisfont à la même chaîne d'équations intégrales que les fonctionnelles $f_s^{(+)}(f)$, à condition, toutefois, de remplacer dans l'équation (1.2.11) $\int_{-\infty}^{0} d\tau$ par $(-1)\int_{0}^{\infty} d\tau$:

$$f_s^{(-)}(f) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} f(x_i) - \int_0^\infty d\tau S_0^{(s)}(\tau) \mathscr{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau) f), \quad (1.6.8)$$

où $\mathscr{K}_s(f)$ est comme auparavant donné par la formule (1.2.8). Il est facile d'en conclure que, comme nous l'avons déjà mentionné, la fonction $f^{(-)}(x, t)$ satisfait à l'équation cinétique de Boltzmann où seul a changé le signe de l'intégrale des collisions. En comparant les équations (1.2.11), (1.6.8), il est facile d'obtenir de nouveau la formule (1.6.6). Notons, enfin, que pour la fonction de distribu-

tion exacte $f_s(x_1, \ldots, x_s, t)$ les relations (1.2.3), (1.6.7) sont vérifiées:

$$S_0^{(s)}(-\tau) f_s(x_1, \ldots, x_s, t) \xrightarrow[\tau\to\pm\infty]{} \prod_{1\leqslant i\leqslant s} S_0^{(1)}(-\tau) f(x_i, t),$$
$$s = 2, 3, \ldots,$$

alors que pour la fonction de distribution grossière $f_s^{(+)}(f)$ on a seulement la relation (1.2.3), et pour la fonction de distribution grossière $f_s^{(-)}(f)$, seulement la relation (1.6.7), car les fonctions $f_s^{(\pm)}(x_1, \ldots, x_s; f)$ le long de certaines directions liées à $p_1, \ldots, p_s$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations *). En d'autres termes, les états « vieillis » $f_s^{(\pm)}(f)$, lors de l'évolution à hamiltonien libre, tendent vers le produit de fonctions de distribution à une particule dans les seuls sens du temps où ont apparu ces états « vieillis ».

La contradiction apparente entre la réversibilité des mouvements mécaniques et l'irréversibilité des processus macroscopiques donne lieu à une série de paradoxes. Ceux-ci sont tous liés à ce que la fonction $f_s^{(+)}(f^{(+)}(t))$, donnant une approximation de l'état du système dans le futur a été utilisée pour décrire l'état du système dans le passé.

A titre d'exemple, on peut citer le *paradoxe de Loschmidt* qui peut être expliqué comme suit. Considérons un certain état A_0 d'un système à l'étape cinétique de l'évolution et supposons que l'entropie dans cet état soit s_0 (à l'étape cinétique l'entropie est donnée par la formule (1.1.5)). Après un intervalle de temps $t > 0$, le système passera à l'état A_t d'entropie s_t. En vertu du théorème H de Boltzmann, on a $s_t > s_0$. Nous allons maintenant, à l'état A_t inverser les directions des vitesses de toutes les particules, et désigner par $\widetilde{A}_t$ l'état obtenu. En vertu de la formule (1.1.5), l'entropie $\widetilde{s}_t$ de l'état $\widetilde{A}_t$ ne différera alors pas de l'entropie s_t dans l'état A_t, $s_t = \widetilde{s}_t$. D'un autre côté, vu la réversibilité des mouvements mécaniques, l'état $\widetilde{A}_t$ après un intervalle de temps t, devient l'état $\widetilde{A}_0$ (nous avons tenu compte du fait qu'en vertu de la relation $X(t + t', x) = X(t, X(t', x))$ et des formules (1.6.1), on a la relation $X(t, \widetilde{X}(t, x)) = \widetilde{x}$) et, en vertu du théorème de Boltzmann, on doit avoir de plus l'inégalité $\widetilde{s}_t < \widetilde{s}_0$ ou $s_t < s_0$, ce qui se trouve en contradiction avec l'inégalité $s_0 < s_t$.

Pour expliquer ce paradoxe, remarquons qu'à l'état A_t correspondent les fonctions à particules multiples $f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s;$

---

*) Par exemple, la fonction $f_2^{(+)}(x_1, x_2; f) \xrightarrow[\xi\to-\infty]{} f(x_1) f(x_2)$, et la fonction $f_2^{(+)}(x_1, x_2; f) \xrightarrow[\xi\to+\infty]{} f(x_1') (x_2')$, où $x_i' \equiv (x_i', p_i')$; voir (1.3.15).

$f^{(+)}(x', t))$, et à l'état $\tilde{A}_t$ les fonctions de distribution à particules multiples $f_s^{(+)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s; f^{(+)}(x', t))$, égales à $f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(-)}(\tilde{x}', -t))$, en vertu de (1.6.5). Mais dans l'état, décrit par les fonctions $f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f^{(-)}(\tilde{x}', -t))$, l'entropie ne croît pas dans le temps, mais décroît vu que l'intégrale des collisions est de signe contraire (voir fig. 2 ; sur la figure les courbes sont interrompues sur l'intervalle de $-\tau_0$ à τ_0 où la notion d'entropie de Boltzmann ne peut être utilisée).

On sait, que, tout système macroscopique, après un intervalle de temps suffisamment long (temps de relaxation τ_r), passe à l'état

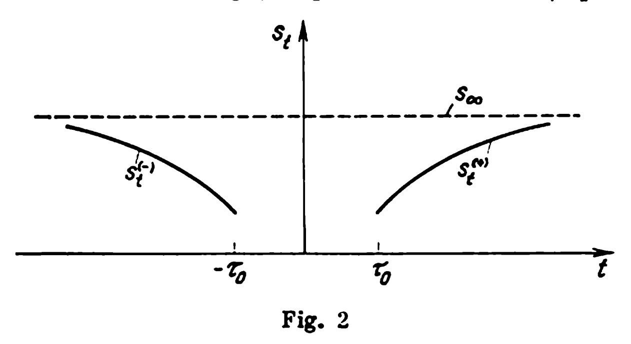


Fig. 2

d'équilibre statistique. D'un autre côté, comme nous venons de le voir, l'état du système pour $t \ll -\tau_0$ est décrit par les fonctions $f_s^{(-)}(f^{(-)}(t))$ qui, pour $t \ll -\tau_r$, tendent vers les fonctions de distribution, tout comme les fonctions $f_s^{(+)}(f^{(+)}(t))$ tendent, pour $t \gg \tau_r$ vers les fonctions d'équilibre. C'est pourquoi l'état du système est essentiellement de déséquilibre durant un intervalle de temps fini de l'ordre de τ_r.

A cet effet, on voit apparaître la question de ladite « mort thermique » de l'Univers en entier. Si l'Univers existe infiniment longtemps, il semble qu'il devrait se trouver à l'état d'équilibre thermique. Entre temps l'Univers en entier est loin de l'équilibre statistique et on ne voit pas de processus qui le ferait passer à l'état d'équilibre, on est donc amené à en déduire que la mécanique statistique n'est pas applicable à l'Univers en entier. Il est possible que ceci soit lié au rôle fondamental que jouent les forces gravitationnelles dans l'Univers en entier, pour ces forces on ne peut introduire la distribution de Gibbs car l'énergie libre rapportée à une particule lors de l'interaction gravitationnelle est divergente [56]. Notons qu'une telle divergence aurait pu apparaître, en principe, pour l'interaction de Coulomb. Cependant, grâce à l'existence dans les systèmes neutres de charges des deux signes, il n'y a pas de divergence. La masse étant toujours positive il n'existe pas de système « neutre »

du point de vue gravitationnel. Cependant, on ne peut être certain que ces considérations soient décisives. Il est possible que les effets liés à la théorie de la relativité générale, en vertu de laquelle l'Univers se trouve dans un état non stationnaire, avec une métrique dépendant du temps, soient essentiels.

1.6.2. Hypothèse ergodique. Dans le paragraphe 1.2.1 nous avons vu que les fonctions de distribution à particules multiples, en vertu du principe d'atténuation des corrélations, après un temps de chaotisation τ_0, deviennent des fonctionnelles de la fonction de distribution à une particule. Le temps de chaotisation τ_0 est de l'ordre de $\tau_0 \sim r_0/\bar{v}$ où $\bar{v}$ est une certaine vitesse caractéristique égale, en ordre de grandeur, dans un état peu déséquilibré à la vitesse thermique des particules, et r_0 le rayon de corrélation, du même ordre de grandeur que le rayon d'action des forces. Pour ce qui est de la fonction de distribution à une particule $f(x, t)$, après le temps de relaxation τ_r, elle devient la fonction de distribution d'équilibre de Maxwell $f_0(p)$. Le temps de relaxation τ_r, pour des systèmes homogènes dans l'espace, est de l'ordre de grandeur de $\tau_r \sim l/\bar{v}$, où l est la longueur de libre parcours moyen de la particule (comme $l \gg r_0$, on a $\tau_r \gg \tau_0$). D'un autre côté, après un intervalle de temps égal à τ_r, le système passe à l'état d'équilibre statistique. C'est pourquoi, pour $t \gg \tau_r$, les fonctions de distribution à particules multiples correspondront à l'équilibre statistique, et on peut les trouver, à partir de la distribution d'équilibre de Gibbs (1.1.1), à l'aide de la formule suivante

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) \underset{t \gg \tau_r}{\longrightarrow} f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \ldots dx_N w^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_N), \qquad (1.6.9)$$

où $w^{(c)}$ est la distribution canonique de Gibbs

$$w^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_N) = \exp\beta(F - \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N)).$$

La grandeur F, qui est l'énergie libre du système, est donnée par la condition

$$\frac{1}{N!} \int dx_1 \ldots dx_N \, w^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_N) = 1,$$

et la température inverse β à partir de la condition d'égalité des énergies à l'état initial $f_s(x_1, \ldots, x_s, 0)$ et à l'état final $f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s)$, rapportées à une particule.

En vertu de ce qui vient d'être dit, on a la relation suivante

$$f_s(x_1, \ldots, x_s, t) \underset{t \gg \tau_r}{\longrightarrow} f_s(x_1, \ldots, x_s; f_0(p)),$$

en la comparant à (1.6.9), on trouve

$$f_s(x_1, \ldots, x_s; f_0(p)) = f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s). \qquad (1.6.10)$$

Remarquons également qu'à partir de (1.6.6), (1.6.10), on a

$$f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s; f_0(p)) = f_s^{(-)}(x_1, \ldots, x_s; f_0(p))$$

(nous avons tenu compte de $f_s(x_1, \ldots, x_s; f) = f_s^{(+)}(x_1, \ldots, x_s; f)$ et de

$$w^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_N) = w^{(c)}(\beta; \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)).$$

Nous appellerons la relation (1.6.9) *relation ergodique* car elle est étroitement liée à l'*hypothèse ergodique*, suivant laquelle la moyenne temporelle d'une grandeur physique quelconque est égale à la moyenne de cette grandeur sur l'ensemble microcanonique *).

La moyenne dans le temps d'une fonction quelconque $h(x_1, \ldots, x_N)$, dépendant des coordonnées et des impulsions du système à N particules est donnée par

$$\bar{h}(x_1^0, \ldots, x_N^0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\, h(X_1(t, x^0), \ldots, X_N(t, x^0)), \quad (1.6.11)$$

où $X_i(t, x^0)$ sont les coordonnées et les impulsions de la i-ème particule à l'instant t et $x^0 \equiv (x_1^0, \ldots, x_N^0)$ les valeurs initiales de ces grandeurs.

Si le mouvement mécanique du système est fini, c'est-à-dire si les coordonnées et les impulsions ne prennent pas des valeurs aussi grandes que l'on veut, alors en utilisant le théorème de Liouville on peut montrer que presque pour toutes les valeurs $x_1^0, \ldots, x_N^0$, la limite (1.6.11) existe et ne dépend pas du choix du point initial $x_1^0, \ldots, x_N^0$ sur la trajectoire de phase, mais peut, en principe, changer lorsque l'on passe d'une trajectoire de phase à une autre dans l'espace des phases.

Notons que, si la fonction $h(X_1(t, x^0), \ldots, X_N(t, x^0))$ avait une limite pour $t \to \infty$, la fonction $\bar{h}(x_1^0, \ldots, x_N^0)$ coïnciderait avec cette limite. Cependant pour les systèmes à un nombre fini de particules, cette limite n'existe pas, car en vertu du théorème réciproque de Poincaré, le mouvement du système porte un caractère quasi périodique.

Trouvons ensuite la moyenne sur l'ensemble microcanonique. La distribution microcanonique s'écrit

$$w^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_N) = \\ = C_N^{-1}\delta(E_N - \mathscr{H}(x_1, \ldots, x_N)), \quad E_N = N\varepsilon_N, \quad (1.6.12)$$

*) Cette question est exposée en détail dans [112], [113].

où $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N)$ est le hamiltonien du système, E_N son énergie et C_N une constante de normalisation:

$$C_N = \frac{1}{N!}\int dx_1 \ldots dx_N \delta(E_N - \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N)).$$

La valeur moyenne de la fonction $h(x_1, \ldots, x_N)$ sur l'ensemble microcanonique est donnée par la formule:

$$h^{(m)}(E_N) = \\ = \frac{1}{N!}\int dx_1 \ldots dx_N h(x_1, \ldots, x_N)\, w^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_N). \quad (1.6.13)$$

Selon l'hypothèse ergodique les grandeurs $\bar{h}(x_1^0, \ldots, x_N^0)$ et $h^{(m)}(E_N)$ coïncident pour presque tous les x^0 sous la condition que $E_N = \mathcal{H}(x_1^0, \ldots, x_N^0)$, c'est-à-dire

$$\bar{h}(x_1^0, \ldots, x_N^0) = h^{(m)}(E_N), \quad E_N = \mathcal{H}(x_1^0, \ldots, x_N^0). \quad (1.6.14)$$

Ainsi la moyenne, dans le temps $\bar{h}(x_1^0, \ldots, x_N^0)$ ne dépend pas du choix du point $x_1^0, \ldots, x_N^0$ sur la surface énergétique $\mathcal{H}(x_1, \ldots \ldots, x_N) = E_N$ et ne dépend que de la position de cette surface dans l'espace des phases.

L'hypothèse ergodique (1.6.14) a été démontrée par Birkhoff (voir la démonstration dans [112]) pour les systèmes dits métriquement transitifs, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels aucune surface énergétique $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_N) = E_N$ ne peut être divisée en domaines finis, ayant la propriété suivante: si le point initial d'une trajectoire quelconque se trouve dans l'un de ces domaines, toute la trajectoire se trouve dans ce domaine.

La propriété de transitivité métrique dépend, en principe, du caractère des forces d'interaction entre les particules. Dans le cas de forces de répulsion et $N \geqslant 3$ le système sera toujours métriquement transitif.

L'invariance des équations de la mécanique, par rapport à l'inversion du temps, montre que si l'hypothèse ergodique (1.6.14) est vraie, pour le moyennage dans le temps (1.6.11), elle sera également vraie pour le moyennage dans le temps suivant

$$\bar{h}(x_1^0, \ldots, x_N^0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} dt h(X_1(t, x^0), \ldots, X_N(t, x^0)). \quad (1.6.15)$$

(Pour la démonstration, il suffit de remarquer que $X_i(t, x^0) = \tilde{X}_i(-t, \tilde{x}^0)$ et de prendre dans (1.6.14), au lieu de la fonction $h(x_1, \ldots, x_N)$ la fonction $h(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$.)

Nous allons trouver le rapport existant entre la relation ergodique (1.6.9) et l'hypothèse ergodique (1.6.14). Envisageons à cet

effet une densité arbitraire de probabilité de phase $\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots$ $\ldots, x_N; 0)$, différant de zéro au voisinage de la surface énergétique $\mathscr{H}(x_1, \ldots, x_N) = E_N$:

$$\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; 0) = \\ = g(x_1, \ldots, x_N)\,\delta(E_N - \mathscr{H}(x_1, \ldots, x_N)), \quad (1.6.16)$$

$$\frac{1}{N!}\int dx_1 \ldots dx_N \mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; 0) = 1,$$

où la fonction $g(x_1, \ldots, x_N)$ caractérise la distribution des points de phase sur la surface énergétique. A partir de (1.1.20), on voit que si (1.6.16) est la densité de probabilité initiale des points de phase, la densité de probabilité des points de phase à l'instant t sera égale à

$$\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; t) = \mathscr{D}_{E_N}(X_1(-t, x), \ldots, X_N(-t, x); 0).$$

D'où en utilisant l'hypothèse ergodique (1.6.14), avec le moyennage dans le temps (1.6.15), on obtient

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; t) = \\ = \frac{1}{N!}\int dx_1' \ldots dx_N' \mathscr{D}_{E_N}(x_1', \ldots, x_N'; 0)\, C_N^{-1}\delta(\mathscr{H}(x_1, \ldots, x_N) - \\ - \mathscr{H}(x_1', \ldots, x_N')).$$

A partir de la définition de la fonction $\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; 0)$, on trouve

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; t) = w^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_N). \quad (1.6.17)$$

Cette formule permet d'obtenir la relation ergodique pour la fonction de distribution (1.6.9). Pour cela on multiplie (1.6.17) par $(N-s)!^{-1}$ et en intégrant sur $x_{s+1}, \ldots, x_N$ on a :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,f_s(x_1, \ldots, x_s; t) = f_s^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_s), \quad (1.6.18)$$

où

$$f_s^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_s) = \frac{1}{(N-s)!}\int dx_{s+1} \ldots dx_N w^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_N),$$

et la grandeur $\varepsilon_N = E_N/N$ est liée à $f_s(x_1, \ldots, x_s; 0)$ par la relation

$$\varepsilon_N \equiv \varepsilon_N(f_s(x_1, \ldots, x_s; 0)) = \\ = \frac{1}{N!\,N}\int dx_1 \ldots dx_N \mathscr{H}(x_1, \ldots, x_N)\,\mathscr{D}_{E_N}(x_1, \ldots, x_N; 0).$$

Jusqu'à présent nous avons supposé fini le nombre N de particules. L'avantage des formules (1.6.18), en comparaison des formules (1.6.11), (1.6.13), est que dans cette formule, en vertu des résultats du paragraphe 1.1.2, on passe à la limite thermodynamique. Comme après ce passage à la limite, la durée du cycle de Poincaré sera infinie, en supposant que les passages à la limite $\mathcal{V} \to \infty$, $T \to \infty$ soient permutables, la formule (1.6.18) s'écrit comme suit:

$$\lim_{t \to \infty} f_s(x_1, \ldots, x_s; t) = f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \ldots, x_s), \qquad (1.6.19)$$

où la grandeur $\varepsilon = \lim\limits_{N \to \infty} \varepsilon_N (f_s(x_1, \ldots, x_s; 0))$ est l'énergie rapportée à une particule à l'état initial. Soulignons une fois de plus que les fonctions de distribution à particules multiples, dans cette formule, se rapportent à un système à un nombre infini de particules. Cette formule montre que les fonctions de distribution à particules multiples, tendent dans le temps vers des fonctions de distribution universelles d'équilibre:

$$f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \ldots, x_s) = \\ = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \ldots dx_N w^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_N), \qquad (1.6.20)$$

où la mémoire de l'état initial n'est contenue que dans la valeur de l'énergie ε, rapportée à une particule.

La relation asymptotique (1.6.19) contient la fonction de distribution à s particules calculée sur l'ensemble microcanonique, alors que dans (1.6.9) figure la fonction de distribution obtenue d'après l'ensemble canonique. Cependant la distribution microcanonique $w^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \ldots, x_N)$ est, à la limite $N \to \infty$, équivalente à la distribution canonique $w^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_N)$. Ceci signifie que

$$f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \ldots, x_s) = f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s), \quad s = 1, 2, \ldots, \qquad (1.6.21)$$

où $f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s)$ est donné par la formule (1.6.9) et β est lié à ε par la relation

$$\varepsilon(f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s)) = \varepsilon(f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \ldots, x_s)) = \varepsilon.$$

C'est pourquoi la relation asymptotique (1.6.19) peut s'écrire comme

$$\lim_{t \to \infty} f_s(x_1, \ldots, x_s; t) = f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s),$$

où β est donné par la condition

$$\varepsilon(f_s^{(c)}(\beta; x_1, \ldots, x_s)) = \varepsilon(f_s(x_1, \ldots, x_s; 0)). \qquad (1.6.22)$$

Ainsi, nous avons montré que la relation ergodique (1.6.9), (1.6.22) découle de l'hypothèse ergodique (1.6.14). Cependant dans le cas général l'affirmation inverse n'est pas vraie. Ceci signifie

que la relation ergodique (1.6.9), vraie pour un système à $N \to \infty$, ne conduit pas à l'hypothèse ergodique pour un nombre fini de particules.

Il ne faut pas penser que les formules (1.6.9), (1.6.22) sont automatiquement vérifiées pour un hamiltonien de forme quelconque. Il est évident que si les particules étaient libres, les relations (1.6.9), (1.6.22) ne seraient pas vraies, car, dans ce cas, le système n'évoluerait pas vers l'état d'équilibre statistique. C'est pourquoi les relations ergodiques (1.6.9), (1.6.22) sont vraies ou non suivant la structure du hamiltonien du système. La relation ergodique (1.6.9) n'est vérifiée que si le hamiltonien est suffisamment compliqué, c'est-à-dire s'il tient compte des diverses interactions entre les particules. La forme compliquée du hamiltonien signifie que le système n'a qu'une seule intégrale de mouvement additive, à savoir l'énergie (pour plus en détail voir le paragraphe 2.4.3 du présent ouvrage).

Ecrivons le hamiltonien du système sous la forme $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V$, où $\mathscr{H}_0$ est le hamiltonien des particules libres et V l'énergie d'interaction des particules. Sous l'influence du hamiltonien $\mathscr{H}$ le système passe à l'état d'équilibre statistique. Si dans le hamiltonien on rejette l'énergie d'interaction, les fonctions de distribution à particules multiples ne deviendront pas, pour $t \to \infty$, les fonctions d'équilibre $f_s^{(c)}(\beta\,;\, x_1, \ldots, x_s)$ calculées d'après la distribution $w^{(c)}(\beta\,;\, x_1, \ldots, x_N)$ avec un hamiltonien égal à $\mathscr{H}_0$ et tendront en vertu de (1.2.1) vers un produit de fonctions à une particule

$$f_s(x_1, \ldots, x_s\,;\, t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \prod_{1\leqslant i\leqslant s} f\left(x_i - \frac{p_i}{m}t,\ p_i\,;\, 0\right). \quad (1.6.23)$$

Cette expression sera aussi appelée relation ergodique liée non pas au hamiltonien $\mathscr{H}$, mais au hamiltonien $\mathscr{H}_0$. (Notons que cette relation ergodique a joué un rôle important lors de l'élaboration des équations cinétiques.)

Notons pour conclure que d'autres formes spéciales de relations ergodiques analogues à (1.6.9), (1.6.23) peuvent exister suivant la forme du hamiltonien du système. Nous reviendrons à cette question ultérieurement lors de l'étude des systèmes quantiques.

Soulignons également que toutes les remarques faites dans ce paragraphe sur l'irréversibilité des processus des systèmes classiques concernent également les systèmes quantiques.

CHAPITRE 2

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE DES SYSTÈMES QUANTIFIÉS

§ 2.1. Principes de la mécanique quantique

2.1.1. Etats purs et mélanges. Les états des systèmes quantifiés peuvent être décrits à l'aide de l'*opérateur statistique* ou de la *matrice de densité*. Nous allons expliquer ici cette notion, mais préalablement nous allons donner un rappel des principes de la mécanique quantique [53].

En mécanique quantique, à chaque grandeur physique, appelée grandeur observée, on fait correspondre un certain opérateur dans l'espace hilbertien qui représente un ensemble de vecteurs ψ (appelés *vecteurs d'état*) pour lesquels on détermine le produit scalaire (ψ_1, ψ_2) doué de la propriété suivante

$$(\psi_1, \psi_2)^* = (\psi_2, \psi_1), \ (\psi, a\psi_1 + b\psi_2) = a\,(\psi, \psi_1) + b\,(\psi, \psi_2),$$
$$(\psi, \psi) > 0$$

(a et b étant des nombres complexes quelconques).

Dans cet espace, on peut introduire (d'un nombre infini de manières) une base dénombrable, complète et orthonormée ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$$

telle que tout vecteur ψ de l'espace hilbertien puisse être représenté comme la superposition des vecteurs ψ_n

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n, \ \text{où} \ C_n = (\psi_n, \psi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty.$$

Tout opérateur R de l'espace hilbertien fait passer chacun des vecteurs ψ de cet espace en un autre vecteur ψ' de ce même espace

$$\psi \xrightarrow[R]{} \psi' = R\psi.$$

Si de plus $\psi' = r\psi$, où r est un certain nombre, ψ est appelé vecteur propre de l'opérateur R, appartenant à la valeur propre r. L'opérateur R^+ est dit hermitique (adjoint) de l'opérateur R, si pour deux

vecteurs quelconques ψ_1, ψ_2 de l'espace hilbertien, on a l'égalité

$$(\psi_2, R\psi_1) = (R^+\psi_2, \psi_1).$$

Si $R^+ = R$, l'opérateur R est dit hermitique ou auto-adjoint.

Toutes les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint quelconque sont réelles, et ses vecteurs propres forment un système orthonormé complet de vecteurs et peuvent donc être pris pour base dans l'espace hilbertien. C'est pourquoi aux grandeurs physiques on fait toujours correspondre des opérateurs hermitiques.

Les valeurs propres de l'opérateur R sont interprétées comme les valeurs possibles de la grandeur observée correspondante.

Pour les vecteurs d'états, les produits scalaires et les éléments matriciels des opérateurs nous utiliserons souvent les désignations suivantes proposées par Dirac:

$$\psi \equiv |\psi\rangle, \ \psi_n \equiv |n\rangle, \ (\psi, \varphi) \equiv \langle\psi|\varphi\rangle, \qquad (\psi, R\varphi) = \langle\psi|R|\varphi\rangle.$$

Le comportement des microvolumes porte un caractère statistique particulier. Ce caractère statistique apparaît en ce que les résultats des mesures des grandeurs physiques peuvent être prévus d'une manière statistique, c'est-à-dire à l'aide de la notion de probabilité. Si, cependant, après une première mesure on effectue une seconde mesure, le résultat se trouve en accord avec la première mesure (bien que du point de vue logique on puisse concevoir une distribution statistique des résultats des deux mesures indépendantes l'une de l'autre).

Cette statistique, due à la nature des choses, peut, dans le plus simple des cas des états dits purs, être décrite à l'aide de vecteurs dans l'espace hilbertien. A savoir, si le système est caractérisé par le vecteur ψ, ou autrement dit, s'il se trouve dans l'état ψ, la valeur moyenne d'une certaine grandeur physique R, obtenue par suite de sa mesure, sera égale à

$$\bar{R} = (\psi, R\psi)$$

(on suppose que la condition de normalisation soit vérifiée, c'est-à-dire que $(\psi, \psi) = 1$).

Si ψ_r est un vecteur propre de l'opérateur R, $R\psi_r = r\psi_r$, lors de la mesure de la grandeur R dans l'état ψ_r, on obtiendra une seule valeur r.

La valeur moyenne peut également s'écrire comme

$$\bar{R} = \mathrm{Sp} P_{[\psi]} R,$$

où $P_{[\psi]}$ est l'opérateur de projection sur l'état ψ, donné par la relation

$$P_{[\psi]}\varphi = \psi(\psi, \varphi)$$

(φ étant un vecteur quelconque dans l'espace hilbertien) et Sp A désigne la trace (spoor) de l'opérateur A, c'est-à-dire la somme de ses éléments matriciels diagonaux dans une base orthonormée arbitraire. Conformément à cette définition, on utilise généralement les désignations suivantes pour l'opérateur de projection $P_{[\psi]} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Les opérateurs de projection permettent de formuler facilement la condition de complétude du système de vecteurs orthonormés ψ_n à savoir

$$\sum_n P_{[\psi_n]} = \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \qquad (2.1.1)$$

A côté du cas simple où le système peut être caractérisé par un certain vecteur d'état, une situation plus générale est possible, lorsqu'on ne sait pas exactement lequel des vecteurs caractérise l'état du système et que l'on peut seulement donner la probabilité pour que le système soit caractérisé par tel ou tel vecteur dans l'espace hilbertien. Si w_n est la probabilité pour que le système se trouve dans l'état ψ_n (les vecteurs ψ_n peuvent ne pas être orthogonaux; $w_n \geqslant 0$, $\sum_n w_n = 1$), la valeur moyenne de la grandeur R sera donnée par la formule

$$\overline{R} = \sum_n w_n \langle\psi_n | R | \psi_n\rangle.$$

Cette formule peut également s'écrire comme suit

$$\overline{R} = \mathrm{Sp}\, \rho R, \qquad (2.1.2)$$

où

$$\rho = \sum_n |\psi_n\rangle w_n \langle\psi_n| = \sum_n w_n P_{[\psi_n]}. \qquad (2.1.3)$$

L'opérateur ρ s'appelle opérateur statistique ou matrice de densité, c'est un opérateur hermitien déterminé positif, dont la trace est égale à l'unité, Sp $\rho = 1$.

Si le système se trouve dans un état pur $|\psi\rangle$, sa matrice de densité peut s'écrire de toute évidence comme

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \qquad (2.1.4)$$

et, comme on peut facilement le voir, dans ce cas $\rho^2 = \rho$. L'affirmation inverse est également vraie : si la matrice de densité satisfait à la relation $\rho^2 = \rho$ elle a la forme (2.1.4) et l'état est pur.

Il est évident que si le système est décrit par la matrice de densité, l'état du système peut être interprété comme un mélange d'états purs.

Soulignons la différence de principe existant entre un mélange et une superposition d'états purs : dans le cas d'une superposition d'états, ce sont les vecteurs d'états qui s'ajoutent, le résultat est de

nouveau un état pur; au contraire, dans un mélange, ce sont les matrices de densité des états purs qui s'additionnent.

Il est facile de voir que si on mélange des mélanges, on obtient toujours un mélange et non un état pur.

Si le système se trouve dans un état pur, c'est-à-dire s'il est décrit par un vecteur dans l'espace hilbertien, une de ses parties isolée, en interaction avec les autres parties du système, sera décrite non pas par le vecteur d'état mais par la matrice de densité. Supposons par exemple, que le système $\mathscr{C}$ se trouvant dans l'état $| c \rangle$ se compose de deux sous-systèmes a et b et qu'il y ait lieu de trouver la matrice de densité ρ_a du sous-système a. Remarquons à cet effet que l'espace hilbertien des vecteurs d'état du système tout entier puisse être représenté comme le produit direct d'espaces hilbertiens correspondant aux sous-systèmes a et b. Les produits directs des vecteurs de base $| n_a \rangle, | n_b \rangle$ de ces espaces forment une base de vecteurs d'état du système $\mathscr{C}$

$$| n_a n_b \rangle = | n_a \rangle | n_b \rangle.$$

L'élément de la matrice de densité du sous-système a, $\langle n_a | \rho_a | n_a' \rangle$ est de toute évidence égal à

$$\langle n_a | \rho_a | n_a' \rangle = \sum_{n_b} \langle n_a n_b | c \rangle \langle c | n_a' n_b \rangle,$$

d'où

$$\rho_a = \sum_{n_a n_a' n_b} | n_a \rangle \langle n_a n_b | c \rangle \langle c | n_a' n_b \rangle \langle n_a' |. \tag{2.1.5}$$

2.1.2. Loi dynamique de la mécanique quantique. Les vecteurs des états du système varient dans le temps suivant une loi déterminée. A savoir, si $\mathscr{H}(t)$ est le hamiltonien du système, le vecteur des états $\psi(t)$ varie dans le temps conformément à l'*équation de Schrödinger*

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \mathscr{H}(t) \psi(t). \tag{2.1.6}$$

(Ici et plus bas on suppose que la constante quantique $\hbar$ est égale à l'unité.) La solution de cette équation dans le cas d'un système fermé peut, du point de vue formel, s'écrire comme suit

$$\psi(t) = \exp\{-i \mathscr{H} t\} \psi(0).$$

En utilisant l'équation de Schrödinger, il est facile de trouver l'équation du mouvement pour la matrice de densité d'un système fermé ou d'un système se trouvant dans un certain champ extérieur (qui peut dépendre du temps). Dans les deux cas les grandeurs w_n figurant dans la formule (2.1.3) ne dépendront pas du temps et la dépendance du temps de la matrice de densité ρ sera donnée par la

fonction du temps des vecteurs d'état $|\psi_n\rangle$ donnée par l'équation de Schrödinger. C'est pourquoi la matrice de densité $\rho(t)$ doit satisfaire à l'équation

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=[\mathscr{H}(t),\ \rho(t)].\tag{2.1.7}$$

Dans le cas d'un système fermé, la solution formelle de cette équation peut s'écrire comme

$$\rho(t)=\exp\{-i\mathscr{H}t\}\,\rho(0)\exp\{i\mathscr{H}t\}.$$

L'évolution d'un système quantique n'est pas obligatoirement régie par l'équation de Schrödinger. Outre cette méthode, dite représentation de Schrödinger de la mécanique quantique, on peut envisager d'autres représentations de la mécanique quantique : la représentation de Heisenberg et la représentation des interactions ou représentation de Dirac. Ces représentations sont introduites de telle sorte que les valeurs moyennes de tout opérateur dans les diverses représentations coïncident.

Dans la représentation de Heisenberg l'évolution du système est décrite par la variation dans le temps des opérateurs, quant aux vecteurs d'état, ils ne dépendent pas du temps. Les opérateurs $R^{(H)}(t)$, les vecteurs d'état $\psi^{(H)}$ et l'opérateur statistique $\rho^{(H)}$ sont, dans cette représentation, liés aux grandeurs correspondantes dans la représentation de Schrödinger par les relations

$$R^{(S)}=\exp\{-i\mathscr{H}t\}\,R^{(H)}(t)\exp\{i\mathscr{H}t\},\qquad \psi^{(S)}(t)=\exp\{-i\mathscr{H}t\}\,\psi^{(H)},$$
$$\rho^{(S)}(t)=\exp\{-i\mathscr{H}t\}\,\rho^{(H)}\exp\{i\mathscr{H}t\}$$

(on suppose que le hamiltonien ne dépend pas du temps ; l'indice S sert à désigner les grandeurs dans la représentation de Schrödinger, on suppose qu'à l'instant initial, $t=0$, les deux représentations coïncident). L'opérateur $R^{(H)}(t)$ varie dans le temps suivant la loi

$$\frac{\partial R^{(H)}(t)}{\partial t}=i\,[\mathscr{H},\ R^{(H)}(t)].\tag{2.1.8}$$

Dans la représentation de l'interaction, tant les vecteurs d'état (matrice de densité) que les opérateurs varient dans le temps, cette variation étant liée à la décomposition du hamiltonien $\mathscr{H}$ en deux composantes $\mathscr{H}_0$ et V :

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+V,$$

où généralement $\mathscr{H}_0$ désigne le hamiltonien des particules sans interaction et V le hamiltonien de leur interaction. Pour plus de simplicité, nous allons supposer que $\mathscr{H}_0$ ne dépend pas du temps d'une manière explicite. Les opérateurs $R^{(D)}(t)$, les vecteurs d'état $\psi^{(D)}(t)$ et l'opérateur statistique $\rho^{(D)}(t)$ sont liés aux grandeurs correspon-

dantes dans la représentation de Schrödinger par les relations

$$\begin{aligned} R^{(S)} &= \exp\{-i\mathcal{H}_0 t\} R^{(D)}(t) \exp\{i\mathcal{H}_0 t\}, \\ \psi^{(S)}(t) &= \exp\{-i\mathcal{H}_0 t\} \psi^{(D)}(t), \\ \rho^{(S)}(t) &= \exp\{-i\mathcal{H}_0 t\} \rho^{(D)}(t) \exp\{i\mathcal{H}_0 t\}. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

(On suppose que les deux représentations coïncident pour $t = 0$.)

Il est facile de voir que le vecteur d'état et la matrice de densité dans la représentation de l'interaction varient dans le temps suivant la loi

$$\psi^{(D)}(t) = S(t, 0)\, \psi^{(D)}(0), \quad \rho^{(D)}(t) = S(t, 0)\, \rho^{(D)}(0)\, S^+(t, 0),$$

où

$$S(t, 0) = e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H} t}. \quad (2.1.10)$$

Cet opérateur, appelé opérateur de transformation, satisfait à l'équation

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = V^{(D)}(t)\, S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1, \quad (2.1.11)$$

où

$$V^{(D)}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} V e^{-i\mathcal{H}_0 t}.$$

Les relations reliant les matrices de densité et les opérateurs dans différentes représentations assurent l'égalité des valeurs moyennes dans les trois représentations

$$\mathrm{Sp}\, \rho^{(S)}(t)\, R^{(S)} = \mathrm{Sp}\, \rho^{(H)} R^{(H)}(t) = \mathrm{Sp}\, \rho^{(D)}(t)\, R^{(D)}(t).$$

Nous allons montrer que l'opérateur de transformation $S(t, 0)$ peut être utilisé pour décrire le processus de diffusion des particules [2, 84]. Le problème de diffusion se pose comme suit : on se donne le vecteur d'état du système de particules $\psi^{(D)}(t)$ à l'instant $t = -\infty$ lorsqu'on peut supposer qu'il n'y a pas d'interaction des particules; il faut déterminer le vecteur d'état $\psi^{(D)}(t)$ à l'instant $t = \infty$ lorsque les particules après l'interaction deviennent de nouveau libres [84].

En vertu de la formule (2.1.10), on a

$$\psi^{(D)}(t_2) = S(t_2, t_1)\, \psi^{(D)}(t_1),$$

où

$$S(t_2, t_1) = S(t_2, 0)\, S^+(t_1, 0).$$

En posant $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$ et en supposant qu'à ces instants il n'y a pas d'interaction, on trouve la matrice de dispersion S :

$$S = S(\infty, -\infty) = S(\infty, 0)\, S^+(-\infty, 0).$$

En introduisant les opérateurs d'onde

$$\Omega^{(\pm)} \equiv S^+(\mp\infty, 0) = \lim_{\eta\to+0} \Omega_\eta^{(\pm)}, \tag{2.1.12}$$

$$\Omega_\eta^{(+)} = \eta \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathscr{H}\tau} e^{-i\mathscr{H}_0\tau}, \qquad \Omega_\eta^{(-)} = \eta \int_{0}^{\infty} d\tau e^{-\eta\tau} e^{i\mathscr{H}\tau} e^{-i\mathscr{H}_0\tau},$$

on peut écrire la matrice de diffusion comme suit

$$S = \Omega^{(-)+}\Omega^{(+)}. \tag{2.1.13}$$

Il est facile de voir que

$$\mathscr{H}\Omega_\eta^{(\pm)} = \Omega_\eta^{(\pm)}\mathscr{H}_0 \pm i\eta\,(\Omega_\eta^{(\pm)} - 1).$$

C'est pourquoi les opérateurs $\Omega^{(\pm)}$ satisfont à la relation

$$\mathscr{H}\Omega^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)}\mathscr{H}_0. \tag{2.1.14}$$

Par conséquent, si $\psi_\alpha \equiv |\alpha\rangle$ est le vecteur propre de l'opérateur $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_0\psi_\alpha = \mathscr{E}_\alpha\psi_\alpha$ les vecteurs

$$\psi_\alpha^{(\pm)} \equiv |\alpha\rangle^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)}\psi_\alpha \tag{2.1.15}$$

seront les vecteurs propres de l'opérateur $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}\psi_\alpha^{\pm} = \mathscr{E}_\alpha\psi_\alpha^{(\pm)}$. On peut montrer que si ψ_α sont normés par la condition $(\psi_\alpha, \psi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, on a

$$(\psi_\alpha^{(\pm)}, \psi_\beta^{(\pm)}) = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2.1.16}$$

Les vecteurs ψ_α forment un système complet de vecteurs dans l'espace de Hilbert, quant aux vecteurs $\psi_\alpha^{(\pm)}$, dans le cas général, ils ne forment pas un tel système. Dans le cas de deux particules, pour obtenir un système complet de vecteurs, il suffit de compléter les vecteurs $\psi_\alpha^{(+)}$ (ou $\psi_\alpha^{(-)}$) par les vecteurs des états liés $\psi_n^{(b)} = |n\rangle^{(b)}$, $(\psi_n^{(b)}, \psi_{n'}^{(b)}) = \delta_{nn'}$. On obtient ainsi deux ensembles de vecteurs d'état $\{\psi_\alpha^{(+)}, \psi_n^{(b)}\}$, $\{\psi_\alpha^{(-)}, \psi_n^{(b)}\}$:

$$\sum_\alpha |\alpha\rangle^{(\pm)\,(\pm)}\langle\alpha| + \sum_n |n\rangle^{(b)\,(b)}\langle n| = 1. \tag{2.1.17}$$

En vertu de (2.1.15), (2.1.16) on a

$$\Omega^{(\pm)+}\Omega^{(\pm)} = 1. \tag{2.1.18}$$

Puis nous allons montrer que

$$\Omega^{(\pm)}\Omega^{(\pm)+} = 1 - \Lambda, \tag{2.1.19}$$

où Λ est l'opérateur de projection sur le sous-espace des vecteurs des états liés $\psi_n^{(b)}$, $\Lambda = \sum_n |n\rangle^{(b)\,(b)}\langle n|$. Remarquons à cet effet

que, vu la condition de complétude du système de vecteurs $|\alpha\rangle$, $\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$, on a en vertu de (2.1.15)

$$\Omega^{(\pm)}\Omega^{(\pm)+} = \Omega^{(\pm)} \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \Omega^{(\pm)+} = \sum_\alpha |\alpha\rangle^{(\pm)(\pm)}\langle\alpha|,$$

d'où compte tenu de (2.1.17) on obtient la formule (2.1.19).

Ainsi, s'il y a des états liés, les opérateurs $\Omega^{(\pm)}$ ne sont pas unitaires, bien que les opérateurs $S(t, 0)$ et $S^+(t, 0)$ le soient.

En vertu de (2.1.14), la matrice de dispersion commute avec le hamiltonien $\mathcal{H}_0$, $[S, \mathcal{H}_0] = 0$. Vu (2.1.19), l'opérateur S est unitaire $SS^+ = S^+S = 1$, bien que, comme on vient de le noter, dans le cas des états liés, les opérateurs ne soient pas unitaires.

La matrice de dispersion peut s'écrire comme

$$S = 1 - 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dE\delta(E - \mathcal{H}_0)\, T^{(+)}(E)\, \delta(E - \mathcal{H}_0), \quad (2.1.20)$$

où

$$\begin{gathered} T^{(\pm)}(E) = \lim_{\eta\to+0} T(E \pm i\eta), \\ T(z) = V + VR(z)V, \quad R(z) = (z - \mathcal{H})^{-1}. \end{gathered} \quad (2.1.21)$$

(L'opérateur $T^{(\pm)}(E)$ est appelé opérateur de dispersion, et $R(z)$ résolvante de l'opérateur $\mathcal{H}$.) En effet, remarquant que

$$\mp \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dER(E \mp i\eta)\, e^{\pm iE\tau} = \begin{cases} e^{-\eta\tau}\cdot e^{\pm i\tau\mathcal{H}}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} T(z) &= V + VR_0(z)T(z), & R(z)V &= R_0(z)T(z), \\ R(z) &= R_0(z) + R_0(z)T(z)R_0(z), & R_0(z) &= (z - \mathcal{H}_0)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

il est facile de voir que les formules

$$\begin{aligned} \Omega^{(\pm)} &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dER_0^{\pm}(E)\, T^{(\pm)}(E)\, \delta(E - \mathcal{H}_0), \\ V\Omega^{(\pm)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dET^{(\pm)}(E)\, \delta(E - \mathcal{H}_0), \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

avec

$$R_0^{(\pm)}(E) = \lim_{\eta\to+0} R_0(E \pm i\eta)$$

sont vraies.

La matrice de dispersion peut de toute évidence s'écrire comme

$$S = 1 - \Omega^{(-)+}(\Omega^{(+)} - \Omega^{(-)}).$$

Remarquant que

$$R^{(+)}(E) - R^{(-)}(E) = -2\pi i \delta(E - \mathscr{H}),$$

où $R^{(\pm)}(E) = \lim\limits_{\eta \to +0} R(E \pm i\eta)$, on a en vertu de (2.1.23)

$$\Omega^{(+)} - \Omega^{(-)} = -2\pi i \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE \delta(E - \mathscr{H}) V \delta(E - \mathscr{H}_0).$$

Puis en vertu de (2.1.14) on a

$$\Omega^{(-)+}\delta(E - \mathscr{H}) = \delta(E - \mathscr{H}_0)\Omega^{(-)+},$$

c'est pourquoi, en utilisant (2.1.23), on obtient finalement la formule (2.1.20).

Nous allons établir maintenant la relation existant entre la matrice de dispersion et la probabilité de transition. La probabilité de transition durant le temps t de l'état $|i\rangle$, qui est un état propre du hamiltonien $\mathscr{H}_0$ d'énergie $\mathscr{E}_i$, dans l'état $|f\rangle$, qui est un état propre du hamiltonien $\mathscr{H}_0$ d'énergie $\mathscr{E}_f$ est déterminée par la formule

$$W_{fi}(t) = |\langle f | e^{-i\mathscr{H}t} | i \rangle|^2.$$

La grandeur

$$w_{fi} = \lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} W_{fi}(t) \tag{2.1.24}$$

est pour $f \neq i$ la probabilité de transition par unité de temps de l'état $|i\rangle$ à l'état $|f\rangle$. (Soulignons qu'avant le passage à la limite $t \to \infty$ il y a lieu de réaliser dans cette formule le passage à la limite $\mathscr{V} \to \infty$ car dans le cas contraire la limite (2.1.24) n'existerait pas.)

A partir de (2.1.12) il est facile de voir que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} W_{fi}(t) = 2 \operatorname{Im} \langle f | \Omega^{(+)} | i \rangle^* \langle f | V\Omega^{(+)} | i \rangle. \tag{2.1.25}$$

Puis, conformément à (2.1.23), on a

$$\langle f | \Omega^{(+)} | i \rangle = \delta_{if} + (\mathscr{E}_f - \mathscr{E}_i + i0) T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i), \quad \langle f | V\Omega^{(+)} | i \rangle = T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i),$$

où $T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i) = \langle f | T^{(+)}(\mathscr{E}_i) | i \rangle$. En substituant ces expressions dans (2.1.25), on trouve

$$w_{fi} = 2\delta_{if} \operatorname{Im} T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i) + 2\pi\delta(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f) | T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i)|^2. \tag{2.1.26}$$

Ainsi pour $f \neq i$ la probabilité de transition par unité de temps est donnée par le carré du module de l'élément matriciel $T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i)$

de l'opérateur des collisions, lié, d'après (2.1.20), à l'élément matriciel de la matrice de dispersion par la relation

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i)\,\delta(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f). \qquad (2.1.27)$$

En vertu de la définition de la fonction w_{fi}, on a $\sum_f w_{fi} = 0$, où la sommation s'effectue sur tous les états $|f\rangle$ y compris l'état $|f\rangle = |i\rangle$. On obtient donc, en accord avec (2.1.26)

$$\operatorname{Im} T_{ii}^{(+)}(\mathscr{E}_i) = -\pi \sum_f |T_{fi}^{(+)}(\mathscr{E}_i)|^2\,\delta(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f). \qquad (2.1.28)$$

Comme on doit, avant de passer à la limite $\eta \to +0$ dans $T(E + i\eta)$ faire tendre le volume du système vers l'infini, dans cette formule la sommation est en fait une intégration sur les états finis f. La formule (2.1.28) est appelée théorème optique.

Cette formule est un cas particulier de la formule plus générale

$$T(z') - T(z) = (z - z')\,T(z')\,R_0(z')\,R_0(z)\,T(z). \qquad (2.1.29)$$

La formule (2.1.28) découle de (2.1.29), pour s'en rendre compte, il y a lieu de poser $z' = E + i\eta$, $z = E - i\eta$, de prendre dans les deux membres de (2.1.29) l'élément matriciel diagonal, puis de passer à la limite $\eta \to +0$ en utilisant la formule

$$\eta R_0(E + i\eta)\,R_0(E - i\eta) \xrightarrow[\eta \to +0]{} \pi\delta(E - \mathscr{H}_0).$$

Pour démontrer (2.1.29), on note que la relation

$$(R(z') - R_0(z'))\,(R(z) - R_0(z)) = \\ = R_0(z')\,T(z')\,R_0(z')\,R_0(z)\,T(z)\,R_0(z) \qquad (2.1.30)$$

est vraie, car en vertu de (2.1.22) $R = R_0 + R_0 T R_0$. D'un autre côté, à partir de l'identité $R(z) - R(z') = (z' - z)\,R(z)\,R(z')$ (elle est appelée *identité de Hilbert*) il s'ensuit compte tenu de (2.1.22) :

$$(R(z') - R_0(z'))\,(R(z) - R_0(z)) = \\ = (z - z')^{-1} R_0(z')\,(T(z') - T(z))\,R_0(z).$$

En comparant cette formule avec (2.1.30), on obtient la relation (2.1.29).

2.1.3. Processus de la mesure. Pour se faire une idée complète de la mécanique quantique, il faut encore donner une interprétation du processus de la mesure. On appelle mesure l'interaction d'un objet quantique et de l'appareil utilisable pour la mesure de la grandeur correspondante et l'enregistrement du résultat de la mesure.

A la différence de la mécanique classique où l'on suppose que l'interaction entre l'objet et l'appareil peut être aussi petite que l'on

veut, la mécanique quantique établit que l'interaction entre l'objet quantique et l'appareil ne peut en principe être réduite à zéro. L'appareil doit être un système classique ou plus exactement quasi classique car, dans le cas contraire, ses indications ne permettent pas de juger de l'état dans lequel se trouve l'objet quantique.

Chaque mesure se compose de deux étapes. La première consiste en ce que le système étudié « est soumis à une action extérieure physiquement réelle changeant le cours des événements » [41]. Cette étape est décrite par l'équation de Schrödinger pour le système en entier formé par l'objet quantique à étudier et l'appareil. Par suite de l'interaction entre l'appareil et l'objet un état pur de l'objet en étude devient en vertu du paragraphe 2.1.1. un mélange d'états purs de cet objet.

« La seconde étape de la mesure fait, parmi l'infinité d'états du mélange, le choix d'un certain état déterminé en tant qu'état effectivement réalisé. Cette seconde étape est un processus n'agissant pas par lui-même sur le cours des événements et changeant seulement notre connaissance des états réels » [41].

Cette seconde étape de la mesure n'est décrite par aucune équation dynamique car, si avant la mesure d'une certaine grandeur, le système se trouvait à l'état $|\psi\rangle$ ne coïncidant avec aucun des vecteurs propres $|\varphi_n\rangle$ de l'opérateur R, après la constatation du fait que la grandeur R est égale à l'une des valeurs propres r_n de l'opérateur R, il y a réduction du vecteur d'état $|\psi\rangle$, c'est-à-dire une transition par saut du système de l'état $|\psi\rangle$ à l'état $|\varphi_n\rangle$:

$$|\psi\rangle \to |\varphi_n\rangle. \tag{2.1.31}$$

La probabilité de trouver la valeur r_n est égale à $|\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2$. (Nous avons supposé qu'il y a mesure complète, c'est-à-dire que R est un système entier d'opérateurs mutuellement commutables.)

Si le résultat de la mesure n'est pas enregistré, c'est-à-dire s'il y a seulement interaction entre l'objet quantique et l'appareil quasi classique, l'état pur $|\psi\rangle$ d'un objet quantique devient un mélange d'états de matrice de densité égale à ρ:

$$|\psi\rangle \to \rho = \sum_n |\varphi_n\rangle |\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2 \langle\varphi_n|. \tag{2.1.32}$$

En d'autres termes, à la suite de l'interaction d'un objet quantique avec l'appareil la matrice de densité d'un certain état pur $|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ est soumise à la transformation

$$|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| \to \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|.$$

Si, avant la mesure, le système se trouvait dans un état de mélange

$$\rho = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle w_\alpha \langle\psi_\alpha|,$$

par suite de l'interaction avec l'appareil la matrice de densité ρ deviendra la matrice de densité ρ' :

$$\rho \to \rho' = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|, \qquad (2.1.33)$$

où

$$\langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle = \sum_\alpha w_\alpha |\langle\varphi_n|\psi_\alpha\rangle|^2.$$

Ainsi par suite de l'interaction de l'objet quantique avec l'appareil on voit apparaître un mélange d'états $|\varphi_n\rangle$ de probabilités égales à $\langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle$. La réduction de l'état signifie qu'à partir de ce mélange, après l'enregistrement du résultat des mesures on voit apparaître l'état pur $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$.

Si l'on procède à la mesure successive de deux ensembles de grandeurs physiques R_1 et R_2 (d'abord R_1, puis R_2), sans enregistrement du résultat de la mesure, l'interaction de l'objet avec les appareils servant à la mesure des grandeurs R_1 et R_2 aura alors pour résultat que la matrice de densité initiale ρ de l'objet deviendra en vertu de (2.1.33), la matrice de densité ρ' :

$$\rho' = \sum_2 |2\rangle \sum_1 \langle 1|\rho|1\rangle |\langle 1|2\rangle|^2 \langle 2|.$$

où $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont les vecteurs propres des ensembles d'opérateurs R_1 et R_2. On voit qu'à la suite des mesures, apparaît un mélange d'états purs $|2\rangle$ avec les probabilités

$$w_2 = \sum_1 \langle 1|\rho|1\rangle \langle 1|2\rangle|^2,$$

qui s'obtiennent à l'aide des lois de la théorie des probabilités. En effet, $\langle 1|\rho|1\rangle$ est la probabilité pour le système de se trouver, après l'interaction avec l'appareil servant à mesurer la grandeur R_1 à l'état $|1\rangle$, tandis que $|\langle 1|2\rangle|^2$ détermine la probabilité du passage du système de l'état $|1\rangle$ à l'état $|2\rangle$ après l'interaction avec l'appareil servant pour la mesure de R_2.

Le processus de mesure, sans enregistrement du résultat de la mesure, est accompagné d'une augmentation de l'entropie de l'objet de la mesure, qui selon von Neumann est donnée par la relation [83]

$$s = -\mathrm{Sp}\, \rho \ln \rho, \qquad (2.1.34)$$

et comme on peut le voir [83] satisfait à la relation

$$-\mathrm{Sp}\, \rho' \ln \rho' > -\mathrm{Sp}\, \rho \ln \rho, \qquad (2.1.35)$$

où ρ' est liée à ρ par la relation (2.1.33).

L'entropie d'un état pur est nulle, car si $\rho^2 = \rho$, on a $\mathrm{Sp}\, \rho \ln \rho = 0$. Donc, si l'on procède à l'enregistrement, c'est-à-dire à la réduction de l'état, l'entropie diminue jusqu'à zéro.

Si la matrice de densité satisfait à l'équation dynamique (2.1.7) l'entropie reste inchangée car

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Sp}\, \rho(t) \ln \rho(t) = 0. \tag{2.1.36}$$

§ 2.2. Quantification secondaire

2.2.1. Opérateur de création et d'annihilation des particules. Dans la suite nous allons étudier des systèmes formés par des particules identiques. Pour la description quantique de ces systèmes, on peut partir des états quantiques d'une particule. Si i désigne l'ensemble des nombres quantiques caractérisant l'état individuel d'une particule comme, par exemple, l'impulsion de la particule et l'une des projections de son spin, ou bien le moment total de la particule et sa projection sur l'un quelconque des axes, alors en se donnant le nombre de particules n_i ayant les nombres quantiques i ou autrement dit, le nombre de particules se trouvant dans l'état individuel i, on détermine complètement un certain état des particules identiques. Les états dans lesquels un certain nombre de particules n_i se trouve dans chacun des états individuels i (appelés nombres de remplissage) sont généralement désignés par le symbole $| \ldots n_i, \ldots, n_j, \ldots \rangle$, et la méthode permettant de décrire les états du système et de donner les nombres de remplissage n_i s'appelle méthode de quantification secondaire.

Si les particules sont des bosons, c'est-à-dire suivent la statistique de Bose-Einstein, les nombres de remplissage peuvent prendre des valeurs quelconques $n_i = 0, 1, 2, \ldots$; au contraire, si les particules sont des fermions, c'est-à-dire qu'elles suivent la statistique de Fermi-Dirac, les nombres de remplissage peuvent prendre seulement deux valeurs, $n_i = 0, 1$.

Les états $| \ldots n_i, \ldots, n_j, \ldots \rangle$ que nous supposerons orthonormés, forment un système complet de vecteurs dans l'espace hilbertien de tout le système, c'est-à-dire

$$\ldots \sum_{n_i} \ldots \sum_{n_j} \ldots | \ldots n_i, \ldots, n_j, \ldots \rangle \langle \ldots n_j, \ldots, n_i, \ldots | = 1. \tag{2.2.1}$$

Pour définir le formalisme de la quantification secondaire des opérateurs correspondant à diverses grandeurs physiques, on introduit les opérateurs de naissance a_i^+ et de destruction a_i des particules dans l'état individuel i. Considérons tout d'abord un système de

bosons identiques. L'opérateur $a_i^\dagger$ est alors donné par la relation

$$a_i^\dagger | \ldots n_i, \ldots \rangle = (n_i+1)^{1/2} | \ldots n_i+1, \ldots \rangle, \qquad (2.2.2)$$

d'où

$$a_i^\dagger = \ldots \sum_{n_i} \ldots \sum_{n_j} \ldots | \ldots n_i+1, \ldots, n_j, \ldots \rangle (n_i+1)^{1/2} \times \times \langle \ldots n_j, \ldots, n_i, \ldots |.$$

L'opérateur de destruction d'un boson a_i est défini comme un opérateur, conjugué hermitique de l'opérateur $a_i^\dagger$:

$$a_i = \ldots \sum_{n_i} \ldots \sum_{n_j} \ldots | \ldots n_i, \ldots, n_j, \ldots \rangle (n_i+1)^{1/2} \times \times \langle \ldots n_j, \ldots, n_i+1, \ldots |.$$

D'où il est facile de voir que

$$a_i \; | \ldots n_i, \ldots \rangle = n_i^{1/2} \; | \ldots n_i - 1, \ldots \rangle. \qquad (2.2.3)$$

A partir des formules (2.2.2), (2.2.3), on trouve

$$a_i^\dagger a_i \; | \ldots n_i, \ldots \rangle = n_i \; | \ldots n_i, \ldots \rangle,$$

c'est-à-dire $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$ est l'opérateur du nombre de particules dans l'état i.

Les définitions (2.2.2), (2.2.3) donnent les conditions de commutation pour les opérateurs a_i, $a_j^\dagger$:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0. \qquad (2.2.4)$$

Ces relations montrent que les valeurs propres de l'opérateur $a_i^\dagger a_i$ sont, comme il se devait, égales à $n_i = 0, 1, 2, \ldots$

L'état où tous les nombres de remplissage sont zéros s'appelle état de vide. Nous désignerons cet état par $| 0 \rangle \equiv \Phi_0$. Il est évident que

$$a_i \, | 0 \rangle = 0. \qquad (2.2.5)$$

En vertu de la formule (2.2.2), tous les vecteurs $| \ldots n_i, \ldots \ldots, n_j, \ldots \rangle$ peuvent être exprimés à l'aide des opérateurs de création $a_i^\dagger$ et de vide

$$| \ldots n_i, \ldots, n_j, \ldots \rangle = (\ldots n_i! \ldots n_j! \ldots)^{-1/2} \ldots \ldots (a_i^\dagger)^{n_i} \ldots (a_j^\dagger)^{n_j} \ldots | 0 \rangle. \qquad (2.2.6)$$

En substituant cette expression dans la condition (2.2.1) de complétude du système, on obtient:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_N} a_{i_1}^\dagger \ldots a_{i_N}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{i_N} \ldots a_{i_1} = 1. \qquad (2.2.7)$$

Nous allons introduire maintenant les vecteurs d'état

$$|i_1, \ldots, i_N\rangle = a^+_{i_1} \ldots a^+_{i_N} |0\rangle, \qquad (2.2.8)$$

qui, conformément à (2.2.7), forment un système complet de vecteurs

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \ldots i_N} |i_1, \ldots, i_N\rangle \langle i_N, \ldots, i_1| = 1, \qquad (2.2.9)$$

satisfaisant, en vertu de (2.2.4), (2.2.5), à la relation d'orthogonalité et de normalisation:

$$\langle i_1, \ldots, i_N | i'_{N'}, \ldots, i'_1\rangle = \delta_{NN'} \sum \delta_{i_1 i'_1} \ldots \delta_{i_N i'_N}, \qquad (2.2.10)$$

où la sommation s'étend sur toutes les permutations des indices primés. Un vecteur quelconque $|\psi\rangle$ peut être développé suivant ce système de vecteurs

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \ldots i_N} \psi(i_1, \ldots, i_N) |i_1, \ldots, i_N\rangle \qquad (2.2.11)$$

avec

$$\psi(i_1, \ldots, i_N) = \langle i_1, \ldots, i_N | \psi\rangle \qquad (2.2.12)$$

tiré de (2.2.10) et

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \ldots i_N} |\psi(i_1, \ldots, i_N)|^2 = 1.$$

Les grandeurs $\psi(i_1, \ldots, i_N)$ sont la fonction d'onde du système (avec un nombre indéterminé de particules) dans la représentation i correspondant à la fonction $|\psi\rangle$. Ces fonctions, en vertu de (2.2.8), sont symétriques par rapport à la permutation de deux arguments. Les grandeurs $(N!)^{-1} \sum_{i_1 \ldots i_N} |\psi(i_1, \ldots, i_N)|^2$ donnent la probabilité pour le système de contenir N particules.

Les opérateurs commutant avec l'opérateur du nombre total de particules $\hat{N}$:

$$\hat{N} = \sum_i a^+_i a_i, \qquad (2.2.13)$$

peuvent s'écrire comme une somme d'opérateurs du type

$$A^{(1)} = \sum_{i_1 i_2} a^+_{i_1} A_{i_1;\, i_2} a_{i_2}, \quad A^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} a^+_{i_1} a^+_{i_2} A_{i_1 i_2;\, i_3 i_4} a_{i_3} a_{i_4}, \qquad (2.2.14)$$

. . . .

où $A_{i_1;\, i_2}$, $A_{i_1 i_2;\, i_3 i_4}, \ldots$ sont des fonctions quelconques des indices i. En utilisant les relations de permutation (2.2.4) et les relations (2.2.8), (2.2.5), il est facile de voir que

$$A^{(1)} | i_1, \ldots, i_N\rangle = \sum_{s=1}^{N} \sum_{i'_s} A_{i'_s;\, i_s} | i_1, \ldots, i_{s-1}, i'_s, i_{s+1}, \ldots, i_N\rangle.$$

$$A^{(2)} | i_1, \ldots, i_N\rangle = \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant N} \sum_{i'_p i'_q} A_{i'_p i'_q;\, i_p i_q} | i_1, \ldots, i'_p, \ldots, i'_q, \ldots, i_N\rangle, \qquad (2.2.15)$$

. . . .

d'où en vertu de (2.2.10)

$$A_{i_1;\, i_2} = \langle i_1 | A^{(1)} | i_2\rangle, \quad A_{i_1 i_2;\, i_3 i_4} = \langle i_1, i_2 | A^{(2)} | i_3, i_4\rangle. \qquad (2.2.16)$$

Comme l'action de l'opérateur $A^{(1)}$ sur le vecteur unité $| i_1, \ldots, i_N\rangle$ est donnée par la matrice à une particule $\langle i_1 | A^{(1)} | i_2\rangle$, l'action de l'opérateur $A^{(2)}$ par la matrice à deux particules $\langle i_1, i_2 | A^{(2)} | i_3, i_4\rangle$, etc., $A^{(1)}$ est appelé opérateur unaire, $A^{(2)}$ opérateur binaire, etc.

Un rôle important sera ultérieurement joué par les représentations des impulsions et des coordonnées. Les fonctions d'onde $\psi(p_1, \ldots, p_N)$ $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ du système de vecteurs d'état $|\psi\rangle$ dans l'espace des impulsions, sont, en accord avec (2.2.12)

$$\psi(p_1, \ldots, p_N) = \langle 0 | a_{p_1} \ldots a_{p_N} | \psi\rangle, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Pour que l'impulsion de la particule p prenne des valeurs discrètes, il faut, comme on sait, supposer le volume $\mathscr{V}$ du système fini.)

Les fonctions d'onde correspondantes dans la représentation des coordonnées sont données par les formules

$$\psi(x_1, \ldots, x_N) = \mathscr{V}^{N/2} \sum_{p_1 \ldots p_N} \psi(p_1, \ldots, p_N)\, e^{ip_1 x_1 + \ldots + ip_N x_N} = \langle x_1, \ldots, x_N | \psi\rangle,$$

où

$$| x_1, \ldots, x_N\rangle = \psi^+(x_1) \ldots \psi^+(x_N) | 0\rangle. \qquad (2.2.17)$$

$\psi(x)$ et $\psi^+(x)$ sont ici les opérateurs d'annihilation et de création des particules au point x:

$$\psi(x) = \mathscr{V}^{-1/2} \sum_p a_p e^{ipx}, \quad \psi^+(x) = \mathscr{V}^{-1/2} \sum_p a_p^+ e^{-ipx}. \qquad (2.2.18)$$

C'est pourquoi $| x_1, \ldots, x_N\rangle$ est le vecteur d'état du système de N particules se trouvant aux points $x_1, \ldots, x_N$.

En utilisant (2.2.4) il est facile de voir que les opérateurs $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ satisfont aux conditions de commutation

$$[\psi(x), \psi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\psi(x), \psi(x')] = 0. \tag{2.2.19}$$

Remarquons que, pour l'état de vide, on a $\psi(x)\,\Phi_0 = 0$.

En utilisant les formules (2.2.14), (2.2.18), il est facile d'exprimer les opérateurs $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... en fonction des opérateurs $\psi(x)$ et $\psi^+(x)$:

$$A^{(1)} = \int d^3x_1\, d^3x_1'\,\psi^+(x_1)\, A(x_1;\, x_1')\,\psi(x_1'). \tag{2.2.20}$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{4}\int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_1'\, d^3x_2'\,\psi^+(x_1)\,\psi^+(x_2)\, \times$$
$$\times A(x_1,\, x_2;\, x_{1'},\, x_{2'})\,\psi(x_2')\,\psi(x_1'),$$

où

$$A(x_1;\, x_1') = \langle x_1 | A^{(1)} x_1'\rangle, \quad A(x_1,\, x_2;\, x_1',\, x_2') = \langle x_1,\, x_2 | A^{(2)} | x_1',\, x_2'\rangle$$

sont les éléments matriciels des opérateurs $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ dans la représentation x.

Jusqu'à présent, nous avons envisagé des systèmes formés de bosons identiques. D'une manière analogue, on peut développer le formalisme de quantification secondaire pour des systèmes formés de fermions identiques. Dans ce cas, on peut également introduire les opérateurs de création et d'annihilation des fermions a_i^+, a_i et utiliser les formules (2.2.12) pour les fonctions d'onde dans la représentation i. Comme ces fonctions, dans le cas des fermions, doivent être antisymétriques, lors de la permutation de deux arguments quelconques, les opérateurs a_i^+, a_j^+ pour les fermions doivent être anticommutatifs entre eux:

$$\{a_i^+,\, a_j^+\} = a_i^+ a_j^+ + a_j^+ a_i^+ = 0, \tag{2.2.21}$$

Pour trouver le résultat de l'action des opérateurs a_i^+ sur les vecteurs d'état $|\ldots n_i, \ldots, n_j, \ldots\rangle$, il faut préalablement mettre en ordre le système de nombres quantiques i des états individuels des particules, c'est-à-dire attribuer à chacun des états i un indice entier $k = 1, 2, \ldots$ La suite ordonnée ainsi obtenue $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ sera désignée simplement par $1, 2, \ldots, k, \ldots$

Nous allons trouver maintenant le résultat de l'action des opérateurs a_j^+ sur le vecteur d'état $|n_1, \ldots, n_j, \ldots\rangle$ à partir de la relation

$$a_j^+ |n_1, \ldots, n_j, \ldots\rangle = (-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} n_l}\,\delta_{n_j;\,0}\,|n_1, \ldots, n_j + 1, \ldots\rangle. \tag{2.2.22}$$

On vérifie aisément que cette définition se trouve en accord avec la formule (2.2.21).

En prodédant tout comme pour le système de bosons, on obtient à partir de la formule (2.2.22)

$$a_j|n_1, \ldots, n_j, \ldots\rangle = (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} n_i} \delta_{n_j, 1}|n_1, \ldots, n_j-1, \ldots\rangle. \quad (2.2.23)$$

En introduisant l'état de vide $\Phi_0 = |0\rangle$ comme un état dans lequel tous les nombres de remplissage sont nuls, on peut à l'aide de (2.2.22) trouver tous les vecteurs d'état $|n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle$

$$|n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle = (a_1^+)^{n_1} \ldots (a_k^+)^{n_k} \ldots |0\rangle. \quad (2.2.24)$$

A partir des relations (2.2.22), (2.2.23), on déduit les conditions de commutation des opérateurs a_i, a_j^+

$$\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}. \quad (2.2.25)$$

Les formules (2.2.24) montrent que la condition de complétude pour des vecteurs $|n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle$ est comme préalablement, donnée par (2.2.7) ; de plus il y a lieu de respecter l'ordre de succession des opérateurs d'annihilation et de création mentionnée dans (2.2.7).

La condition de complétude montre que toutes les formules (2.2.8) à (2.2.16), obtenues ci-dessus pour les bosons, restent également vraies pour les fermions. Notons que les opérateurs de création et d'annihilation d'un fermion $\psi^+(x)$, $\psi(x)$ au point x donnés comme précédemment, par les formules (2.2.18) satisfont à la condition de commutation suivante :

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = 0, \quad \{\psi(x), \psi^+(x')\} = \delta(x - x'). \quad (2.2.26)$$

Jusqu'à présent, pour plus de simplicité, nous avons supposé les particules sans spin, cependant il n'est pas difficile de tenir compte du spin de la particule. A savoir, si la particule a un spin s, on peut introduire les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule au point x avec une projection donnée de spin σ sur un certain axe $(-s \leqslant \sigma \ll +s)$:

$$\psi_\sigma(x) = \mathscr{V}^{-1/2} \sum_p e^{ipx} a_{p\sigma}, \quad \psi_\sigma^+(x) = \mathscr{V}^{-1/2} \sum_p e^{-ipx} a_{p\sigma}^+.$$

2.2.2. Opérateurs des grandeurs physiques. Nous allons maintenant passer à la recherche des opérateurs des grandeurs physiques dans la représentation de la quantification secondaire. Les opérateurs du nombre de particules N, de l'impulsion P_i et du moment

de la quantité de mouvement M_i sont donnés par les formules

$$N = \int d^3x \psi_\sigma^+(x)\,\psi_\sigma(x),$$

$$P_i = -\frac{i}{2}\int d^3x\left(\psi_\sigma^+(x)\frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi_\sigma^+(x)}{\partial x_i}\psi_\sigma(x)\right), \quad (2.2.27)$$

$$M_i = \int d^3x\psi_\sigma^+(x)\left\{s_i + \frac{i}{2}\varepsilon_{ikl}\left(x_l\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\right\}_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x),$$

où s_i ($i = 1, 2, 3$) sont les matrices spinorielles $(s_i)_{\sigma\sigma''}$ et ε_{ikl} un tenseur entièrement antisymétrique unitaire.

En utilisant les relations de permutation (2.2.19), (2.2.26) pour les opérateurs $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ ainsi que les relations

$$[A, BC] = [A, B]\,C + B\,[A, C] = -B\,\{A, C\} + \{A, B\}\,C,$$

vraies pour des opérateurs quelconques A, B, C, il est facile de voir que

$$[N, \psi(x)] = -\psi(x), \quad [P_k, \psi(x)] = i\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k},$$
$$[M_i, \psi(x)] = -\left\{s_i + \frac{i}{2}\varepsilon_{ikl}\left(x_l\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\right\}\psi(x). \quad (2.2.28)$$

Le hamiltonien du système dans le cas de l'interaction binaire entre les particules, décrite par l'énergie d'interaction $V(x - x')$ est donné par la formule

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V, \quad \mathscr{H}_0 = \frac{1}{2m}\int d^3x\nabla\psi_\sigma^+(x)\,\nabla\psi_\sigma(x),$$

$$V = \frac{1}{2}\int d^3x_1\,d^3x_2\psi_{\sigma_1}^+(x_1)\,\psi_{\sigma_2}^+(x_2)\,V(x_1 - x_2)\psi_{\sigma_2}(x_2)\,\psi_{\sigma_1}(x_1), \quad (2.2.29)$$

où m est la masse de la particule.

Si les particules sont douées de la charge électrique e et que le système se trouve dans un champ électromagnétique $A = (\boldsymbol{A}, \varphi)$ ($\boldsymbol{A}(x, t)$ et $\varphi(x, t)$ sont les potentiels vectoriel et scalaire), dans la dernière formule $\mathscr{H}_0$ est l'opérateur

$$\mathscr{H}_0(A) = \frac{1}{2m}\int d^3x\left(\nabla + \frac{ie}{c}\boldsymbol{A}\right)\psi_\sigma^+(x)\left(\nabla - \frac{ie}{c}\boldsymbol{A}\right)\psi_\sigma(x) +$$
$$+ e\int d^3x\psi_\sigma^+(x)\,\psi_\sigma(x)\,\varphi(x, t) - \frac{\mu}{c}\int d^3x\psi_\sigma^+(x)\,s_{\sigma\sigma'}\times$$
$$\times\psi_{\sigma'}(x)\,\boldsymbol{H}(x, t), \quad (2.2.30)$$

où $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ est le champ magnétique extérieur, μ le moment magnétique et s le spin de la particule. Nous allons voir que les opérateurs N, P_i, M_i, $\mathscr{H}_0$ sont unaires, et l'opérateur V binaire.

L'opérateur de l'énergie totale dans la représentation de la quantification secondaire donne l'évolution du vecteur d'état dans le temps

$$i\,\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=\mathscr{H}\Phi(t).$$

Nous allons maintenant trouver les opérateurs de densité des différentes grandeurs physiques. Conformément à (2.2.27), (2.2.29) les opérateurs de densité des masses $\rho^{(m)}(x)$, de l'impulsion $\pi_i(x)$ et de l'énergie $\varepsilon(x)$ sont donnés par les formules

$$\rho^{(m)}(x)=m\psi^+(x)\psi(x),\ \pi_i(x)=\frac{i}{2}\left(\frac{\partial\psi^+(x)}{\partial x_i}\psi(x)-\psi^+(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\right),$$

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{2m}\nabla\psi^+(x)\nabla\psi(x)+ \qquad (2.2.31)$$

$$+\frac{1}{2}\int d^3RV(R)\psi^+(x+R)\psi^+(x)\psi(x)\psi(x+R),$$

de telle sorte que

$$M\equiv mN=\int d^3x\rho^{(m)}(x),\qquad P_i=\int d^3x\pi_i(x),\qquad \mathscr{H}=\int d^3x\varepsilon(x).$$

Les opérateurs de densité de la charge électrique $\rho^{(e)}(x)$ et du courant $j^{(e)}(x)$ sont donnés par les formules

$$\rho^{(e)}(x)=\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\varphi(x)},\quad j^{(e)}(x)=-c\,\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta A(x)},$$

où $\mathscr{H}$ est le hamiltonien du système en présence d'un champ électromagnétique extérieur (A,φ). En vertu de (2.2.30), on a

$$\rho^{(e)}(x)=e\psi^+(x)\psi(x),$$

$$j^{(e)}(x)=-\frac{ie}{2m}\left\{\psi^+\left(\nabla-\frac{ie}{c}A\right)\psi-\left(\nabla+\frac{ie}{c}A\right)\psi^+\psi\right\}+$$

$$+c\frac{\mu}{s}\,\mathrm{rot}\,\psi^+\boldsymbol{s}\psi. \qquad (2.2.32)$$

Les opérateurs de densité des grandeurs physiques ont la structure suivante:

$$a(x)=\sum_{nm}\int d^3x_1\ldots d^3x'_m\psi^+(x'_1)\ldots\psi^+(x'_m)\times$$

$$\times a(x;\,x'_1,\ldots,x'_m;\,x_1,\ldots,x_n)\psi(x_1)\ldots\psi(x_n), \qquad (2.2.33)$$

où le noyau $a(x;x'_1,\ldots,x'_m;x_1,\ldots,x_n)$ décroît rapidement, si ne serait-ce qu'un des points $x'_1,\ldots,x'_m,x_1,\ldots,x_n$, s'éloigne du point x. Nous appellerons les opérateurs de ce type quasi locaux. Si le noyau a est proportionnel aux fonctions delta et à leurs dérivées (d'ordre fini), de telle sorte que l'opérateur $a(x)$ ne contient que les opérateurs $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ et leurs dérivées d'ordre fini au point

x, l'opérateur $a(x)$ est dit local. Les opérateurs $\rho^{(m)}(x)$, $\rho^{(e)}(x)$, $\pi_i(x)$ sont locaux, quant à l'opérateur $\varepsilon(x)$, il est quasi local.

Si le noyau $a(x)$ ne dépend que des différences $x - x_i$, $x - x_i'$, en vertu de (2.2.28), on a

$$i\frac{\partial a(x)}{\partial x_k} = [P_k, a(x)]. \tag{2.2.34}$$

Les opérateurs satisfaisant à cette relation sont appelés invariants par rapport à la translation. Les opérateurs $\rho^{(m)}(x)$, $\pi_i(x)$ sont invariants par rapport à la translation, quant à l'opérateur $j^{(e)}(x)$, il ne l'est pas.

Nous allons maintenant trouver les opérateurs de densité des flux de masse $j_i^{(m)}(x)$, de l'impulsion $t_{ki}(x)$ et de l'énergie $q_i(x)$ [85]. Nous montrerons préalablement que l'opérateur de la dérivée par rapport au temps, d'un opérateur quasi local quelconque $a(x)$, dans la représentation de Schrödinger $\dot{a}(x) = -i[a(x), \mathscr{H}]$, peut s'écrire comme suit

$$i\dot{a}(x) = [\varepsilon(x), A] - i\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_k}, \tag{2.2.35}$$

où $\varepsilon(x)$ est l'opérateur de densité de l'énergie, $A = \int d^3x a(x)$ et

$$a_k(x) = i\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, [\varepsilon(x-(1-\xi)x'), a(x+\xi x')]. \tag{2.2.36}$$

Pour la démonstration nous allons vérifier tout d'abord qu'on a les relations:

$$i[A, a(x)] = -\frac{\partial a_k'(x)}{\partial x_k}, \tag{2.2.37}$$

$$i[A, b(x)] = -i[B, a(x)] - \frac{\partial b_k(x)}{\partial x_k}, \tag{2.2.38}$$

où $a(x)$, $b(x)$ sont des opérateurs quasi locaux quelconques, B est lié à $b(x)$ par la même relation que A à $a(x)$ et

$$a_k'(x) = \frac{i}{2}\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, [a(x-(1-\xi)x'), a(x+\xi x')],$$

$$b_k(x) = i\int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, [a(x-(1-\xi)x'), b(x+\xi x')].$$

A cet effet, nous allons écrire $i[A, a(x)]$ sous la forme

$$i[A, a(x)] = \frac{i}{2}\int d^3x' \{[a(x-x'), a(x)] - [a(x), a(x+x')]\}$$

ou

$$i[A,\ a(x)] = \frac{i}{2}\int d^3x' \int_0^1 d\xi \frac{d}{d\xi}[a(x+\xi x'),\ a(x-(1-\xi)x')].$$

En remarquant que la grandeur ξ entre dans le commutateur par l'intermédiaire du terme $x + \xi x'$, on peut écrire cette formule comme suit

$$i[A,\ a(x)] = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [a(x+\xi x'),\ a(x-(1-\xi)x')],$$

ce qui permet d'obtenir (2.2.37).

Pour voir si (2.2.38) est vrai, il y a lieu de remplacer, dans (2.2.37), l'opérateur $a(x)$ par $a(x) + b(x)$ et de prendre les produits du type $a \cdot b$; on obtient finalement

$$i[A,\ b(x)] = -i[B,\ a(x)] - \frac{\partial b_k(x)}{\partial x_k},$$

où

$$b_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [a(x-(1-\xi)x'),\ b(x+\xi x')] +$$

$$+\frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [b(x-(1-\xi)x'),\ a(x+\xi x')].$$

En effectuant dans le second terme, le changement de variables $\xi \to 1 - \xi$, $x' \to -x'$, on obtient la formule (2.2.38).

Remarquons que, si les opérateurs $a(x)$, $b(x)$ sont hermitiens, les opérateurs $a_k(x)$, $b_k(x)$ seront également hermitiens. De plus, ces opérateurs sont quasi locaux, car, vu les relations de permutations (2.2.19), (2.2.26), les opérateurs $a_k(x)$, $b_k(x)$ contiennent les opérateurs $\psi(x')$, $\psi^+(x')$ dont les arguments sont voisins du point x. A partir de (2.2.38), on obtient directement la formule (2.2.35).

La formule (2.2.35), avec les conditions de symétrie du hamiltonien, permet d'exprimer les opérateurs de densité des flux en fonction des opérateurs de densité des grandeurs physiques.

En posant, dans la formule (2.2.35), $a(x) = \rho^{(m)}(x)$ et en remarquant que

$$i[M,\ \varepsilon(x)] = 0, \qquad M = \int d^3x \rho^{(m)}(x),$$

on obtient

$$\dot{\rho}^{(m)}(x) = -\frac{\partial j_k^{(m)}(x)}{\partial x_k}, \tag{2.2.39}$$

où, en vertu de (2.2.36),

$$j_k^{(m)}(x) = i\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\,[\varepsilon(x-(1-\xi)x'),\ \rho^{(m)}(x+\xi x')].$$

Cette grandeur est l'opérateur de densité du flux de masse.

Puis, en posant dans (2.2.35), $a(x) = \pi_k(x)$ et en remarquant que

$$i[\varepsilon(x),\ P_k] = \frac{\partial\varepsilon(x)}{\partial x_k},\qquad P_k = \int d^3x\pi_k(x),$$

on obtient

$$\dot{\pi}_k(x) = -\frac{\partial t_{kl}(x)}{\partial x_l}, \tag{2.2.40}$$

oú, conformément à (2.2.36),

$$t_{kl}(x) = -\varepsilon(x)\delta_{kl} + i\int d^3x' x'_l \int_0^1 d\xi\,[\varepsilon(x-(1-\xi)x'),\pi_k(x+\xi x')].$$

Cette grandeur est l'opérateur de densité du flux d'impulsion (tenseur de tension).

Enfin en posant dans la formule (2.2.35) $a(x) = \varepsilon(x)$ et en tenant compte de ce que

$$i[\varepsilon(x),\ \mathcal{H}] = -\dot{\varepsilon}(x),$$

on obtient

$$\dot{\varepsilon}(x) = -\frac{\partial q_k(x)}{\partial x_k}, \tag{2.2.41}$$

où en vertu de (2.2.36)

$$q_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi\,[\varepsilon(x-(1-\xi)x'),\ \varepsilon(x+\xi x')].$$

Cette grandeur est l'opérateur de densité du flux d'énergie.

Remarquons que les expressions obtenues pour les opérateurs de flux ne sont en général pas univoques, car on peut leur ajouter des vecteurs quelconques dont les divergences sont nulles. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer que les expressions mentionnées pour les opérateurs de densité des flux ont des propriétés régulières de transformation par rapport aux transformations de Galilée.

Les opérateurs de densité des flux peuvent facilement s'exprimer à l'aide des formules (2.2.31), en fonction des opérateurs de champ $\psi(x)$, $\psi^+(x)$. Nous ne donnerons ici que l'expression de l'opérateur de densité du flux de masse

$$j_k^{(m)}(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial\psi^+(x)}{\partial x_k}\psi(x) - \psi^+(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}\right) \tag{2.2.42}$$

(nous avons tenu compte du fait que $[\rho^{(m)}(\boldsymbol{x}), \rho^{(m)}(\boldsymbol{x}')] = 0$). En comparant cette formule avec (2.2.31), on voit que $j_k^{(m)}(\boldsymbol{x}) = \pi_k(\boldsymbol{x})$. Ceci est lié à l'invariance des équations de la mécanique quantique par rapport à la transformation de Galilée.

Les opérateurs des grandeurs physiques additives — nombre de particules, impulsion et énergie du système — sont des intégrales spatiales des densités correspondantes qui sont des opérateurs quasi locaux. C'est pourquoi nous dirons que l'intégrale spatiale d'un opérateur quasi local quelconque (2.2.33) est additive. Si un opérateur additif commute avec le hamiltonien du système, c'est une intégrale additive du mouvement. Ainsi, par exemple, les opérateurs M, P_i, $\mathscr{H}$ sont des intégrales additives du mouvement, alors que M^2 ou $M\mathscr{H}$, en tant qu'intégrales du mouvement, ne sont pas additifs.

Si les opérateurs $a(\boldsymbol{x})$, $b(\boldsymbol{y})$ sont quasi locaux, l'opérateur $a_B(\boldsymbol{x}) = \exp(iB)\, a(\boldsymbol{x}) \exp(-iB)$, $B = \int d^3y\, b(\boldsymbol{y})$, sera également quasi local. En effet, rapportons-nous à la formule

$$e^{iB}\psi(\boldsymbol{x})\, e^{-iB} = \psi(\boldsymbol{x}) + i[B, \psi(\boldsymbol{x})] + \frac{i^2}{2}[B, [B, \psi(\boldsymbol{x})]] + \cdots$$

$b(\boldsymbol{y})$ étant un opérateur quasi local, les arguments des opérateurs $\psi(\boldsymbol{x}')$, $\psi^+(\boldsymbol{x}')$ qui figurent dans $[B, \psi(\boldsymbol{x})]$, $[B, [B, \psi(\boldsymbol{x})]]$ se trouveront, en vertu des relations canoniques de commutation (2.2.19), (2.2.26), au voisinage du point $\boldsymbol{x}$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme le hamiltonien est un opérateur additif, l'opérateur quasi local $a(\boldsymbol{x})$, dans la représentation de Heisenberg, $a(\boldsymbol{x}, t) = \exp(i\mathscr{H}t)\, a(\boldsymbol{x}) \exp(-i\mathscr{H}t)$ sera également quasi local.

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que la théorie de la quantification secondaire, que nous avons exposée, peut facilement être généralisée au cas où le système est formé de particules non pas d'une seule sorte, mais de deux sortes différentes.

§ 2.3. Symétrie des équations de la mécanique quantique

2.3.1. Invariance des équations de la mécanique quantique vis-à-vis des transformations continues. Les équations de la mécanique quantique peuvent être invariantes vis-à-vis de certaines transformations des opérateurs et des vecteurs d'état. Les plus générales de ces transformations sont liées aux propriétés de symétrie de l'espace et du temps. Nous allons étudier ici ces transformations, en utilisant la représentation de Heisenberg de la mécanique quantique. Seuls les opérateurs seront transformés, quant aux vecteurs d'état, ils resteront inchangés. Comme tous les opérateurs peuvent s'exprimer en fonction des opérateurs $\psi(\boldsymbol{x}, t)$, $\psi^+(\boldsymbol{x}, t)$ satisfaisant aux équa-

tions du mouvement (voir (2.1.8))

$$i\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t}=[\psi(x,\ t),\ \mathcal{H}(\psi)],\quad i\frac{\partial\psi^{+}(x,\ t)}{\partial t}=[\psi^{+}(x,\ t),\ \mathcal{H}(\psi)] \tag{2.3.1}$$

et aux relations de commutation simultanées (voir (2.2.19), (2.2.26))

$$[\psi(x,\ t),\ \psi(x',\ t)]=0,\quad [\psi(x,\ t),\ \psi^{+}(x',\ t)]=\delta(x-x'), \tag{2.3.2}$$

il suffit de considérer les représentations de ces seuls opérateurs. ($\mathcal{H}(\psi)$ est ici le hamiltonien du système exprimé en fonction de ψ, ψ^{+}. Nous avons écrit les relations de commutation seulement pour les opérateurs de Bose; pour les relations de commutation pour les opérateurs de Fermi voir (2.2.26).)

Considérons la transformation suivante des opérateurs:

$$\psi(x,\ t)\rightarrow\psi'(x,\ t)=L(x,\ t;\ \psi(x'',\ t)), \tag{2.3.3}$$

où $L(x,\ t;\ \psi(x'',\ t))$ est une certaine fonctionnelle de $\psi(x'',\ t)$, $\psi^{+}(x'',\ t)$. Nous allons supposer que les opérateurs transformés $\psi'(x,\ t)$, $\psi'^{+}(x,\ t)$ satisfont aux mêmes relations et aux équations du mouvement que les opérateurs $\psi(x,\ t)$, $\psi^{+}(x,\ t)$. Comme les opérateurs ψ', ψ'^{+} et ψ, ψ^{+} doivent satisfaire aux mêmes relations de commutation, ils sont liés entre eux par une transformation unitaire *)

$$\psi'(x,\ t)=U_t\psi(x,\ t)\,U_t^{+}, \tag{2.3.4}$$

où $U_t\equiv U(t,\psi(x,\ t))$ est un certain opérateur unitaire, fonctionnelle de $\psi(x,\ t)$, $\psi^{+}(x,\ t)$, qui peut être une fonction explicite du temps t. Si les transformations (2.3.3) ne contiennent pas t d'une manière explicite, U_t ne dépendra du temps que par l'intermédiaire des arguments fonctionnels $\psi(x,\ t)$, $\psi^{+}(x,\ t)$. Remarquons qu'un opérateur quelconque A commutant avec ψ et ψ^{+} est un multiple de l'opérateur unitaire I:

$$[A,\ \psi(x,\ t)]=[A,\ \psi^{+}(x,\ t)]=0,\quad A\sim I, \tag{2.3.5}$$

il est facile d'en conclure que l'opérateur unitaire U_t est donné par la transformation (2.3.3), à un facteur numérique près égal en module à l'unité.

En vertu de (2.3.4), on a

$$\mathcal{H}(\psi')\equiv\mathcal{H}(\psi',\ \psi'^{+})=U_t\mathcal{H}(\psi)\,U_t^{+}. \tag{2.3.6}$$

Comme les opérateurs ψ, ψ^{+} et ψ', ψ'^{+} satisfont aux mêmes relations de commutation, la condition d'invariance des équations du mou-

*) Nous rejetons d'une manière non explicite la possibilité d'existence de représentations unitaires non équivalentes pour les relations de commutation canoniques, car les opérateurs unitaires U_t figurant dans (2.3.4) seront trouvés d'une manière explicite.

vement peut se formuler comme suit

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t}=[\psi',\ \mathscr{H}(\psi')],\quad i\frac{\partial\psi'^{+}}{\partial t}=[\psi'^{+},\ \mathscr{H}(\psi')].$$

Compte tenu de (2.3.6), ainsi que des équations (2.3.1), (2.3.5) on obtient $U_t = U\exp\{i\varphi(t)\}$, où U est un opérateur unitaire ne dépendant pas du temps, et $\varphi(t)$ une fonction réelle quelconque du temps. L'opérateur U_t étant donné à un facteur de phase près, on peut poser $\varphi(t)\equiv 0$, c'est-à-dire supposer que $U_t\equiv U$ ne dépend pas du temps, $dU/dt = 0$. Il s'ensuit

$$-i\frac{\partial' U}{\partial t}=[U,\ \mathscr{H}(\psi)], \tag{2.3.7}$$

où $\partial'/\partial t$ est la dérivée partielle de l'opérateur $U(t, \psi(x, t))$ par rapport au premier argument t. Remarquant qu'en vertu de (2.3.6),

$$\mathscr{H}(\psi') = \mathscr{H}(\psi) + [U,\ \mathscr{H}(\psi)]\,U^{+},$$

on peut écrire la condition d'invariance des équations du mouvement (2.3.7) sous la forme

$$\mathscr{H}(\psi')=\mathscr{H}(\psi)-i\frac{\partial' U}{\partial t}U^{+}. \tag{2.3.8}$$

Comme $dU/dt = 0$ chaque transformation de symétrie (2.3.3) donne lieu à une intégrale du mouvement U.

Les relations mentionnées se rapportent, dans le cas général, aux transformations arbitraires (2.3.3) qui peuvent être tant linéaires que non linéaires par rapport à ψ. Dans la suite, nous n'envisagerons que les transformations (2.3.3) linéaires par rapport à ψ qui peuvent dépendre d'un certain nombre de paramètres continus λ^a ($a = 1, \ldots, n$) et qui forment un certain groupe $\mathscr{G}$ [36]. Ceci signifie que si on effectue successivement deux transformations (2.3.3) auxquelles correspondent deux valeurs λ_1 et λ_2 des paramètres λ, à la transformation résultante correspondent certaines valeurs λ_3 des paramètres λ:

$$\lambda_3 = \lambda(\lambda_2,\ \lambda_1), \tag{2.3.9}$$

déterminées d'une manière univoque par les grandeurs λ_1, λ_2. De plus, les opérateurs unitaires $U\equiv U(\lambda)$ que nous avons introduits forment une représentation unitaire du groupe $\mathscr{G}$, agissant dans l'espace hilbertien des vecteurs d'état du système

$$U(\lambda_3) = U(\lambda_2)\,U(\lambda_1). \tag{2.3.10}$$

Supposons qu'aux valeurs $\lambda = \lambda_0$ corresponde une transformation identique dans le groupe $\mathscr{G}$, de sorte que $U(\lambda_0) = 1$. Aux transformations infiniment voisines de la transformation identique correspondent les valeurs $\lambda_0 + \delta\lambda$ des paramètres λ et l'opérateur unitaire

$U(\lambda_0 + \delta\lambda)$:

$$U(\lambda_0 + \delta\lambda) = 1 + i \sum_{a=1}^{n} \delta\lambda^a G_a.$$

Les opérateurs hermitiens G_a figurant ici sont dits générateurs du groupe $\mathcal{G}$. Ce sont, de toute évidence, des intégrales du mouvement. Comme $U(\lambda_2)\, U(\lambda_1)\, U^+(\lambda_2) = U(\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1})))$, où λ^{-1} sont les valeurs des paramètres λ correspondant à la transformation inverse, c'est-à-dire $\lambda(\lambda, \lambda^{-1}) = \lambda_0$, pour $\lambda_1 = \lambda_0 + \delta\lambda$, les paramètres $\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))$ seront voisins de λ_0. C'est pourquoi

$$U(\lambda_2)\, G_b U^+(\lambda_2) = \sum_c u_{bc}(\lambda_2)\, G_c,$$

où les grandeurs $u_{bc}(\lambda_2)$ sont données seulement par la loi d'addition (2.3.9) des paramètres λ du groupe $\mathcal{G}$. Il est facile d'en conclure que

$$[G_a, G_b] = \sum_c g_{abc} G_c \tag{2.3.11}$$

avec $g_{abc} = -i\,(\partial u_{bc}(\lambda)/\partial\lambda^a)_{\lambda=\lambda_0}$. Ces grandeurs appelées *constantes structurales du groupe* ne dépendent pas, comme le montre la démonstration, de la représentation du groupe et sont données seulement par la loi d'addition du groupe.

Les translations et rotations spatiales, liées à la symétrie de l'espace, ainsi que la transformation de Galilée et les transformations de phase sont des transformations linéaires continues.

Lors des transformations de translation

$$\psi_\sigma(\boldsymbol{x}, t) \to \psi'_\sigma(\boldsymbol{x}, t) = \psi_\sigma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}, t) \tag{2.3.12}$$

formant un groupe continu de paramètres de déplacement $\boldsymbol{d}$ continu, les relations de permutation pour les opérateurs ψ, ψ^+ et ψ', ψ'^+ restent inchangées, c'est pourquoi

$$\psi'(\boldsymbol{x}, t) = \psi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}, t)\; U_d \psi(\boldsymbol{x}, t)\, U_d^+, \tag{2.3.13}$$

d'où, compte tenu de la relation (2.2.28), on obtient l'expression suivante pour l'opérateur unitaire U_d:

$$U_d = \exp\{i\boldsymbol{P}\boldsymbol{d}\}. \tag{2.3.14}$$

Pour des translations infiniment petites on a $U_d = 1 + i\,\boldsymbol{P}\boldsymbol{d}$. C'est pourquoi l'opérateur d'impulsion $\boldsymbol{P}$ est un générateur du groupe de translations. Il est facile de voir que la condition d'invariance des équations du mouvement (2.3.8) est vérifiée si le hamiltonien du système est invariant par rapport à la translation (ceci signifie que pour le hamiltonien du système (2.2.29) le noyau $V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ est une fonction de la différence $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$). Notons que pour la translation on a $\partial' U_d/\partial t = 0$.

Les transformations des rotations spatiales sont données par les formules

$$\psi_\sigma(x, t) \to \psi'_\sigma(x, t) = R_{\sigma\sigma'}(a)\,\psi_{\sigma'}(a^{-1}x, t), \qquad (2.3.15)$$

où a est une matrice orthogonale de l'espace tridimensionnel, $a\tilde{a} = 1$ (le signe $\sim$ indique la matrice transposée), déterminée par trois paramètres indépendants continus (par exemple les angles d'Euler), et $R(a)$ une matrice unitaire dans l'espace spinoriel, qui doit satisfaire à la relation de groupe

$$R(a)\,R(a') = R(aa').$$

Comme les opérateurs ψ, ψ^+ et ψ', ψ'^+ satisfont aux mêmes relations de permutation, on a

$$\psi'(x, t) = R(a)\,\psi(a^{-1}x, t) = U_a\psi(x, t)\,U_a^+. \qquad (2.3.16)$$

Si le hamiltonien est de la forme (2.2.29), où $V(x - x')$ dépend seulement de $|x - x'|$, la condition d'invariance des équations du mouvement (2.3.8) sera vérifiée quel que soit R. Par contre si le hamiltonien contient des matrices spinorielles s_i dans des combinaisons invariantes $(x - x')\,s$, ss, comme par exemple, le hamiltonien de l'interaction dipolaire magnétique

$$V_d = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{s}\right)^2 \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^+(x_1)\psi^+(x_2) \times$$
$$\times \frac{(s_1 R)(s_2 R)\cdot 3 - R^2(s_1 s_2)}{R^5}\psi(x_2)\,\psi(x_1)$$

avec $R = x_1 - x_2$, la condition (2.3.8) (pour les rotations $\partial' U_a/\partial t = 0$) sera vérifiée si

$$R^+(a)\,s_i R(a) = a_{ik}s_k. \qquad (2.3.17)$$

Pour des rotations infiniment petites

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}, \quad |\varepsilon_{ik}| \ll 1$$

la matrice $R(a)$ peut s'écrire sous la forme

$$R(a) = 1 + \frac{i}{2}\varepsilon_{ik}\textstyle\sum_{ik}, \quad \sum_{ik} = -\sum_{ki}. \qquad (2.3.18)$$

En substituant (2.3.18) dans (2.3.17) et en se limitant aux termes linéaires par rapport à ε_{ik}, on obtient

$$i\left[\textstyle\sum_{ik}, s_l\right] = \delta_{kl}s_i - \delta_{il}s_k,$$

d'où, compte tenu de ce que $[s_i, s_k] = i\varepsilon_{ikl}s_l$, on trouve

$$\textstyle\sum_{ik} = \varepsilon_{ikl}s_l. \qquad (2.3.19)$$

Aux rotations infiniment petites correspond l'opérateur unitaire

$$U_a = 1 + \frac{i}{2}\varepsilon_{ik}M_{kl}, \quad M_{kl} = -M_{lk},$$

où M_{kl} est le générateur du groupe de rotations. En substituant cette expression dans (2.3.16) et en se limitant aux termes linéaires par rapport à ε_{ik}, on obtient

$$[M_{lk}, \psi(x, t)] = -\left\{\sum\nolimits_{lk} + i\left(x_k\frac{\partial}{\partial x_l} - x_l\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right\}\psi(x, t).$$

En comparant cette formule avec (2.2.28), on voit que

$$M_{ik} = \varepsilon_{ikl}M_l, \qquad (2.3.20)$$

où M_l est l'opérateur du moment de la quantité de mouvement du système.

Les transformations de Galilée sont données par les formules

$$\psi(x, t) \to \psi'(x, t) = \psi(x - ut, t)\exp\left\{imux - i\frac{mu^2}{2}t\right\}, \qquad (2.3.21)$$

où u est un paramètre continu du groupe. (Il est facile de vérifier que ces transformations forment effectivement un groupe.)

Comme les opérateurs ψ, ψ^+ et ψ', ψ'^+ satisfont aux mêmes relations de commutation, on a

$$\psi'(x, t) = \psi(x - ut, t)\exp\left\{imux - i\frac{mu^2}{2}t\right\} = U_u\psi(x, t)U_u^+. \qquad (2.3.22)$$

En remarquant que

$$u\left[\int d^3x'x'\rho^{(m)}(x', t), \psi(x, t)\right] = -mux\psi(x, t)$$

et en utilisant (2.2.28), on montre aisément que

$$U_u = \exp\left\{-iu\int d^3xx\rho^{(m)}(x, t) + iuPt\right\}. \qquad (2.3.23)$$

On peut transformer cette formule, en utilisant la relation bien connue

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)\exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right),$$

qui est vraie si $[A, B]$ commute avec A et B. Vu que l'opérateur

$$\left[\int d^3xx_i\rho^{(m)}(x, t), P_k\right] = i\delta_{ik}M$$

commute tant avec P_l, qu'avec $\int d^3xx_k\rho^{(m)}(x, t)$, on obtient

$$U_u = \exp\left\{iuPt + i\frac{u^2}{2}Mt\right\}\exp\left\{-iu\int d^3xx\rho^{(m)}(x, t)\right\}.$$

On voit que dans le cas des transformations de Galilée, à la différence des transformations (2.3.12), (2.3.15), on a $\partial' U_u/\partial t \neq 0$, à savoir

$$\frac{\partial' U_u}{\partial t} U_u^+ = iPu + i\frac{u^2}{2} M.$$

(Ceci est lié à ce que les transformations (2.3.21) contiennent le temps sous forme explicite.) Vu (2.3.21) on en déduit que la condition d'invariance des équations du mouvement (2.3.8) sera vérifiée si le hamiltonien $\mathcal{H}$ a la structure (2.2.29). (Il peut contenir également des termes du type V_d.)

La dérivée totale de l'opérateur U_u est nulle en vertu de la loi de l'uniformité du mouvement du centre d'inertie du système

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int d^3x x_k \rho^{(m)}(x, t) - P_k t\right\} = 0. \qquad (2.3.24)$$

En posant dans la formule (2.3.23) $t = 0$ et vu que pour $t = 0$ les opérateurs de Heisenberg et de Schrödinger coïncident, on peut écrire U_u comme suit:

$$U_u = \exp\left\{-iu \int d^3x x \rho^{(m)}(x)\right\}. \qquad (2.3.25)$$

Nous allons maintenant trouver les lois de transformation des densités des grandeurs physiques dans la représentation de Schrödinger pour la transformation unitaire U_u [85]. Remarquons à cet effet que l'opérateur de Schrödinger $\psi(x)$, en vertu de (2.3.22), se transforme lors de la transformation unitaire U_u conformément à la formule

$$U_u \psi(x) U_u^+ = \psi(x) \exp\{imux\}.$$

En utilisant les expressions (2.2.31) pour $\rho^{(m)}$, π_k, ε, on obtient

$$\begin{aligned} U_u \rho^{(m)}(x) U_u^+ &= \rho^{(m)}(x), \\ U_u \pi_k(x) U_u^+ &= \pi_k(x) + u_k \rho^{(m)}(x), \\ U_u \varepsilon(x) U_u^+ &= \varepsilon(x) + u_k \pi_k(x) + \frac{1}{2} u^2 \rho^{(m)}(x). \end{aligned} \qquad (2.3.26)$$

Pour établir les propriétés de transformation des densités des flux, nous allons utiliser les formules

$$i\int d^3x' x_l' \int_0^1 d\xi\, [\pi_l(x-(1-\xi)x'),\ \pi_k(x+\xi x')] = \\ = \delta_{il}\pi_k(x) + \delta_{kl}\pi_i(x), \qquad (2.3.27)$$

$$i\int d^3x' x_l' \int_0^1 d\xi\, [\pi_i(x-(1-\xi)x'),\ \rho^{(m)}(x+\xi x')] = \delta_{il}\rho^{(m)}(x),$$

qui découlent directement des définitions (2.2.31) des opérateurs $\pi_i(x)$, $\rho^{(m)}(x)$ et des relations de commutation (2.2.19), (2.2.26).

En utilisant les formules (2.2.39), (2.2.40), (2.2.41) et (2.3.26) et compte tenu de (2.3.27), il est facile de voir que

$$\begin{aligned} U_u j_k^{(m)}(x) U_u^+ &= j_k^{(m)}(x) + u_k \rho^{(m)}(x), \\ U_u t_{kl}(x) U_u^+ &= t_{kl}(x) + u_k j_l^{(m)}(x) + u_l \pi_k(x) + u_k u_l \rho^{(m)}(x), \qquad (2.3.28) \\ U_u q_k(x) U_u^+ &= q_k(x) + u_l t_{lk}(x) + \\ &\quad + u_k \varepsilon(x) + u_k u_l \pi_l(x) + \frac{1}{2} u^2 (j_k^{(m)}(x) + u_k \rho^{(m)}(x)). \end{aligned}$$

Nous utiliserons ces formules pour trouver les équations de l'hydrodynamique des liquides normaux et superfluides.

Les formules (2.3.12), (2.3.15), (2.3.21) ont un sens physique direct, à savoir elles donnent les propriétés de transformation des opérateurs ψ, ψ^+ lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre

$$\psi(x, t) \to \psi'(x', t),$$

où les grandeurs non primées se rapportent au système K, et les grandeurs primées au système K'. Dans le cas des translations on a alors

$$x \to x' = x + d \qquad (2.3.29)$$

et $\psi'(x, t)$ est donné par la formule (2.3.12). Dans le cas des rotations on a

$$x \to x' = ax \qquad (2.3.30)$$

et $\psi'(x, t)$ est donné par la formule (2.3.15). Enfin dans le cas des transformations de Galilée

$$x \to x' = x + ut, \qquad (2.3.31)$$

où u est la vitesse du système K par rapport à K', et $\psi'(x, t)$ est donné par la formule (2.3.21). (Soulignons que partout x et x' sont les coordonnées d'un même point dans les systèmes K et K'). Les transformations (2.3.12), (2.3.15), (2.3.21) sont linéaires et déterminent une certaine représentation des groupes (2.3.29), (2.3.30), (2.3.31).

Dans chaque système de référence nous allons trouver, à l'aide des opérateurs ψ, ψ^+, les opérateurs de différentes grandeurs physiques. Dans ce cas, si dans le système K, à une certaine grandeur physique correspond l'opérateur $a(x, t; \psi(x'', t))$, dans le système K' il lui correspondra l'opérateur $a(x', t; \psi'(x'', t)) = Ua(x', t; \psi(x'', t))U^+$. La valeur moyenne des grandeurs physiques est donnée, en vertu de (2.1.2) par l'opérateur statistique ρ, qui, dans la représentation de Heisenberg ne change pas lorsqu'on passe de K à K'. C'est pourquoi

la valeur moyenne des opérateurs se transforme conformément à la formule

$$a(x, t) = \mathrm{Sp}\, \rho a(x, t; \psi) \to a'(x', t) =$$
$$= \mathrm{Sp}\, \rho a(x', t; \psi') = \mathrm{Sp}\, \rho U a(x', t;, \psi) U^+. \quad (2.3.32)$$

Remarquons que les opérateurs $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ ne sont pas transformés dans la représentation de Schrödinger, pour ce qui est de l'opérateur statistique $\rho(t) = \exp(-i\mathcal{H}t)\, \rho \exp(i\mathcal{H}t)$, en vertu de (2.3.32) il se transforme conformément à la formule

$$\rho(t) \to \rho'(t) = e^{-i\mathcal{H}t} U^+ e^{i\mathcal{H}t} \rho(t)\, e^{-i\mathcal{H}t} U e^{i\mathcal{H}t}. \quad (2.3.33)$$

Parmi les transformations continues qui laissent invariantes les équations de la mécanique quantique, il y a lieu de citer encore les transformations de phase, à savoir

$$\psi(x, t) \to \psi'(x, t) = e^{-i\alpha} \psi(x, t), \quad (2.3.34)$$

où α est un nombre réel arbitraire. Les opérateurs ψ, ψ^+ et ψ', ψ'^+ satisfont aux mêmes relations de commutation et aux mêmes équations du mouvement si l'on suppose que le hamiltonien contient un même nombre d'opérateurs ψ et ψ^+. C'est pourquoi les opérateurs ψ et ψ' doivent être liés entre eux par une certaine transformation unitaire U_α qui agit dans l'espace de Hilbert et ne dépend pas du temps

$$\psi'(x, t) = e^{-i\alpha} \psi(x, t) = U_\alpha \psi(x, t) U_\alpha^+. \quad (2.3.35)$$

D'où compte tenu des relations de commutation pour les opérateurs ψ, ψ^+, on obtient

$$U_\alpha = \exp\{i\alpha N\}. \quad (2.3.36)$$

Pour une transformation de phase infiniment petite $U_\alpha = 1 + i\alpha N$. Donc l'opérateur du nombre de particules N est un générateur du groupe des transformations de phase.

Supposons maintenant que α, dans (2.3.34), soit une fonction des coordonnées et du temps : $\alpha = e\chi(x, t)$, e étant la charge de la particule. Comme dans ce cas ψ' et ψ satisfont également aux mêmes relations de permutation, on peut affirmer que ψ' et ψ seront liés par la transformation unitaire $U_\chi(t)$

$$\psi'(x, t) = e^{-ie\chi(x, t)} \psi(x, t) = U_\chi(t)\, \psi(x, t)\, U_\chi^+(t), \quad (2.3.37)$$

où l'opérateur unitaire $U_\chi(t)$ sera maintenant une fonction du temps. En vertu des relations de permutation (2.3.2) on a

$$U_\chi(t) = \exp\left\{\frac{ie}{m} \int d^3x \chi(x, t)\, \rho^{(m)}(x, t)\right\}. \quad (2.3.38)$$

Cette transformation unitaire joue un rôle important lors de l'étude du comportement du système dans un champ électromagnétique extérieur, lorsque le hamiltonien $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(A; \psi, \psi^+)$ dépend des potentiels du champ $A \equiv (\boldsymbol{A}, \varphi)$. Il est facile de voir que si le hamiltonien du système est de la forme (2.2.30), les opérateurs $\psi'(x, t)$ satisfont aux équations du mouvement

$$i \frac{\partial \psi'(x, t)}{\partial t} = [\psi'(x, t), \mathcal{H}(\tilde{A}; \psi', \psi'^+)],$$

où $\tilde{A} \equiv (\boldsymbol{A} + \partial\chi/\partial x, \varphi - \partial\chi/\partial t)$. Les transformations (2.3.37) sont appelées *transformations de calibrage*.

Remarquons que l'opérateur statistique dans la représentation de Schrödinger, lors des transformations (2.3.34), se transforme conformément à la formule

$$\rho(t) \to \rho'(t) = U_\alpha^+ \rho(t) U_\alpha, \qquad (2.3.39)$$

$\rho(t)$ et $\rho'(t)$ satisfont aux équations du mouvement (2.1.7) avec le même hamiltonien. (Dans la représentation de Schrödinger, les opérateurs $\psi(x)$ et $\psi^+(x)$ ne se transforment pas.)

Lors de la transformation de calibrage dans la représentation de Schrödinger l'opérateur statistique se transforme d'après la formule

$$\rho(t) \to \rho'(t) = U_\chi^+(t)\, \rho(t)\, U_\chi(t), \qquad (2.3.40)$$

l'opérateur $\rho(t)$ satisfaisant à l'équation du mouvement (2.1.7) avec le hamiltonien $\mathcal{H}(A; \psi, \psi^+)$, et l'opérateur $\rho'(t)$ à la même équation avec le hamiltonien $\mathcal{H}(\tilde{A}, \psi, \psi^+)$.

2.3.2. Iinvariance des équations de la mécanique quantique par rapport à la réflexion spatiale et à l'inversion du temps. Les équations de la mécanique quantique sont invariantes, non seulement par rapport aux transformations des translations spatiales et des rotations, mais également par rapport aux réflexions spatiales :

$$x_i \to x_i' = -x_i, \quad t \to t' = t. \qquad (2.3.41)$$

Les opérateurs $\psi(x, t)$ sont alors transformés conformément à la formule

$$\psi(x, t) \to \psi'(x', t) = \psi(x, t). \qquad (2.3.42)$$

Vu que les opérateurs $\psi(x, t)$ et $\psi'(x, t)$ satisfont aux mêmes relations de commutation et aux mêmes équations du mouvement (on suppose que la fonction $V(x)$ figurant dans le hamiltonien (2.2.29) est paire, $V(x) = V(-x)$), ils sont liés entre eux par une transformation unitaire $\mathcal{P}$ ne dépendant pas du temps :

$$\psi'(x, t) = \psi(-x, t) = \mathcal{P}\psi(x, t)\,\mathcal{P}^+. \qquad (2.3.43)$$

Il s'ensuit que $[\mathcal{P}^2, \psi] = 0$. Comme $\mathcal{P}$ est donné à un facteur de phase près, on peut, en vertu de (2.3.5), considérer que $\mathcal{P}^2 = 1$ et,

par conséquent, les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{P}$ sont égales à ± 1. L'opérateur $\mathcal{P}$ est appelé *opérateur de parité spatiale.*

Considérons maintenant une autre transformation discrète: *l'inversion du temps*

$$x_i \to x_i' = x_i, \quad t \to t' = -t. \tag{2.3.44}$$

Nous allons supposer que le système se trouve dans un champ électromagnétique extérieur $A(x, t) \equiv (A(x, t), \varphi(x, t))$, dont dépendent tant le hamiltonien du système $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(A; \psi)$, que l'opérateur de Heisenberg $\psi(x, t) \equiv \psi^A(x, t)$. En électrodynamique classique, lors de l'inversion du temps le potentiel vectoriel change de signe, et le potentiel scalaire reste inchangé

$$A(x, t) \to A'(x, t) = \bar{A}(x, -t), \qquad \bar{A}(x, t) \equiv$$
$$\equiv (-A(x, t), \varphi(x, t)). \tag{2.3.45}$$

A l'inversion du temps correspond la transformation suivante de ψ:

$$\psi(x, t) \to \psi'(x', t') = T\psi^{A'}(x, t)^*, \tag{2.3.46}$$

où T est une matrice unitaire, $TT^+ = 1$, qui agit sur les indices spinoriels ψ, l'astérisque désignant l'opération de conjugaison complexe. Cette opération dépend du choix de la base dans l'espace de Hilbert. En effet, si l'on a choisi une certaine base dans l'espace hilbertien, l'opération de conjugaison complexe dans cette base est donnée par la formule

$$\langle n \mid \psi^* \mid n' \rangle = \langle n \mid \psi \mid n' \rangle^*. \tag{2.3.47}$$

Les opérateurs $\psi(x, t)$ et $\psi'(x, t)$ satisfaisant aux mêmes relations de commutation, ils sont liés par l'opérateur unitaire U (agissant dans l'espace de Hilbert)

$$\psi'(x, t) = U\psi(x, t)\, U^+ = T\psi^{A'}(x, -t)^*. \tag{2.3.48}$$

L'opérateur $\psi^{A'}(x, t)$, par définition, satisfait à l'équation suivante

$$i\,\frac{\partial\psi^{A'}(x, t)}{\partial t} = [\psi^{A'}(x, t), \mathcal{H}(A'; \psi^{A'})],$$

d'où, compte tenu de (2.3.46) on obtient

$$i\,\frac{\partial\psi'(x, t)}{\partial t} = [\psi'(x, t), \mathcal{H}^*(\bar{A}, (T^{-1}\psi'(x, t))^*)].$$

Comme les relations de commutation pour les opérateurs ψ et ψ' coïncident, pour que les équations du mouvement pour ψ et ψ' coïncident aussi, il faut que la relation

$$\mathcal{H}^*(\bar{A}, (T^{-1}\psi')^*) = \mathcal{H}(A, \psi')$$

soit vérifiée. Cette relation devant être vérifiée pour A et ψ quelconques, en remplaçant ici $A \to \bar{A}$ et $\psi' \to T\psi^*$, on obtient

$$\mathcal{H}^*(A, \psi) = \mathcal{H}(\bar{A}, T\psi^*). \tag{2.3.49}$$

Il est facile de voir que le hamiltonien (2.2.30) (dans lequel peut également figurer V_d) satisfait à l'équation (2.3.49) si la matrice T satisfait à l'équation

$$T^+ s_i T = -s_i^* \tag{2.3.50}$$

(s_i^* étant la matrice complexe conjuguée de s_i). Si le spin des particules est égal à 1/2, c'est-à-dire $s_i = 1/2\sigma_i$, où σ_i sont les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a $T = \sigma_2$.

En utilisant (2.3.48), on peut voir comment se transforment, lors d'une transformation unitaire U correspondant à l'inversion du temps, les opérateurs des différentes grandeurs physiques. Considérons, par exemple, les opérateurs de densité de la charge et de densité du courant électrique (2.2.32). Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} U\rho^{(e)}(x, t) U^+ &= \rho^{(e)*}(x, -t)\,|_{A\to\bar{A}}, \\ Uj^{(e)}(x, t) U^+ &= -j^{(e)*}(x, -t)\,|_{A\to\bar{A}}. \end{aligned} \tag{2.3.51}$$

Les opérateurs des autres grandeurs physiques se transforment de la même manière

$$U\xi(x, t)\, U^+ = \varepsilon\xi^*(x, -t)\,|_{A\to\bar{A}}, \tag{2.3.52}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Ce facteur est appelé *signature temporelle* de l'opérateur ξ.

Notons qu'au lieu de l'opérateur unitaire U, on utilise souvent aussi l'opérateur antiunitaire $\bar{U} = UK$ [36], où K est un opérateur non linéaire complexe conjugué

$$K\,|n\rangle = |n\rangle, \qquad K(\alpha\,|\varphi\rangle + \beta\,|\varphi'\rangle) = \alpha^* K\,|\varphi\rangle + \beta^* K\,|\varphi'\rangle$$

et $|n\rangle$ une base, dans laquelle l'opération $*$ dans ψ^* est déterminée (voir (2.3.47)); α, β sont des nombres complexes arbitraires et $|\varphi\rangle$, $|\varphi'\rangle$ des vecteurs arbitraires dans l'espace de Hilbert. Il est facile de voir que

$$K^2 = 1, \quad (K\varphi', K\varphi) = (\varphi', \varphi)^*$$

et

$$K\psi(x)\,K = \psi^*(x), \quad K\mathcal{H}K = \mathcal{H}^*.$$

C'est pourquoi la condition (2.3.49) peut, en vertu de (2.3.48), s'écrire comme

$$\mathscr{H}(A, \psi) = \bar{U}\mathscr{H}(\bar{A}, \psi)\bar{U}^{-1}.$$

On voit que pour $A = 0$, $\bar{U}$ commute avec le hamiltonien. Cependant l'opérateur $\bar{U}$ ne correspond pas à une grandeur conservable (du type parité spatiale) car il est non linéaire.

§ 2.4. Principe d'affaiblissement des corrélations et relations ergodiques pour les systèmes quantiques

2.4.1. Principe d'affaiblissement des corrélations. Dans le paragraphe 1.1.2 nous avons formulé le principe d'affaiblissement des corrélations pour les systèmes classiques, principe en vertu duquel les fonctions de distribution à particules multiples des systèmes classiques s'écrivent sous la forme de fonctions de distribution à particules multiples, avec un nombre d'arguments moindre, lors d'une augmentation infinie des différences des arguments correspondants. Les systèmes quantiques satisfont à un principe analogue. Avant de formuler ce principe pour les systèmes quantiques, nous allons introduire les fonctions quantiques de distribution à particules multiples [18]:

$$f_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) = \\ = \mathrm{Sp}\, \rho\psi^+(y_1) \ldots \psi^+(y_l)\psi(x_1) \ldots \psi(x_k), \quad (2.4.1)$$

où ρ est l'opérateur statistique du système. Il est évident que

$$f_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) = f^*_{l,k}(y_l, \ldots, y_1; x_k, \ldots, x_1).$$

En particulier, pour $k = l = 1$, on obtient la fonction de distribution à une particule $f_{1,1}(x; y) = f^*_{1,1}(y; x)$, qui est une fonction complexe de deux arguments spatiaux x, y. A l'aide de cette fonction, on peut introduire une fonction de distribution réelle à une particule $f(x, p)$, dépendant des coordonnées et de l'impulsion [37]:

$$f(x, p) = \int d^3\xi e^{i\xi p} f_{1,1}\left(x + \frac{1}{2}\xi, x - \frac{1}{2}\xi\right). \quad (2.4.2)$$

Tout en étant réelle, cette fonction (qui est appelée *fonction de distribution de Wigner*) n'est cependant pas positive.

Si le système se trouve dans un état pur

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{N!}\int d^3x_1 \ldots d^3x_N \varphi(x_1, \ldots, x_N)\,|x_1, \ldots, x_N\rangle,$$

où $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ est la fonction d'onde du système, l'opérateur statistique du système peut s'écrire $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, c'est pourquoi en vertu de (2.4.1), (2.2.17), (2.2.5), la fonction de distribution à une

particule sera donnée par la formule

$$f_{1,1}(x'\,;\,x) = \langle\varphi\,|\,\psi^+(x)\,\psi(x')\,|\,\varphi\rangle = \frac{1}{(N-1)!}\int d^3x_2\ldots d^3x_N,$$
$$\varphi^*(x, x_2, \ldots, x_N)\,\varphi(x', x_2, \ldots, x_N).$$

Cette formule montre que $f_{1,1}(x'\,;x)$ est l'opérateur statistique d'une particule pour un système se trouvant dans l'état pur $|\,\varphi\rangle$ (voir (2.1.5)).

Si $N\to\infty$ et $\mathscr{V}\to\infty$, mais que $N/\mathscr{V}$ reste fini, les fonctions de distribution à particules multiples $f_{k,l}$ ont une limite finie différente de zéro. (Cette limite est appelée *limite thermodynamique*.) Notons que pour un état à impulsion donnée on a

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= (\mathscr{V})^{-1/2}\chi(x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)\exp\{ip(x_1 + \ldots + x_n)/N\}$$

la fonction $f_{1,1}(x'\,;x)$ (tout comme les autres fonctions de distribution à particules multiples) tend vers zéro pour $\mathscr{V}\to\infty$ et N fini. Dans la suite nous entendrons par fonctions de distribution à particules multiples des fonctions (2.4.1) dans lesquelles on a fait le passage à la limite thermodynamique.

Les fonctions de distribution à particules multiples (2.4.1) sont symétriques par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_k$ et aux variables $y_1, \ldots, y_l$ pour des systèmes formés de bosons identiques et antisymétriques par rapport à ces variables pour des systèmes formés de fermions identiques.

Les fonctions de distribution à particules multiples pour les systèmes homogènes dans l'espace ne changent pas lors de la transformation de translation *)

$$f_{k,l}(x_1, \ldots, x_k;\, y_1, \ldots, y_l) =$$
$$= f_{k,l}(x_1 + d, \ldots, x_k + d;\, y_1 + d, \ldots, y_l + d),$$

où d est un vecteur arbitraire. En utilisant (2.2.28), il est facile de vérifier que dans le cas d'état du système à homogénéité spatiale, l'opérateur statistique ρ commute avec l'opérateur de l'impulsion

$$[\rho, P_k] = 0.$$

Nous allons maintenant formuler le principe d'affaiblissement des corrélations pour les systèmes quantiques [19]. Supposons que les points $x_1, \ldots, x_s$ se trouvent au voisinage du point X, et les points $y_1, \ldots, y_p$ au voisinage du point Y et qu'on a

$$\mathrm{Sp}\,\rho\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_s)\,\psi^+(y_1)\ldots\psi(y_p)\xrightarrow[X-Y\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[X-Y\to\infty]{}\mathrm{Sp}\,\rho\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_s)\cdot\mathrm{Sp}\,\rho\psi^+(y_1)\ldots\psi(y_p)$$

*) Dans certains cas pour les systèmes dégénérés (voir 3.2.1) la condition d'homogénéité spatiale se formule d'une autre façon (voir 6.2.2).

pour s et p quelconques, et avec cela le passage à la limite $X - Y \to \infty$ s'effectue après le passage à la limite thermodynamique. On dit alors que l'opérateur statistique ρ, ainsi que la fonction de distribution à particules multiples satisfont au *principe d'affaiblissement des corrélations*. Il est évident qu'alors les fonctions de distribution à particules multiples d'ordre supérieur déterminent les fonctions de distribution à particules multiples d'ordre inférieur.

Le principe d'affaiblissement des corrélations peut se formuler sous forme plus compacte à l'aide de la notion d'opérateur quasi local (voir le paragraphe 2.2.2). Il est facile de voir que le principe d'affaiblissement des corrélations sera satisfait si, pour une paire quelconque d'opérateurs quasi locaux $a(x)$, $b(y)$, on a :

$$\mathrm{Sp}\,\rho a(x)\,b(y) \xrightarrow[x-y\to\infty]{} \mathrm{Sp}\,\rho a(x)\cdot \mathrm{Sp}\,\rho b(y). \qquad (2.4.3)$$

A plus strictement parler, cette relation doit être vérifiée pour $|x-y| \gg r_c$ où r_c est le rayon de corrélation dans l'état ρ.

Dans le paragraphe 2.2.2 nous avons montré que si $a(x)$ est un opérateur quasi local et $\mathscr{B}$ un opérateur additif, l'opérateur

$$a_{\mathscr{B}}(x) = e^{i\mathscr{B}} a(x)\, e^{-i\mathscr{B}}$$

sera également quasi local. Il en résulte, compte tenu de (2.4.3), que l'opérateur $e^{-i\mathscr{B}}\rho e^{i\mathscr{B}}$ satisfera au principe d'affaiblissement des corrélations si l'opérateur statistique ρ y satisfait. En particulier, il s'ensuit que l'opérateur statistique dans la représentation de Schrödinger $\rho(t) = e^{-i\mathscr{H}t}\rho e^{i\mathscr{H}t}$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations pour tous les instants t, s'il satisfait à ce principe à l'instant initial.

Supposons que A soit un certain opérateur additif hermitien. L'opérateur statistique

$$\rho = \exp\{\Omega_A - A\}, \quad \Omega_A = -\ln \mathrm{Sp}\exp(-A) \qquad (2.4.4)$$

satisfera alors au principe d'affaiblissement des corrélations si pour les fonctions de distribution à particules multiples correspondantes la limite thermodynamique existe. (Cette affirmation peut être démontrée dans le cadre de la théorie des perturbations.) En particulier, l'opérateur statistique de Gibbs

$$w = \exp\{\Omega - \beta(\mathscr{H} - uP - \mu N)\}, \quad \mathrm{Sp}\,w = 1 \qquad (2.4.4')$$

satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations (β étant l'inverse de la température, u la vitesse du système et μ le potentiel chimique).

Notons que dans le cas général l'affirmation inverse n'est pas vraie : tout opérateur satisfaisant au principe d'affaiblissement des corrélations ne doit pas obligatoirement être de la forme (2.4.4).

En particulier, la distribution microcanonique $w^{(m)} = C^{-1}\,\delta\,(E - \mathcal{H})$ n'a pas la structure (2.4.4) bien qu'elle satisfasse au principe d'affaiblissement des corrélations et donne les mêmes expressions pour les fonctions de distribution à particules multiples (2.4.1) que la distribution canonique. (Cette affirmation est l'essence du théorème d'équivalence des différents ensembles thermodynamiques [115].) En nous limitant dans la suite aux fonctions de distribution à particules multiples, nous allons considérer que l'opérateur statistique qui, à la limite $\mathscr{V} \to \infty$, satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations prend la structure (2.4.4).

Les fonctions de distribution à particules multiples (2.4.1) peuvent s'exprimer à l'aide de la *fonctionnelle génératrice* $\mathcal{F}\,(u, u^*)$ [86]

$$\mathcal{F}\,(u, u^*) = \operatorname{Sp} \rho \exp\left\{\int d^3x u^*(x)\, \psi^+(x)\right\} \exp\left\{\int d^3x u(x)\, \psi(x)\right\}, \tag{2.4.5}$$

où $u\,(x)$ et $u^*\,(x)$ sont des fonctions c-numériques arbitraires des coordonnées dans le cas de systèmes formés de bosons *). Par contre, si le système est formé de fermions, les grandeurs $u\,(x)$, $u^*\,(x)$ seront anticommutatives entre elles et commutatives avec ψ^+, ψ:

$$\{u\,(x),\ u\,(x')\} = \{u^*\,(x),\ u^*\,(x')\} = \{u\,(x),\ u^*\,(x')\} = 0. \tag{2.4.6}$$

Pour des systèmes formés de bosons, les fonctions de distribution à particules multiples seront des dérivées fonctionnelles par rapport aux variables $u\,(x)$ et $u^*\,(x)$ de la fonctionnelle génératrice $\mathcal{F}$:

$$f_{k,\,l}(x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_l) = \\ = \frac{\delta^{k+l}\mathcal{F}\,(u, u^*)}{\delta u\,(x_1) \ldots \delta u\,(x_k)\,\delta u^*\,(y_1) \ldots \delta u^*\,(y_l)}\bigg|_{u=u^*=0}, \tag{2.4.7}$$

où les dérivées fonctionnelles $\delta\mathcal{F}/\delta u$, $\delta\mathcal{F}/\delta u^*$ sont liées aux variations de la fonctionnelle $\mathcal{F}\,(u, u^*)$ par la relation

$$\delta\mathcal{F}\,(u, u^*) = \int d^3x \delta u\,(x) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u\,(x)} + \int d^3x \delta u^*\,(x) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u^*\,(x)}.$$

Pour les systèmes formés de fermions, les fonctions de distribution à particules multiples peuvent également s'exprimer en fonction des dérivées fonctionnelles. Les grandeurs u, u^* étant anticommutatives, il y a lieu d'introduire ici des dérivées fonctionnelles de deux types: les dérivées gauches $\delta_l A/\delta u$, $\delta_l A/\delta u^*$ et les dérivées droites $\delta_r A/\delta u$, $\delta_r A/\delta u^*$. Ces dérivées sont liées aux variations de la

*) Dans [20] on peut trouver des applications de la méthode de la fonctionnelle génératrice dans le cas des problèmes de la mécanique statistique classique.

fonctionnelle A par les relations

$$\delta A = \int d^3x \delta u(x) \frac{\delta_l A}{\delta u(x)} + \int d^3x \delta u^*(x) \frac{\delta_l A}{\delta u^*(x)} =$$
$$= \int d^3x \frac{\delta_r A}{\delta u(x)} \delta u(x) + \int d^3x \frac{\delta_r A}{\delta u^*(x)} \delta u^*(x);$$

nous avons tenu compte du fait qu'en vertu de (2.4.6),

$$\{u, \delta u\} = \{u^*, \delta u\} = \{u, \delta u^*\} = \{u^*, \delta u^*\} = 0.$$

Remarquant que

$$\frac{\delta_l}{\delta u(x)} \exp \int d^3x' u(x') \psi(x') = \psi(x) \exp \int d^3x' u(x') \psi(x'),$$
$$\frac{\delta_r}{\delta u(x)} \exp \int d^3x' u(x') \psi(x') = \exp \left\{ \int d^3x' u(x') \psi(x') \right\} \cdot \psi(x),$$

il est facile de voir qu'on a la relation

$$f_{k,s}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_s) =$$
$$= \frac{\delta_l^s}{\delta u^*(y_1) \ldots \delta u^*(y_s)} \frac{\delta_r^k \mathcal{F}(u, u^*)}{\delta u(x_k) \ldots \delta u(x_1)} \bigg|_{u=u^*=0}. \tag{2.4.8}$$

Ainsi la fonctionnelle génératrice, tout comme les fonctions de distribution à particules multiples (ou l'opérateur statistique), peut être utilisée pour décrire l'état du système.

Nous allons montrer qu'à l'aide de la fonctionnelle génératrice, on peut également formuler le principe d'affaiblissement des corrélations. A cet effet prenons pour argument fonctionnel $u(x)$ la somme des deux fonctions $u_X(x)$ et $u_Y(x)$, la première n'étant différente de zéro que pour les valeurs de x voisines de X et la seconde, pour des valeurs de x voisines de Y. Dans ce cas, compte tenu des relations de commutation canoniques, on a de toute évidence pour les opérateurs ψ, ψ^+:

$$\mathcal{F}(u_X(x) + u_Y(x)) =$$
$$= \mathrm{Sp}\, \rho \exp \left\{ \int d^3x u_X^*(x) \psi^+(x) \right\} \exp \left\{ \int d^3x u_X(x) \psi(x) \right\} \times$$
$$\times \exp \left\{ \int d^3x u_Y^*(x) \psi^+(x) \right\} \exp \left\{ \int d^3x u_Y(x) \psi(x) \right\},$$
$$\mathcal{F}(u, u^*) \equiv \mathcal{F}(u),$$

et par conséquent, en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations (2.4.3), on a

$$\mathcal{F}(u_X(x) + u_Y(x)) \xrightarrow[X-Y\to\infty]{} \mathcal{F}(u_X(x)) \mathcal{F}(u_Y(x)). \tag{2.4.9}$$

Nous allons maintenant introduire les fonctions de corrélation $g_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$. A cet effet, il est commode d'in-

troduire tout d'abord la fonctionnelle génératrice $G(u, u^*)$ liée à la fonctionnelle $\mathscr{F}(u, u^*)$ par la relation

$$\mathscr{F}(u, u^*) = \exp G(u, u^*). \tag{2.4.10}$$

La relation entre $g_{k,l}$ et G dans le cas de systèmes formés de bosons est telle que

$$g_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) = \\ = \frac{\delta^{k+l} G(u, u^*)}{\delta u^*(y_1) \ldots \delta u^*(y_l)\, \delta u(x_1) \ldots \delta u(x_k)}\Bigg|_{u=u^*=0}. \tag{2.4.11}$$

Pour les systèmes formés de fermions les fonctions de corrélation $g_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ sont liées à la fonctionnelle G par une relation analogue à (2.4.8)

$$g_{k,s}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_s) = \\ = \frac{\delta_l^s}{\delta u^*(y_1) \ldots \delta u^*(y_s)} \cdot \frac{\delta_r^k G(u, u^*)}{\delta u(x_k) \ldots \delta u(x_1)}\Bigg|_{u=u^*=0}. \tag{2.4.12}$$

Le principe d'affaiblissement des corrélations formulé à l'aide de la fonctionnelle génératrice G peut, en vertu de (2.4.9), s'écrire comme suit

$$G(u_X(x) + u_Y(x)) \xrightarrow[X-Y\to\infty]{} G(u_X(x)) + G(u_Y(x)). \tag{2.4.13}$$

Ce qui, compte tenu de (2.4.11), (2.4.12) donne la propriété essentielle des fonctions de corrélation

$$g_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \to 0 \tag{2.4.14}$$

lorsqu'on écarte les arguments $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ d'une manière quelconque.

Nous allons donner des exemples de relations reliant les fonctions de distribution $f_{k,l}$ avec les fonctions de corrélation $g_{k,l}$ en supposant pour plus de simplicité que les valeurs moyennes $f_{k,l}$ diffèrent de zéro seulement pour $k = l$. Dans le cas de systèmes de bosons, en vertu de (2.4.10), (2.4.11), on a les relations

$$f_{1,1}(x_1; y_1) = g_{1,1}(x_1; y_1), \\ f_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2) = g_{1,1}(x_1; y_1)\, g_{1,1}(x_2; y_2) + \\ + g_{1,1}(x_1; y_2)\, g_{1,1}(x_2; y_1) + g_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2), \tag{2.4.15}$$

. . . .

Pour les systèmes formés de fermions, en vertu de (2.4.10), (2.4.12), on a les formules

$$f_{1,1}(x_1; y_1) = g_{1,1}(x_1; y_1), \\ f_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2) = g_{1,1}(x_1; y_2)\, g_{1,1}(x_2; y_1) - \\ - g_{1,1}(x_1; y_1)\, g_{1,1}(x_2; y_2) + g_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2), \tag{2.4.16}$$

. . . .

En plus de la fonctionnelle génératrice pour les valeurs moyennes (2.4.1), on peut introduire la fonctionnelle génératrice

$$\mathcal{F}(u_1, u_1^*) = \operatorname{Sp} \rho \exp \{\sum_1 u_1^* a_1^+\} \exp \{\sum_1 u_1 a_1\} \qquad (2.4.17)$$

pour les valeurs moyennes

$$f_{k,l}(1, \ldots, k; 1', \ldots, l') = \operatorname{Sp} \rho a_{1'}^+, \ldots, a_{l'}^+ a_1 \ldots a_k =$$

$$= \begin{cases} \left| \dfrac{\partial^{k+l} \mathcal{F}(u_1, u_1^*)}{\partial u_{1'}^* \ldots \partial u_{l'}^* \partial u_1 \ldots \partial u_k} \right|_{u=u^*=0} & \text{pour les bosons} \\ \dfrac{\partial_l^{l'}}{\partial u_{1'}^* \ldots \partial u_{l'}^*} \cdot \dfrac{\partial_r^k \mathcal{F}(u_1, u_1^*)}{\partial u_k \ldots \partial u_1} \Bigg|_{u=u^*=0} & \text{pour les fermions,} \end{cases}$$

où a_1, a_1^+ sont les opérateurs d'annihilation et de création des particules dans l'état 1.

En particulier, si $i \equiv (p, \sigma)$, où p est l'impulsion, σ la projection du spin, en vertu de la relation

$$\int d^3x u(x) \psi(x) = \sum_1 u_1 a_1, \quad u(x) = (\mathcal{V})^{-1/2} \sum_1 u_1 \exp ipx$$

on a

$$\mathcal{F}(u_1, u_1^*) = \mathcal{F}(u(x), u^*(x)).$$

2.4.2. Equations du mouvement. Dans le paragraphe précédent nous avons introduit les fonctions de distribution à particules multiples pour les systèmes quantiques et formulé le principe d'affaiblissement des corrélations. Nous allons maintenant introduire les équations du mouvement pour ces fonctions.

A partir de l'équation (2.1.7)

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho(t)],$$

pour l'opérateur statistique $\rho(t)$ d'un système, en l'absence de champs extérieurs, nous allons avant tout trouver l'équation du mouvement pour la fonctionnelle génératrice $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(u, u^*; t) = \operatorname{Sp} \rho(t) \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} \exp \left\{ \int u \psi \right\},$$

où $\int u\psi \equiv \int d^3x u(x) \psi(x)$. En dérivant cette expression par rapport à t, et en utilisant (2.1.7), on obtient

$$i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \operatorname{Sp} \rho(t) \left[\exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} \exp \left\{ \int u \psi \right\}, \mathcal{H} \right],$$

où $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ et $\mathcal{H}_0$ et V sont donnés par les formules (2.2.29). Nous allons, pour plus de simplicité, envisager seulement des systè-

mes formés de bosons. Dans ce cas les grandeurs $u(x)$ et $u^*(x)$ seront des c-nombres et on obtient

$$i\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \int d^3x\,(\varphi(x) - \varphi^*(x)) - \\ - \frac{1}{2}\int d^3x_1 d^3x_2 V(x_1 - x_2)\,(\varphi(x_1, x_2) - \varphi^*(x_1, x_2)),$$

où on introduit les désignations

$$\varphi(x) = (2m)^{-1}\,\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi^+(x)\,\Delta\psi(x)\exp\left\{\int u^*\psi^+\right\}\exp\left\{\int u\psi\right\},$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi^+(x_1)\,\psi^+(x_2)\,\psi(x_2)\,\psi(x_1)\exp\left\{\int u^*\psi^+\right\}\times \\ \times\exp\left\{\int u\psi\right\}.$$

En remarquant que vu les relations de commutation canoniques pour ψ, ψ^+ on a la formule

$$\psi(x)\exp\left\{\int u^*\psi^+\right\} = \exp\left\{\int u^*\psi^+\right\}(u^*(x) + \psi(x)),$$

on trouve

$$\varphi(x) = (2m)^{-1}\,\Delta_{x'}\left(u^*(x') + \frac{\delta}{\delta u(x')}\right)\frac{\delta}{\delta u(x)}\,\mathcal{F}\,|_{x'=x},$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(u^*(x_1) + \frac{\delta}{\delta u(x_1)}\right)\left(u^*(x_2) + \frac{\delta}{\delta u(x_2)}\right)\times \\ \times\frac{\delta}{\delta u^*(x_2)}\,\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^*(x_1)},$$

c'est pourquoi l'équation du mouvement pour la fonctionnelle génératrice d'un système de bosons sera [S7]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{i}{2m}\int d^3x\left\{\nabla u^*(x)\,\nabla\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} - \nabla u(x)\,\nabla\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^*(x)}\right\} + \\ + \frac{i}{2}\int d^3x_1\,d^3x_2 V(x_1 - x_2)\left\{\left(u^*(x_1) + \frac{\delta}{\delta u(x_1)}\right)\times\right. \\ \times\left(u^*(x_2) + \frac{\delta}{\delta u(x_2)}\right)\frac{\delta}{\delta u^*(x_1)}\,\frac{\delta}{\delta u^*(x_2)} - \\ \left. - \left(u(x_1) + \frac{\delta}{\delta u^*(x_1)}\right)\left(u(x_2) + \frac{\delta}{\delta u^*(x_2)}\right)\frac{\delta}{\delta u(x_1)}\,\frac{\delta}{\delta u(x_2)}\right\}\mathcal{F}. \tag{2.4.18}$$

Nous allons également donner l'équation du mouvement de la fonctionnelle génératrice dans l'espace des impulsions, en supposant

que le hamiltonien du système est

$$\mathcal{H} = \sum_1 \varepsilon_1 a_1^+ a_1 + \frac{1}{4V} \sum_{1234} \Phi(12\,;\,34)\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, \qquad (2.4.19)$$

où ε_1 est l'énergie de la particule (ou de la quasi-particule) dans l'état 1 ($1 = p_1$, σ_1 et $\Phi(12\,;\,34)$ est l'amplitude caractérisant l'interaction des particules (ou des quasi-particules)). Dans le cas des bosons, cette équation s'écrit:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = i \sum_1 \varepsilon_1 \left(u_1^* \frac{\partial}{\partial u_1^*} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1}\right) \mathcal{F} + \frac{i}{4V} \sum_{1234} \Phi(12\,;\,34) \times$$
$$\times \left\{ \left(u_3^* + \frac{\partial}{\partial u_3}\right) \left(u_4^* + \frac{\partial}{\partial u_4}\right) \frac{\partial^2}{\partial u_1^* \, \partial u_2^*} - \right.$$
$$\left. - \left(u_1 + \frac{\partial}{\partial u_1^*}\right) \left(u_2 + \frac{\partial}{\partial u_2^*}\right) \frac{\partial^2}{\partial u_3 \, \partial u_4} \right\} \mathcal{F}. \qquad (2.4.20)$$

Les équations du mouvement pour la fonctionnelle génératrice peuvent être utilisées pour obtenir une chaîne d'équations pour les fonctions de distribution à particules multiples. En dérivant l'équation (2.4.18) k fois par rapport à la variable $u^*(x_1)$ et l fois par rapport à la variable $u(x)$ et en posant ensuite $u = u^* = 0$, on obtient pour $k = l$

$$\frac{\partial f_k(x_1, \ldots, x_k\,;\, x_1', \ldots, x_k')}{\partial t} = \left\{ \frac{i}{2m} \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} (\Delta_{x_r} - \Delta_{x_r'}) - \right.$$
$$\left. - i \sum_{1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant k} (V(x_{r_1} - x_{r_2}) - V(x_{r_1}' - x_{r_2}') \right\} f_k \times$$
$$\times (x_1, \ldots, x_k\,;\, x_1', \ldots, x_k') +$$
$$+ \int d^3x_{k+1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} V(x_r - x_{k+1}) - V(x_r' - x_{k+1})) \times$$
$$\times f_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}\,;\, x_1', \ldots, x_{k+1}'), \qquad (2.4.21)$$

où $f_k \equiv f_{k,k}$. Remarquons que comme $[\mathcal{H}, N] = 0$, si à l'instant initial pour $k \neq l$ on a $f_{k,l} = 0$, alors $f_{k,l}$ $(k \neq l)$ sera également nul à tous les instants ultérieurs.

Les équations (2.4.1) sont vraies, tant pour les bosons que pour les fermions. Dans le cas des bosons, les solutions des équations (2.4.1) doivent être symétriques par rapport aux permutations des coordonnées à l'intérieur de chaque groupe $x_1, \ldots, x_k$ et $x_1', \ldots, x_k'$, et dans le cas des fermions elles doivent être antisymétriques.

La chaîne d'équations (2.4.21) (obtenue pour la première fois par Bogolioubov [18]) est une généralisation à la mécanique quantique de la chaîne d'équations (1.1.23) pour les fonctions de distribution à particules multiples dans le cas des systèmes classiques.

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que l'équation du mouvement, pour l'opérateur statistique (2.1.7) et les fonctions de distribution à particules multiples (2.4.21), sont linéaires, alors que le principe d'affaiblissement des corrélations est non linéaire. En effet, comme on peut le voir à partir de la formule (2.4.3), si les opérateurs statistiques ρ_1 et ρ_2 satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations (2.4.3), leur mélange $\rho = w_1\rho_1 + w_2\rho_2$ ($w_1 + w_2 = 1$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$) ne satisfera pas à ce principe.

2.4.3. Relations ergodiques pour les systèmes quantiques. Le principe d'affaiblissement des corrélations détermine le comportement asymptotique des fonctions de distribution à particules multiples, lors de l'« éloignement » spatial des arguments. Mais, en plus de ce principe, qui est vrai tant pour les systèmes classiques que pour les systèmes quantiques, la mécanique statistique a encore besoin d'un second principe concernant le comportement asymptotique des fonctions de distribution à particules multiples dans le domaine des temps grands. Ce principe se formule sous la forme de la relation ergodique, qui, tout comme le principe d'affaiblissement des corrélations, est vrai tant pour les systèmes classiques que pour les systèmes quantiques.

Nous n'allons pas envisager ici la question de l'hypothèse ergodique pour les systèmes quantiques formés d'un nombre fini de particules [83], et nous formulerons seulement la relation ergodique pour les systèmes quantiques à un grand nombre de degrés de liberté. Si $f_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l; t)$ sont les fonctions de distribution à particules multiples à l'instant t, la relation ergodique s'écrit:

$$\lim_{t\to\infty} f_{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l; t) = f_{k,l}^{(c)}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots y_l), \tag{2.4.22}$$

$$f_{k,l}^{(c)}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) = \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \mathrm{Sp}\, w\psi^+(y_1) \ldots \psi^+(y_l) \ldots \psi(x_k),$$

où w est l'opérateur statistique d'équilibre de Gibbs (2.4.4'). (On suppose que dans les fonctions de distribution à particules multiples, on a effectué le passage à la limite thermodynamique.) La relation ergodique (2.4.22) devient, en fait, vraie lorsque le temps t surpasse une certaine valeur τ_r. La grandeur τ_r peut être appelée temps de relaxation. Pour les systèmes homogènes dans l'espace, le temps τ_r est déterminé par les processus microscopiques conduisant à l'établissement de la distribution de Gibbs. Pour les systèmes non homogènes, il est bien plus grand, car dans ce cas il est déterminé essentiellement par les processus macroscopiques de transfert.

Les paramètres β, μ, u figurant dans la distribution de Gibbs peuvent être liés aux valeurs initiales des fonctions de distribution

à particules multiples. Si, par exemple, le système était à l'instant initial spatialement homogène, les valeurs moyennes des densités d'énergie ε, d'impulsion π_i et de masse $\rho^{(m)}$ ne dépendront ni des coordonnées, ni du temps. C'est pourquoi on a les relations

$$\varepsilon_0 = \mathrm{Sp}\, w\varepsilon(x), \quad \pi_0 = \mathrm{Sp}\, w\pi(x), \quad \rho_0^{(m)} = \mathrm{Sp}\, w\rho^{(m)}(x), \tag{2.4.23}$$

où les grandeurs $\varepsilon_0, \pi_0, \rho_0^{(m)}$ sont données par les fonctions de distribution à particules multiples initiales. Ces relations établissent la liaison existant entre les paramètres β, μ, u et l'état initial du système. On peut dire qu'elles retiennent la « mémoire » de l'état initial du système.

Compte tenu de la définition des fonctions de distribution (2.4.1), on peut écrire la relation ergodique (2.4.22) comme suit

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \mathrm{Sp}\, e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \psi^+(y_1) \ldots \psi(x_k) =$$
$$= \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \mathrm{Sp}\, w\psi^+(y_1) \ldots \psi(x_k),$$

ou sous une forme abrégée

$$\rho(t) \equiv e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} w. \tag{2.4.24}$$

A cette relation il faut ajouter les relations reliant les paramètres β, μ, u à la valeur initiale de l'opérateur statistique $\rho(0) = \rho$. Pour les systèmes spatialement homogènes, on a

$$\mathrm{Sp}\, \rho\varepsilon(x) = \mathrm{Sp}\, w\varepsilon(x), \quad \mathrm{Sp}\, \rho\pi(x) = \mathrm{Sp}\, w\pi(x),$$
$$\mathrm{Sp}\, \rho\rho^{(m)}(x) = \mathrm{Sp}\, w\rho^{(m)}(x). \tag{2.4.25}$$

Les relations (2.4.24), (2.4.25) signifient que pour $t \gg \tau_r$ le système passe à l'état d'équilibre statistique décrit par l'opérateur statistique de Gibbs indépendamment de l'état initial. Soulignons cependant que les relations (2.4.24), (2.4.25) ne seront pas vraies pour un hamiltonien $\mathcal{H}$ arbitraire. Tout comme dans le cas classique il faut à cet effet que le hamiltonien $\mathcal{H}$ ait une structure suffisamment compliquée, c'est-à-dire qu'on tienne compte de différentes interactions du système. Ceci signifie que les interactions entre les particules doivent donner lieu seulement à des intégrales additives du mouvement: de l'énergie, de l'impulsion et du nombre de particules. (En principe, le moment d'impulsion figure parmi ces intégrales du mouvement. Cependant, si l'état initial est spatialement homogène, le moment ne figure pas dans la distribution de Gibbs.)

Considérons plus en détail le cas où le système admet une classe plus étendue d'intégrales additives du mouvement.

Nous allons diviser le hamiltonien du système $\mathcal{H}$ en deux parties $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ où V tient compte des interactions (pas obliga-

toirement toutes) des particules. Supposons ensuite que nous avons négligé le terme V, c'est-à-dire que nous avons remplacé le hamiltonien total $\mathcal{H}$ par le premier terme $\mathcal{H}_0$, que l'on peut appeler hamiltonien tronqué. Il y a lieu de trouver quelle sera alors la forme de l'opérateur statistique pour des t grands. Il est évident qu'en général l'opérateur statistique ne tendra pas, pour t grands, vers la distribution de Gibbs avec le hamiltonien $\mathcal{H}_0$. Mais si l'on suppose que l'opérateur statistique ρ (0) satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, on peut affirmer, en vertu de la formule (2.4.4), que l'on aura la relation

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \exp\{\Omega - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha\}, \quad \rho = \rho(0). \qquad (2.4.26)$$

$\hat{\gamma}_\alpha$ est ici l'ensemble d'un certain nombre d'opérateurs linéairement indépendants, qui sont déterminés par le hamiltonien $\mathcal{H}_0$ et ne dépendent pas de ρ, et $Y_\alpha \equiv Y_\alpha$ (t ; ρ) sont des fonctions c-numériques du temps t linéairement indépendantes, qui sont déterminées par ρ ; enfin la grandeur Ω est donnée par la condition de normalisation

$$\mathrm{Sp}\ \exp\{\Omega - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha\} = 1$$

(il y a sommation par rapport à l'indice α).

Remarquons qu'en vertu de la formule (2.4.4) l'opérateur $Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha$ doit être additif. Le nombre d'opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ peut en principe être aussi grand que l'on veut, mais ces opérateurs ne doivent pas former un système complet, car dans ce cas, pour $t \to \infty$, la description de l'état du système ne se trouverait pas simplifiée.

En vertu de (2.4.26), on a

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t'} \exp\{\Omega - Y_\alpha(t;\ \rho)\,\hat{\gamma}_\alpha\}\, e^{i\mathcal{H}_0 t'} = \exp\{\Omega - Y_\alpha(t+t';\ \rho)\,\hat{\gamma}_\alpha\},$$

ou

$$Y_\alpha(t;\ \rho)\, e^{-i\mathcal{H}_0 t'}\hat{\gamma}_\alpha e^{i\mathcal{H}_0 t'} = Y_\alpha(t+t';\ \rho)\,\hat{\gamma}_\alpha,$$

d'où

$$-iY_\alpha(t;\ \rho)\,[\mathcal{H}_0,\ \hat{\gamma}_\alpha] = \dot{Y}_\alpha(t;\ \rho)\,\hat{\gamma}_\alpha.$$

Les grandeurs Y_α (t ; ρ), pour un état arbitraire ρ sont linéairement indépendantes, c'est pourquoi on doit avoir les relations

$$[\mathcal{H}_0,\ \hat{\gamma}_\alpha] = a_{\alpha\beta}\hat{\gamma}_\beta, \quad \dot{Y}_\alpha(t;\ \rho) = -iY_\beta(t;\ \rho)\,a_{\beta\alpha}, \qquad (2.4.27)$$

où $a_{\alpha\beta}$ sont des c-nombres déterminés seulement par le hamiltonien $\mathcal{H}_0$ et ne dépendant pas du temps t, ni de ρ, car la structure des opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ ne dépend pas de ces grandeurs.

En vertu des relations (2.4.27), pour t quelconque, on a l'égalité

$$\mathrm{Sp}\, e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t}\hat{\gamma}_\alpha = (e^{iat})_{\alpha\beta}\,\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}_\beta = (e^{iat}\,\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma})_\alpha, \qquad (2.4.28)$$

où a est une matrice dont les éléments matriciels sont $a_{\alpha\beta}$.

Nous allons introduire maintenant l'opérateur statistique

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \exp\{\Omega(\gamma) - Y_\alpha(\gamma)\hat{\gamma}_\alpha\}, \qquad (2.4.29)$$

où les grandeurs $\Omega(\gamma)$ et $Y_\alpha(\gamma)$ sont données par les conditions

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha, \quad \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma) = 1. \qquad (2.4.30)$$

Vu (2.4.26), (2.4.28), on a [88]

$$e^{-i\mathscr{H}_0 t}\rho e^{i\mathscr{H}_0 t} \underset{t\to\infty}{\to} \rho^{(0)}(e^{iat}\,\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}). \qquad (2.4.31)$$

Tout comme la relation (2.4.24), cette relation est appelée relation ergodique et joue ultérieurement un rôle important. Les grandeurs γ_α sont appelées *coordonnées thermodynamiques généralisées* et les grandeurs Y_α *forces thermodynamiques généralisées* correspondant aux coordonnées γ_α. Notons que parmi les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ on peut également avoir le hamiltonien $\mathscr{H}_0$ *).

Notons que l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\gamma)$ correspond au maximum de l'entropie $\mathrm{Sp}\,\rho\ln\rho$ avec les conditions supplémentaires $\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha$, $\mathrm{Sp}\,\rho = 1$.

Nous allons montrer que les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ forment une algèbre de Lie, c'est-à-dire qu'ils satisfont aux relations de commutation

$$[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta] = f_{\alpha\beta\rho}\hat{\gamma}_\rho, \qquad (2.4.32)$$

où $f_{\alpha\beta\rho}$ sont des constantes appelées constantes de structure. Notons à cet effet que si les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ et $\hat{\gamma}_\beta$ sont additifs, les opérateurs $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ seront également additifs (voir le paragraphe 2.2.2). C'est pourquoi lorsque en plus de l'opérateur $\hat{\gamma}_\alpha$, on introduit $[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta]$ dans l'exponentielle de la formule (2.4.29), le principe d'affaiblissement des corrélations, pour l'opérateur statistique $\rho^{(0)}\gamma$ reste intact. D'un autre côté, en utilisant l'identité de Jacobi

$$[\mathscr{H}_0, [\hat{\gamma}_\alpha, \gamma_\beta]] + [\gamma_\alpha, [\gamma_\beta, \mathscr{H}_0]] + [\gamma_\beta, [\mathscr{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha]] = 0$$

et la formule (2.4.27), il est facile de voir que les opérateurs $[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta]$ satisfont à des relations de commutation avec le hamiltonien $\mathscr{H}_0$ analogues aux relations (2.4.27)

$$[\mathscr{H}_0, [\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta]] = a_{\beta\delta}[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\delta] - a_{\alpha\delta}[\hat{\gamma}_\beta, \hat{\gamma}_\delta].$$

C'est pourquoi les opérateurs $[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta]$ doivent figurer dans le nombre des opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ et par conséquent doivent s'exprimer en fonction des opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$, ce qui découle de la formule (2.4.32).

*) Soulignons que (2.4.31) tout comme (2.4.24) a le sens d'une relation entre les fonctions de distribution à particules multiples (pour $V \to \infty$) et non d'une égalité entre les éléments matriciels.

L'existence des relations de commutation (2.4.27) montre que la structure des opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ est étroitement liée à la symétrie du hamiltonien $\mathscr{H}_0$.

Nous allons donner des exemples d'opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ pour certains types d'opérateurs tronqués. Si le hamiltonien tronqué $\mathscr{H}_0$ coïncide avec le hamiltonien total $\mathscr{H}$ du système, parmi les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ figurent le hamiltonien $\mathscr{H}$, l'opérateur de l'impulsion $\boldsymbol{P}$ et l'opérateur du nombre total de particules N. Dans ce cas la matrice $a_{\alpha\beta}$ est nulle.

Si le hamiltonien tronqué coïncide avec l'opérateur de l'énergie des particules libres $\mathscr{H}_0 = \sum\limits_{p\sigma} \varepsilon_\sigma(\boldsymbol{p})\, a^+_{p\sigma} a_{p\sigma}$ où $\varepsilon_\sigma(\boldsymbol{p})$ est l'énergie des particules, et $a^+_{p\sigma}$, $a_{p\sigma}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation de la particule d'impulsion $\boldsymbol{p}$ et la projection du spin σ, les opérateurs γ_α dans le cas de l'homogénéité spatiale seront $a^+_{p\sigma} a_{p\sigma'}$ (voir le paragraphe 5.1.1). La matrice $a_{\alpha\beta}$ sera donnée par la relation

$$[\mathscr{H}_0,\ a^+_{p\sigma} a_{p\sigma'}] = (\varepsilon_\sigma(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_{\sigma'}(\boldsymbol{p}))\, a^+_{p\sigma} a_{p\sigma'}.$$

Pour une substance ferromagnétique parfaite de Heisenberg, placée dans un champ magnétique $\boldsymbol{H}$, les opérateurs γ_α seront le hamiltonien $\mathscr{H}$ et l'opérateur de spin total S_i. Dans ce cas, la matrice $a_{\alpha\beta}$ est donnée par les relations

$$[\mathscr{H},\ \mathscr{H}] = 0, \quad [\mathscr{H},\ S_l] = -\frac{\mu}{s}\, \varepsilon_{ikl} S_k H_l.$$

Dans notre exposé on n'a pas abordé la dépendance éventuelle entre le principe d'affaiblissement des corrélations et l'existence d'une limite thermodynamique. Les relations ergodiques sont également étroitement liées au principe d'affaiblissement des corrélations, mais elles ne peuvent être considérées comme un postulat indépendant de la mécanique statistique et dans chaque cas concret (c'est-à-dire pour un hamiltonien donné $\mathscr{H}_0$) elles peuvent en principe être démontrées.

CHAPITRE 3

THÉORIE DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES QUANTIQUES

§ 3.1. Théorie des gaz quantiques faiblement non parfaits

3.1.1. Distributions de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac. L'étape finale de l'évolution d'un système dynamique réel est toujours l'état d'équilibre statistique décrit par l'opérateur statistique de Gibbs

$$w = \exp\{\Omega - \beta(\mathscr{H} - \mu N)\}, \tag{3.1.1}$$

où $\mathscr{H}$ et N sont respectivement le hamiltonien et l'opérateur du nombre de particules du système, β l'inverse de la température, μ le potentiel chimique et $\beta^{-1}\Omega$ le potentiel de Gibbs déterminé à partir de la condition de normalisation

$$\Omega = -\ln \mathrm{Sp} \exp\{-\beta(\mathscr{H} - \mu N)\}.$$

Parmi les intégrales additives du mouvement dans l'opérateur de Gibbs (3.1.1) nous avons omis l'opérateur de l'impulsion $\boldsymbol{P}$ et l'opérateur du moment de l'impulsion $\boldsymbol{M}$, supposant, pour plus de simplicité, que le système est au repos, c'est-à-dire que sa vitesse de translation $\boldsymbol{u}$ et sa vitesse angulaire ω sont nulles. Si $\omega \neq 0$ on aura le terme $\beta\omega\boldsymbol{M}$ dans l'exponentielle de (3.1.1). Comme cette grandeur ne commute pas avec l'opérateur de l'impulsion, pour $\omega \neq 0$ le système sera spatialement non homogène.

On voit que l'état d'équilibre d'un système au repos n'est caractérisé que par deux variables indépendantes β et μ. La distribution de Gibbs (3.1.1.) se trouve à la base de la thermodynamique que nous n'allons pas élaborer ici, nous nous limiterons à étudier la distribution w pour les particules libres et à trouver, dans le cadre de la théorie des perturbations, le rôle de l'interaction entre les particules.

Pour les particules libres la distribution de Gibbs (3.1.1.) s'écrit:

$$w_0 = \exp\{\Omega_0 - \beta \sum_i (\varepsilon_i - \mu)\hat{n}_i\}, \tag{3.1.2}$$

où $\hat{n}_i = a_i^+ a_i$ est l'opérateur du nombre de particules et ε_i l'énergie des particules dans l'état individuel de nombre quantique i. Il y a lieu de calculer le potentiel Ω_0, les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{n}_i$ et les fonctions de distribution à particules multiples. Nous

allons donner la solution de ce problème pour un opérateur statistique d'une forme un peu plus générale que (3.1.2), à savoir

$$\rho^{(0)}=\exp\{\Omega_0-\sum_i Y_i\hat{n}_i\},\quad \operatorname{Sp}\rho^{(0)}=1, \tag{3.1.3}$$

où Y_i sont des fonctions arbitraires de i. En remarquant que

$$e^{-\Omega_0}=\operatorname{Sp} e^{-\sum\limits_i Y_i\hat{n}_i}=\ldots\sum_{n_{i_1}}\sum_{n_{i_2}}\ldots e^{-Y_{i_1}n_{i_1}}e^{-Y_{i_2}n_{i_2}}\ldots=\prod_i\sum_n e^{-Y_i n},$$

où n_i et n prennent toutes les valeurs entières non négatives dans le cas de statistique de Bose-Einstein (B-E) et les valeurs 0,1 dans le cas de statistique de Fermi-Dirac (F-D), on obtient ainsi :

$$\Omega_0=\begin{cases}\sum\limits_i\ln(1-e^{-Y_i}) & \text{(B-E)},\\ -\sum\limits_i\ln(1+e^{-Y_i}) & \text{(F-D)}.\end{cases} \tag{3.1.4}$$

C'est pourquoi les nombres de remplissage, c'est-à-dire les valeurs moyennes des particules dans les différents états i, sont donnés par les formules

$$f_i=\operatorname{Sp}\rho^{(0)}\hat{n}_i=\frac{\partial\Omega_0}{\partial Y_i}=\begin{cases}(e^{Y_i}-1)^{-1} & \text{(B-E)},\\ (e^{Y_i}+1)^{-1} & \text{(F-D)},\end{cases} \tag{3.1.5}$$

et le potentiel Ω_0 par la formule

$$\Omega_0=\begin{cases}-\sum\limits_i\ln(1+f_i) & \text{(B-E)},\\ \sum\limits_i\ln(1-f_i) & \text{(F-D)}.\end{cases} \tag{3.1.6}$$

En posant dans (3.1.5) $Y_i=\beta(\varepsilon_i-\mu)$, on trouve les nombres de remplissage

$$n_i=\begin{cases}(e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1)^{-1} & \text{(B-E)},\\ (e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1)^{-1} & \text{(F-D)}\end{cases} \tag{3.1.7}$$

pour un gaz parfait dans l'état d'équilibre statistique.

Notons que l'entropie du système dont l'état est décrit par l'opérateur statistique $\rho^{(0)}$, donnée par l'expression générale (3.1.3), est de la forme

$$s=-\operatorname{Sp}\rho^{(0)}\ln\rho^{(0)}=\begin{cases}\sum\limits_i\{(1+f_i)\ln(1+f_i)-f_i\ln f_i\} & \text{(B-E)},\\ -\sum\limits_i\{(1-f_i)\ln(1-f_i)+f_i\ln f_i\} & \text{(F-D)}.\end{cases} \tag{3.1.8}$$

Dans ce qui suit on montrera que l'opérateur statistique (3.1.3) détermine l'état d'un gaz parfait hors d'équilibre à l'étape cinétique de l'évolution, lorsque l'état du gaz est décrit complètement par une fonction de distribution à une particule. C'est pourquoi la formule (3.1.8) donne l'entropie non seulement d'un gaz à l'équilibre mais également hors d'équilibre.

Le potentiel chimique μ figurant dans la distribution (3.1.7) peut s'exprimer en fonction de la densité des particules ν et par l'inverse de la température β

$$\nu = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i n_i = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i \left(e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1\right)^{-1} & \text{(B-E)}, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i \left(e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1\right)^{-1} & \text{(F-D)}. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

A titre de variables indépendantes caractérisant l'état d'un gaz parfait, on peut prendre, pour un gaz de fermions après le passage à la limite $\mathcal{V} \to \infty$, une paire quelconque de grandeurs: soit (μ, β), soit (ν, β), par contre, pour un gaz de bosons dans le domaine des températures suffisamment basses, on peut seulement prendre (ν, β) car dans ce cas $\mu = 0$. En effet, pour un gaz parfait de bosons le potentiel chimique μ ne peut être positif, car autrement le nombre de bosons d'impulsion $p < (2m\mu)^{1/2}$ serait négatif ($i \equiv \mathbf{p}, \sigma$, $\mathbf{p}$ étant l'impulsion de la particule, σ la projection du spin). C'est pourquoi, on suppose que $\mu < 0$. La fonction n_p n'a alors pas de singularité et la condition (3.1.9) donnant μ s'écrit

$$g \int_0^\infty dx x^2 \left(e^{x^2 - \beta\mu} - 1\right)^{-1} = 2\pi^2 \nu/(2mT)^{3/2}, \tag{3.1.10}$$

où $T = \beta^{-1}$ et $g = 2s + 1$ (s étant le spin de la particule). Le second membre de cette égalité pour $\mu < 0$ est inférieur à $g \int_0^\infty dx\, x^2 \left(e^{x^2} - 1\right)^{-1} = 1/2 g \Gamma(3/2) \zeta(3/2)$ ($\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$ sont la fonction gamma et la fonction ζ de Riemann, $\Gamma(3/2) = \pi^{1/2}/2$ et $\zeta(3/2) = 2{,}612\ldots$). C'est pourquoi à partir de la relation (3.1.10), on peut trouver μ en fonction de ν et T seulement sous la condition

$$T \geqslant T_0, \quad T_0 = (2m)^{-1} \left(\frac{4\pi^2 \nu}{\Gamma(3/2) \zeta(3/2) g}\right)^{2/3}. \tag{3.1.11}$$

Si $T = T_0$, on a $\mu = 0$, par contre, si $T < T_0$, la condition (3.1.10) ne permet pas de trouver le potentiel chimique d'un gaz parfait de bosons. Dans ce domaine de température, on doit prendre le potentiel chimique nul, car le potentiel chimique ne peut être négatif. Si

$\mu = 0$ et $T < T_0$, la relation (3.1.10) n'est pas satisfaite, plus encore, elle est incorrecte. En effet, pour $\mu = 0$ la fonction de distribution des bosons d'impulsion $\boldsymbol{p} \neq 0$ est, comme auparavant, donnée par la formule

$$n_p = (e^{\beta\varepsilon_p} - 1)^{-1}, \quad \varepsilon_p = p^2/2m, \tag{3.1.12}$$

et la condition (3.1.9) peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{V}^{-1} \sum_{p<\delta} n_p = \nu - \mathcal{V}^{-1} \sum_{p>\delta} n_p,$$

où δ est certaine impulsion petite indépendante de $\mathcal{V}$. En passant dans cette formule à la limite $\mathcal{V} \to \infty$, on obtient

$$\lim_{\mathcal{V} \to \infty} \mathcal{V}^{-1} \sum_{p<\delta} n_p = \nu - (2\pi)^{-3} \int_{p>\delta} d^3p\, (e^{\beta\varepsilon_p} - 1)^{-1}.$$

Comme $\varepsilon_p = p^2/2m$, on peut réaliser dans cette formule le passage à la limite $\delta \to 0$. On trouve ainsi le nombre de bosons ayant une impulsion $\boldsymbol{p} = 0$ par unité de volume:

$$\nu_0 = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\mathcal{V} \to \infty} \mathcal{V}^{-1} \sum_{p<\delta} n_p = \nu - (2\pi)^{-3} \int d^3p\, (e^{\beta\varepsilon_p} - 1)^{-1} = \\ = \nu \left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right). \tag{3.1.13}$$

On voit que dans l'état où $\boldsymbol{p} = 0$, à la différence de l'état où $\boldsymbol{p} \neq 0$, on a un nombre macroscopique de bosons. Cet effet est appelé condensation de Bose.

En introduisant la densité du nombre de bosons ν_p d'impulsion $\boldsymbol{p}$, $\int d^3p\nu_p = \nu$, on peut écrire (3.1.12), (3.1.13) sous la forme d'une formule unique, soit

$$\nu_p = \nu \left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right) \delta(\boldsymbol{p}) + (2\pi)^{-3} (e^{\beta\varepsilon_p} - 1)^{-1}. \tag{3.1.14}$$

A la différence des bosons, le potentiel chimique d'un gaz de fermions peut être tant positif que négatif et peut toujours être pris pour variable indépendante. Si la température du gaz de fermions est bien inférieure à la température de dégénérescence T_0:

$$T \ll T_0, \quad T_0 = m^{-1} (\nu g^{-1})^{2/3}, \tag{3.1.15}$$

le potentiel chimique sera lié à la densité du nombre de particules par la relation $\mu = (6\pi^2\nu g^{-1})^{2/3}/2m$. Notons que pour $T \ll T_0$, la fonction de distribution des fermions n_p différera très peu de la fonction en escalier

$$n_p \approx \theta(\mu - \varepsilon_p).$$

Pour conclure ce paragraphe, considérons la fonctionnelle génératrice pour un gaz parfait. L'opérateur statistique d'un gaz parfait est donné par la formule (3.1.3), par conséquent, la fonctionnelle génératrice sera

$$\mathcal{F}(u, u^*) = e^{\Omega_0} \operatorname{Sp} e^{-\sum_i Y_i a_i^+ a_i} e^{\sum_i u_i^* a_i^+} e^{\sum_i u_i a_i}. \qquad (3.1.16)$$

Soulignons que cette expression est vraie pour un gaz parfait à l'équilibre ou hors d'équilibre (pour un gaz à l'équilibre on a $Y_i = \beta(\varepsilon_i - \mu)$).

Remarquons que quelle que soit la statistique les grandeurs $u_i a_i$ et $u_{i'}^* a_{i'}^+$ commutent mutuellement pour $i \neq i'$ et par conséquent

$$e^{\sum_i u_i^* a_i^+} e^{\sum_i u_i a_i} = \prod_i e^{u_i^* a_i^+} e^{u_i a_i},$$

on a

$$e^{-\Omega_0} \mathcal{F} = \sum_{n_{i_1}} \sum_{n_{i_2}} \ldots e^{-Y_{i_1} n_{i_1}} e^{-Y_{i_2} n_{i_2}} \ldots,$$

$$\langle n_{i_1} | e^{u_{i_1}^* a_{i_1}^+} e^{u_{i_1} a_{i_1}} | n_{i_1} \rangle \langle n_{i_2} | e^{u_{i_2}^* a_{i_2}^+} e^{u_{i_2} a_{i_2}} | n_{i_2} \rangle .$$

ou bien

$$\begin{gathered} \mathcal{F} = e^{\Omega_0} \prod_i g_i, \\ g_i = \sum_n e^{-Y_i n} \langle n | e^{u_i^* a^+} e^{u_i a} | n \rangle, \end{gathered} \qquad (3.1.17)$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ dans le cas de la statistique (B-E) et $n = 0, 1$ dans le cas de la statistique (F-D); pour les grandeurs n_i, a_i, a_i^+ on a omis l'indice i. C'est pourquoi en vertu de (3.1.17)

$$\mathcal{F} = \prod_i \frac{g_i}{\sum_n \exp(-nY_i)}. \qquad (3.1.18)$$

Calculons maintenant l'élément matriciel

$$g_i(n) = \langle n | e^{u_i^* a} e^{u_i a} | n \rangle$$

donnant la grandeur g_i:

$$g_i = \sum_n e^{-Y_i n} g_i(n)$$

Pour les bosons

$$g_i(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{u_i^{*p} u_i^q}{p!\, q!} \langle n | a^{+p} a^q | n \rangle .$$

et comme $|n\rangle=(n!)^{-1/2}a^{+n}|0\rangle$, on a

$$a^q|n\rangle=\begin{cases}\left(\frac{n!}{(n-q)!}\right)^{1/2}|n-q\rangle, & n\geqslant q,\\ 0, & n<q,\end{cases}$$

et par conséquent

$$\langle n|a^{+p}a^q|n\rangle=\delta_{pq}\frac{n!}{(n-p)!}\begin{cases}1, & n\geqslant q,\\ 0, & n<q.\end{cases}$$

On a donc

$$g_i(n)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(u_i^*u_i)^p}{p!}C_n^p,\qquad C_n^p=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

et

$$g_i=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nY_i}\sum_{p=0}^{n}\frac{(u_i^*u_i)^p}{p!}C_n^p=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(u_i^*u_i)^p}{p!}\sum_{n=p}^{\infty}e^{-nY_i}C_n^p.$$

Remarquant que

$$\sum_{n=p}^{\infty}y^nC_n^p=\frac{y^p}{(1-y)^{p+1}},$$

on a

$$g_i=(1-e^{-Y_i})^{-1}\exp\{u_i^*u_if_i\},$$

où $f_i=(e^{Y_i}-1)^{-1}$. Pour les fermions

$$g_i=g_i(0)+g_i(1)\,e^{-Y_i},\quad g_i(0)=1,\quad g_i(1)=1+u_i^*u_i.$$

Donc

$$g_i=(1+e^{-Y_i})\,(1+u_i^*u_if_i),$$

où $f_i=(e^{Y_i}+1)^{-1}$. Donc, en vertu de (3.1.18), la fonctionnelle génératrice peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{F}=\begin{cases}\exp\sum_i u_i^*u_if_i & \text{(B-E)},\\ \prod_i(1+u_i^*u_if_i) & \text{(F-D)}.\end{cases}$$

Comme pour les fermions $u_iu_i=0$, on peut écrire indépendamment du caractère de la statistique la fonctionnelle génératrice:

$$\mathcal{F}(u,u^*)=\exp\sum_i u_i^*u_if_i. \tag{3.1.19}$$

Notons que pour l'opérateur statistique

$$\rho^{(0)} = \exp \{\Omega_0 - \sum_{ii'} Y_{ii'} a_i^+ a_{i'}\} \qquad (3.1.20)$$

la fonctionnelle génératrice est de la forme

$$\mathcal{F}(u, u^*) = \exp \sum_{ii'} u_i^* u_{i'} f_{ii'}, \qquad (3.1.21)$$

où $f_{ii'} = \mathrm{Sp}\, \rho^{(0)} a_{i'}^+ a_i$.

En dérivant la fonctionnelle génératrice par rapport à u_i et u_i^* on peut, en vertu de (2.4.17), (2.4.17′) trouver les fonctions de distribution à particules multiples d'un gaz parfait.

3.1.2. Théorie thermodynamique des perturbations. Après avoir étudié les gaz parfaits, nous allons montrer maintenant comment on peut trouver les corrections à l'opérateur statistique et aux fonctions de distribution, corrections dues aux interactions entre les particules du gaz, ces interactions n'étant pas importantes [80].

En écrivant le hamiltonien $\mathcal{H}$ du système comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$, où $\mathcal{H}_0$ est le hamiltonien des particules libres et V le hamiltonien de l'interaction entre les particules, développons l'exponentielle $\exp(-\beta\mathcal{H} + \beta\mu N)$ en série suivant les puissances de V. A cet effet, on introduit l'opérateur

$$S(\lambda) = \exp\{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)\} \cdot \exp\{-\lambda(\mathcal{H} - \mu N)\}.$$

En dérivant par rapport à λ, on trouve

$$\dot{S}(\lambda) = -V(\lambda)\, S(\lambda),$$

où $V(\lambda) = \exp\{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)\}\, V \exp\{-\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)\}$. Notons que $S(0) = 1$, on obtient ainsi l'équation intégrale suivante pour $S(\lambda)$

$$S(\lambda) = 1 - \int_0^\lambda d\lambda' V(\lambda')\, S(\lambda').$$

Puis en développant $S(\lambda)$ en série suivant les puissances de V

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\lambda); \qquad S_0(\lambda) = 1,$$

il est facile d'obtenir, à l'aide de cette équation intégrale, l'expression suivante pour $S_n(\lambda)$:

$$S_n(\lambda) = (-1)^n \int_0^\lambda d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \ldots \int_0^{\lambda_{n-1}} d\lambda_n V(\lambda_1) \ldots V(\lambda_n).$$

De même que dans l'électrodynamique quantique [2] on développe la matrice de dispersion, on peut représenter $S_n(\lambda)$ sous la forme

$$S_n(\lambda)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\lambda d\lambda_1 \ldots \int_0^\lambda d\lambda_n T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\},$$

où T est l'opérateur de mise en ordre par rapport à la variable λ:

$T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\} = V(\lambda_{i_1})\ldots V(\lambda_{i_n}), \quad \lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_n}$.

Il s'ensuit

$$e^{-\beta(\mathcal{H}-\mu N)} = e^{-\beta(\mathcal{H}_0-\mu N)}S(\beta), \tag{3.1.22}$$

$$S(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\beta d\lambda_1 \ldots \int_0^\beta d\lambda_n T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\}.$$

Le potentiel thermodynamique Ω est déterminé à partir de la formule

$$e^{-\Omega}=\operatorname{Sp} e^{-\beta(\mathcal{H}-\mu N)} = e^{-\Omega_0}\operatorname{Sp} w_0 S(\beta),$$

donc

$$\Omega=\Omega_0-\ln\langle S(\beta)\rangle_0, \tag{3.1.23}$$

où Ω_0 et w_0 sont le potentiel thermodynamique et l'opérateur statistique d'un gaz parfait, donnés par les formules (3.1.4), (3.1.2) et $\langle S(\beta)\rangle_0 = \operatorname{Sp} w_0 S(\beta)$.

En vertu des formules (3.1.22), (3.1.23) on a

$$w=e^{\Omega-\beta(\mathcal{H}-\mu N)}=\frac{w_0 S(\beta)}{\langle S(\beta)\rangle_0}. \tag{3.1.24}$$

C'est pourquoi la valeur moyenne d'un opérateur arbitraire a dans l'état décrit par l'opérateur statistique w est égale à

$$\operatorname{Sp} wa=\frac{1}{\langle S(\beta)\rangle_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\beta d\lambda_1 \ldots \int_0^\beta d\lambda_n \langle T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\}a\rangle_0. \tag{3.1.25}$$

où $\langle\ldots\rangle_0 = \operatorname{Sp} w_0 \ldots$

Les formules (3.1.25), (3.1.23) permettent, en principe, de résoudre le problème posé de la recherche des corrections à l'opérateur statistique et au potentiel thermodynamique, dues à l'interaction entre les particules. Comme le hamiltonien de l'interaction est formé sur la base des opérateurs $\psi(x)$, $\psi^+(x)$, le problème revient au calcul

des grandeurs du type Sp $w_0 T\ \{\psi^+(x_1, \lambda_1) \ldots \psi(x_n, \lambda_n)\}$ où

$$\psi(x, \lambda) = e^{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)} \psi(x)\, e^{-\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)},$$

$$\psi^+(x, \lambda) = e^{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)} \psi^+(x)\, e^{-\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)},$$

$$T\{\psi^+(x_1, \lambda_1) \ldots \psi(x_n, \lambda_n)\} = \delta_{\mathcal{P}} \psi(x_{i_1}, \lambda_{i_1}) \ldots \psi^+(x_{i_n}, \lambda_{i_n}),$$

$$\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_n},$$

et $\delta_{\mathcal{P}} = 1$ dans le cas des bosons et $\delta_{\mathcal{P}} = \pm 1$ dans le cas des fermions ($\delta_{\mathcal{P}} = 1$ si la commutation $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \to \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ est paire et $\delta_{\mathcal{P}} = -1$ si la commutation $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \to \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ est impaire). (Notons que les opérateurs $\psi(x, \lambda)$, $\psi^+(x, \lambda)$ ne sont pas hermitiens conjugués, car λ est une grandeur réelle.)

En utilisant le développement $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ suivant les ondes planes (2.2.18) et en remarquant que

$$e^{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)} a_p e^{-\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)} = e^{-\lambda(\varepsilon_p - \mu)} a_p,$$

on peut écrire les opérateurs $\psi(x, \lambda)$, $\psi^+(x, \lambda)$ comme suit

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \mathcal{V}^{-1/2} \sum_p a_p e^{ipx - \lambda(\varepsilon_p - \mu)}, \\ \psi^+(x, \lambda) &= \mathcal{V}^{-1/2} \sum_p a_p^+ e^{-ipx + \lambda(\varepsilon_p - \mu)}. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Puis on introduit les liaisons entre les opérateurs

$$\underbrace{\varphi(x_1, \lambda_1)\, \chi(x_2, \lambda_2)} = \mathrm{Sp}\, w_0 T\ \{\varphi(x_1, \lambda_1)\, \chi(x_2, \lambda_2)\},$$

où chacun des opérateurs φ et χ peut être soit un opérateur de création ψ^+ soit un opérateur d'annihilation ψ. En remarquant que Sp $w_0 a_p^+ a_p = n_p$, Sp $w_0 a_p a_p = 0$ et en utilisant le développement (3.1.26), on obtient

$$\underbrace{\psi^+(x_1, \lambda_1)\, \psi(x_2, \lambda_2)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\int d^3p\, n_p \exp\{ip(x_2 - x_1) - (\varepsilon_p - \mu)(\lambda_2 - \lambda_1)\}, & \lambda_1 > \lambda_2, \\ \pm \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\int d^3p\, (1 \pm n_p) \exp\{ip(x_2 - x_1) - (\varepsilon_p - \mu)(\lambda_2 - \lambda_1)\}, & \lambda_1 < \lambda_2, \end{cases} \tag{3.1.27}$$

$$\underbrace{\psi(x_1, \lambda_1)\, \psi(x_2, \lambda_2)} = \underbrace{\psi^+(x_1, \lambda_1)\, \psi^+(x_2, \lambda_2)} = 0.$$

Les indices supérieurs dans la seconde formule se rapportent aux bosons (on suppose que $T > T_0$), et les indices inférieurs, aux fermions. Il est facile de voir que [1, 34]

$$\begin{gathered}\operatorname{Sp} w_0 T\{\varphi_1 \ldots \varphi_{2n}\} = \sum \delta_{\mathcal{P}} \underbrace{\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}}\ldots \underbrace{\varphi_{i_{2n-1}}\varphi_{i_{2n}}}, \\ \operatorname{Sp} w_0 T\{\varphi_1 \ldots \varphi_{2n+1}\} = 0,\end{gathered} \tag{3.1.28}$$

où $\varphi_i \equiv \psi(x_i, \lambda_i)$, $\psi^+(x_i, \lambda_i)$ et la sommation s'effectue sur toutes les positions éventuelles des liaisons entre $2n$ opérateurs $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$. (Dans le cas des bosons $\delta_{\mathcal{P}} = 1$ et dans le cas des fermions $\delta_{\mathcal{P}} = 1$, si la permutation $1, \ldots, 2n \to i_1, \ldots, i_{2n}$ est paire et $\delta_{\mathcal{P}} = -1$ si la permutation $1, \ldots, 2n \to i_1, \ldots, i_{2n}$ est impaire.) Ces formules sont analogues aux règles bien connues de Vick de l'électrodynamique quantique.

Remarquons que les formules (3.1.23), (3.1.25) peuvent être transformées et s'écrire sous la forme [1]:

$$\Omega = \Omega_0 - \langle S(\beta)\rangle_0^c = \\ = \Omega_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\lambda_1 \ldots \int_0^\beta d\lambda_n \langle T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\}\rangle_0^c,$$

$$\operatorname{Sp} wa = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\lambda_1 \ldots \int_0^\beta d\lambda_n \langle T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\} a\rangle_0^c, \tag{3.1.29}$$

où l'indice c signifie qu'en utilisant les formules (3.1.28) il y a lieu d'omettre les variantes de disposition des liaisons dans les expressions $\langle T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\}\rangle_0$ et $\langle T\{V(\lambda_1)\ldots V(\lambda_n)\}a\rangle_0$ pour lesquelles tous les opérateurs ψ, ψ^+ figurant dans l'un quelconque des groupes de facteurs $V(\lambda_{i_1})\ldots V(\lambda_{i_k})$ ne sont liés qu'entre eux. Les formules (3.1.29) permettent de trouver les corrections à apporter au potentiel thermodynamique Ω et aux fonctions de distribution à particules multiples, corrections dues aux interactions entre les particules.

Le développement (3.1.29) admet une représentation graphique (voir [1]) analogue à la représentation en diagramme de l'électrodynamique quantique (voir [2, 21]), mais nous n'allons pas l'envisager ici.

Remarquons, en conclusion de ce paragraphe, que les formules (3.1.28) restent en vigueur si l'on remplace w_0 par un opérateur statistique plus général (3.1.20), à savoir $\rho^{(0)} = \exp\{\Omega_0 - \sum_{ii'} Y_{ii'} a_i^+ a_{i'}\}$ et si l'on entend par liaison entre deux opérateurs la grandeur $\underbrace{\varphi_1\varphi_2} = \operatorname{Sp} \rho^{(0)} T\{\varphi_1\varphi_2\}$. De plus, il est facile de voir qu'on a les

relations

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\varphi_1\ldots\varphi_{2n}=\sum\delta_{\mathscr{P}}\underbrace{\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}}\ldots\underbrace{\varphi_{i_{2n-1}}\varphi_{i_{2n}}},\quad \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\varphi_1\ldots\varphi_{2n+1}=0, \tag{3.1.30}$$

où $\underbrace{\varphi_1\varphi_2}=\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\varphi_1\varphi_2$ avec la règle: si l'opérateur φ_{i_1} se trouve dans le premier membre de l'égalité (3.1.30) à gauche de l'opérateur φ_{i_2}, dans la liaison $\underbrace{\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}}$ il doit également se trouver à gauche.

On peut également obtenir les formules (3.1.28), (3.1.30) en utilisant la forme explicite de la fonctionnelle génératrice d'un gaz parfait (3.1.21) et les relations (2.4.7), (2.4.8) exprimant les fonctions de distribution à particules miltiples, en fonction de la fonctionnelle génératrice.

3.1.3. Développements quantiques du viriel. Dans le paragraphe précédent nous avons montré comment on peut trouver les corrections à apporter au potentiel thermodynamique et aux fonctions de distribution à particules multiples, dues aux interactions, dans le cas où l'interaction est faible.

Nous allons montrer maintenant comment on peut trouver ces grandeurs pour les systèmes quantiques dans le cas où le rayon d'interaction est petit ou la densité des particules est faible. Rappelons à cet effet que la valeur moyenne d'une grandeur physique quelconque b à l'état d'équilibre statistique est, en vertu de (3.1.24), (3.1.22), donnée par la formule

$$\langle b\rangle\equiv\mathrm{Sp}\,wb=\langle S(\beta)\,b\rangle_0/\langle S(\beta)\rangle_0,\quad S(\beta)=e^{\beta\mathscr{H}_0}e^{-\beta\mathscr{H}}, \tag{3.1.31}$$

l'indice 0 servant à désigner le moyennage sur l'état d'équilibre d'un gaz parfait

$$\langle\ldots\rangle_0=\mathrm{Sp}\,w_0\ldots,\qquad w_0=\exp\{\Omega_0-\beta\sum_1(\varepsilon_1-\mu)\,a_1^+a_1\}.$$

Supposons tout d'abord que la densité des particules est le plus petit des paramètres. Le paramètre $\exp\beta\mu$ sera également petit (voir (3.1.9)), et le développement des grandeurs thermodynamiques suivant les puissances de la densité sera équivalent au développement suivant les puissances de $\exp\beta\mu$, ce qui à son tour correspond au développement fonctionnel en série suivant les puissances de la fonction de distribution d'équilibre d'un gaz parfait n_1 (pour $\exp\beta\mu\ll 1$ on aura l'inégalité $n_1\ll 1$). Soulignons que ce développement n'est lié qu'au développement de l'opérateur statistique d'un gaz parfait w_0 en série suivant les puissances de la densité des particules ou, ce qui est la même chose, de la fonction de distribution.

En vue de l'application à la théorie des équations cinétiques, nous allons maintenant procéder au développement d'un opérateur statistique plus général, à savoir l'opérateur $\rho^{(0)}(f)$ correspondant au gaz parfait hors d'équilibre (voir (3.1.3)), en série suivant les puissances

de la fonction de distribution hors d'équilibre $f(p_l) \equiv f_l$. Pour fixer les idées considérons le cas des bosons. Dans ce cas, en vertu des formules (3.1.3), (3.1.5) l'opérateur $\rho^{(0)}(f)$ est

$$\rho^{(0)}(f)=\exp\left\{-\sum_1 \ln(1+f_1)-\sum_1 a_1^+a_1 \ln\frac{1+f_1}{f_1}\right\} \quad (3.1.32)$$

ou

$$\rho^{(0)}(f)=\prod_1 \frac{1}{1+f_1}\left(\frac{f_1}{1+f_1}\right)^{a_1^+a_1}$$

($\rho^{(0)}(f)$ devient w_0 si $f_1=(e^{\beta(\varepsilon_1-\mu)}-1)^{-1}$). En utilisant la condition de complétude (2.2.9) des vecteurs d'état $a_1^+\ldots a_n^+\,|\,0\rangle = |\,1,\ldots,n\rangle$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{1\ldots n}|1,\ldots,n\rangle\langle 1,\ldots,n|=1,$$

on peut écrire $\rho^{(0)}(f)$ comme

$$\rho^{(0)}(f)=\prod_1 (1+f_1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{1\ldots n}|1,\ldots,n\rangle\frac{f_1\cdot\ldots\cdot f_n}{(1+f_1)\ldots(1+f_n)}\times\langle 1,\ldots,n|.$$

Il est facile d'en obtenir le développement de l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(f)$ en série suivant les puissances de f [38]

$$\rho^{(0)}(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k^{(0)}(f), \quad (3.1.33)$$

où

$$\rho_0^{(0)}(f)=|0\rangle\langle 0|,\quad \rho_1^{(0)}(f)=\sum_1 |1\rangle f_1\langle 1|-\sum_1 |0\rangle f_1\langle 0|,$$

$$\rho_2^{(0)}(f)=\frac{1}{2}\sum_{12}|1,2\rangle f_1f_2\langle 1,2|-\sum_1 |1\rangle\Big(f_1^2+f_1\sum_2 f_2\Big)\langle 1|+ +\frac{1}{2}\Big\{\Big(\sum_1 f_1\Big)^2+\sum_1 f_1^2\Big\}|0\rangle\langle 0|,$$

. . . .

Ainsi, aux termes du développement $\rho^{(0)}(f)$ en série suivant les puissances de f correspondent différents projecteurs $|\,0\rangle\langle 0\,|$, $|\,1\rangle\langle 1|$, $|\,1,2\rangle\langle 1,2\,|$, . . . sur l'état de vide $|\,0\rangle$, l'état à une particule $|\,1\rangle$, l'état à deux particules $|\,1,2\rangle$, etc.

Pour calculer la valeur moyenne $\langle b \rangle$ d'un opérateur quelconque b à l'état d'équilibre statistique w, il suffit, en vertu de (3.1.31), de calculer la valeur moyenne à l'état w_0 des opérateurs $S(\beta)$ et $S(\beta)\,b$. C'est pourquoi nous allons avant tout montrer comment calculer ces valeurs moyennes. Commençons par le calcul des valeurs moyennes des opérateurs $S(\beta)$ et $S(\beta)\,b$ à l'état w_0 en approximations les plus basses suivant la fonction de distribution à une particule. Remarquons que

$$\mathscr{H}\mid 0\rangle = 0, \quad \mathscr{H}\mid 1\rangle = \mathscr{H}_0\mid 1\rangle,$$

on a alors

$$S(\beta)\mid 0\rangle = \mid 0\rangle, \quad S(\beta)\mid 1\rangle = \mid 1\rangle.$$

Comme pour un opérateur B quelconque et pour un état $\mid\varphi\rangle$ quelconque on a

$$\mathrm{Sp}\mid\varphi\rangle\langle\varphi\mid B = \langle\varphi\mid B\mid\varphi\rangle,$$

on obtient le développement de $\langle S(\beta)\rangle_0$ en série suivant les puissances de n_p:

$$\langle S(\beta)\rangle_0 = \sum_{k=0}^{\infty}\langle S(\beta)\rangle_0^{(k)}, \quad \langle S(\beta)\rangle_0^{(0)} = 1, \quad \langle S(\beta)\rangle_0^{(1)} = 0,$$

$$\langle S(\beta)\rangle_0^{(2)} = -\frac{1}{2}\sum_1 n_1^2 - \frac{1}{2}\Big(\sum_1 n_1\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{12} n_1 n_2\langle 1,\ 2\,|\,S(\beta)\,|\,1,\ 2\rangle,$$

. . . .

Comme $\langle 1,\ 2\mid 1,\ 2\rangle = 1 + \delta_{12}$, la grandeur $\langle S(\beta)\rangle_0^{(2)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\langle S(\beta)\rangle_0^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{12} n_1 n_2\langle 1,\ 2\,|\,S(\beta) - 1\,|\,1,\ 2\rangle.$$

Ainsi on obtient finalement

$$\langle S(\beta)\rangle_0 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{12} n_1 n_2\langle 1,\ 2\,|\,S(\beta) - 1\,|\,1,\ 2\rangle + \ldots \qquad (3.1.34)$$

Nous allons maintenant calculer la valeur moyenne des opérateurs $a_1^+a_1$ et $a_1^+a_2^+a_3a_4$. Les formules (3.1.31), (3.1.33) font voir que les valeurs moyennes $\langle a_1^+a_1\rangle$, $\langle a_1^+a_2^+a_3a_4\rangle$, aux termes quadratiques par rapport à la fonction de distribution n_p près, sont données par les formules

$$\langle a_1^+a_1\rangle = n_1 + n_1\sum_2 n_2\langle 1,\ 2\,|\,S(\beta) - 1\,|\,1,\ 2\rangle + \ldots,$$

$$\langle a_1^+a_2^+a_3a_4\rangle = n_1 n_2(\delta_{31}\delta_{42}) + \delta_{32}\delta_{41}) + n_3 n_4\langle 3,\ 4\,|\,S(\beta) - 1\,|\,1,\ 2\rangle + \ldots \qquad (3.1.35)$$

Le second terme de la dernière formule est aux termes quadratiques par rapport à la fonction de distribution n_p près, la fonction de corrélation binaire $g_{34;\,12}$

$$g_{34;\,12} = n_3 n_4 \langle 3,\ 4 \mid S\,(\beta) - 1 \mid 1,\ 2 \rangle. \qquad (3.1.36)$$

La fonction de distribution n_1 est petite, le paramètre $\exp \beta\mu$ étant petit. C'est pourquoi en approximation principale par rapport au paramètre $\exp \beta\mu$, la fonction de distribution sera de la forme

$$g_{34;\,12} = e^{2\beta\mu} \langle 3,\ 4 \mid e^{-\beta\mathscr{H}} - e^{-\beta\mathscr{H}_0} \mid 1, 2 \rangle, \qquad (3.1.37)$$

où $\mathscr{H}$ est le hamiltonien de deux particules compte tenu de leur interaction, $\mathscr{H}_0$ le hamiltonien libre de deux particules, l'élément matriciel étant pris entre les états $\mid 1,\ 2 \rangle = a_1^+ a_2^+ \mid 0 \rangle$ et $\mid 3,\ 4 \rangle = a_3^+ a_4^+ \mid 0 \rangle$. (Pour obtenir la dernière formule nous avons tenu compte du fait que $\langle 3,\ 4 \mid \exp \beta\mathscr{H}_0 = \exp \beta\ (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) \langle 3,\ 4 \mid$.)

En vertu de (3.1.35), la fonction de distribution à une particule en approximation quadratique par rapport à n_1 sera

$$\langle a_1^\dagger a_1 \rangle = n_1 + \sum_2 g_{12;\,12} + \ldots$$

Pour trouver le potentiel thermodynamique Ω, nous allons revenir à la formule (3.1.34). A partir de cette formule et en vertu de (3.1.23), on a aux termes quadratiques par rapport à n_1 près

$$\Omega = \Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{12} g_{12;\,12} + \ldots$$

ou

$$\Omega = \Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)} - \mathrm{Sp}\, g. \qquad (3.1.38)$$

$\Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)}$ est ici le potentiel thermodynamique d'un gaz parfait de Bose $\Omega_0 = -\sum_1 \ln (1 + n_1)$ en approximation quadratique par rapport à n_1:

$$\Omega_0^{(1)} = -\sum_1 n_1, \quad \Omega_0^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_1 n_1^2,$$

et g est l'opérateur à deux particules d'éléments matriciels $g_{12;\,34} \equiv \langle 1,\ 2 \mid g \mid 3,\ 4 \rangle$. (Lors du développement suivant les puissances de $\exp \beta\mu$ dans Ω_0 on ne laisse que les termes proportionnels à $\exp \beta\mu$ et à $\exp 2\beta\mu$.) La grandeur $\Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)}$ est le potentiel thermodynamique d'un gaz classique parfait, compte tenu de la première correction quantique, liée à l'identité des particules. La grandeur $-\mathrm{Sp}\, g$ donne le terme correctif à $\Omega_0^{(1)}$ dû à l'interaction des particules.

Notons que le k-ième terme du développement de $\langle S(\beta)\rangle_0$ suivant les puissances de n_1 contient des termes proportionnels à $\mathcal{V}$, ..., $\mathcal{V}^k$ ($\mathcal{V}$ étant le volume du gaz). Cependant les termes du développement de ln $\langle S(\beta)\rangle_0$ suivant les puissances de n_1 ne seront proportionnels qu'au volume. Pour trouver le potentiel Ω, il faut calculer Sp g. Nous allons calculer cette grandeur en développant Sp g en série suivant les puissances de exp $\beta\mu$ et en supposant pour plus de simplicité que le spin du boson est nul.

Les états à deux particules $|1,2\rangle$ peuvent entièrement être décrits par l'impulsion totale P des particules, leur moment relatif l, la projection m_z de ce moment sur un certain axe et l'énergie du mouvement relatif ε. Pour le spectre continu, $\varepsilon = p^2/m$, où p est l'impulsion du mouvement relatif des particules de masse rapportée $m/2$; dans le cas d'un spectre discret, ε sera une certaine fonction des nombres quantiques n caractérisant l'état lié, $\varepsilon = \varepsilon_n$. Ainsi le spectre $\mathscr{E}$ du hamiltonien $\mathscr{H}$ est

$$\mathscr{E} = P^2/4m + \varepsilon.$$

Pour le calcul de Sp g, en plus du spectre du hamiltonien, il faut connaître la densité des états à deux particules du spectre continu. Pour trouver cette densité, notons que la fonction d'onde radiale du mouvement relatif avec le moment l, pour une grande distance entre les particules est déterminée dans le cas d'un spectre continu par la formule

$$\psi_l(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{r}\sin\left(pr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l(\varepsilon)\right),$$

où $\delta_l(\varepsilon)$ est la phase à l'infini. En supposant que les particules se trouvent dans une grande enceinte sphérique de rayon R, on peut écrire les conditions suivantes de quantification de l'impulsion relative p (ou de l'énergie $\varepsilon = p^2/m$):

$$pR - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l(\varepsilon) = \pi s_l,$$

où s_l est un nombre entier arbitraire. Par conséquent, le nombre d'états du mouvement relatif de moment l sur l'intervalle de l'impulsion relative dp, est égal à

$$ds_l = \frac{dp}{\pi}\left(R + \frac{d\delta_l(\varepsilon)}{dp}\right). \qquad (3.1.39)$$

Le spectre $\mathscr{E}_0$ du hamiltonien $\mathscr{H}_0$ est continu et donné par la formule suivante

$$\mathscr{E}_0 = P^2/4m + p^2/m,$$

et le nombre d'états de moment l sur l'intervalle dp est égal à

$$ds_l = \frac{R}{\pi}dp. \qquad (3.1.40)$$

C'est pourquoi, en vertu de (3.1.37), (3.1.39), (3.1.40), on a

$$\operatorname{Sp} g = e^{2\beta\mu} \sum_{P}{}' \exp\left\{-\frac{\beta P^2}{4m}\right\} \times$$
$$\times \left\{\sum_{n} e^{-\beta\varepsilon_n} + \sum_{l} (2l+1) \int_0^{\infty} \frac{dp}{\pi}\, l^{-\frac{\beta p^2}{m}} \frac{d\delta_l(\varepsilon)}{dp}\right\}$$

où l ne prend que des valeurs paires, car la fonction d'onde du mouvement relatif est symétrique par rapport à la permutation des particules (les particules sont des bosons sans spin). Remarquant que

$$\sum_{P} \exp\left\{-\frac{\beta P^2}{4m}\right\} = \mathscr{V} \left(\frac{m}{\pi\beta}\right)^{3/2},$$

on a

$$\operatorname{Sp}' g = \mathscr{V} \left(\frac{m}{\pi\beta}\right)^{3/2} e^{2\beta\mu} \left\{\sum_{n} e^{-\beta\varepsilon_n} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi} \sum_{l} (2l+1) \int_0^{\infty} d\varepsilon e^{-\beta\varepsilon} \frac{d\delta_l(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right\}. \qquad (3.1.41)$$

En substituant cette expression dans (3.1.38), on trouve le potentiel thermodynamique d'un gaz de bosons dans le cas d'une densité faible.

Si l'on envisage un gaz de fermions, alors, il est facile de s'en rendre compte, les formules (3.1.34), (3.1.35), (3.1.38) restent sans changement dans le cas où l'on entend par n_1 une fonction de distribution de Fermi à l'équilibre (3.1.7) et par Ω_0 le potentiel thermodynamique d'un gaz parfait de Fermi (3.1.6) de faible densité, c'est-à-dire $\Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)} = -\sum_1 n_1 - \frac{1}{2} \sum_1 n_1^2$; les éléments matriciels de l'opérateur g à deux particules doivent être pris entre deux états antisymétriques à deux particules.

Les formules que nous avons obtenues, sont vraies si la distance moyenne entre les particules a est grande, tant par rapport au rayon d'interaction des particules r_0 que par rapport à leur longueur d'onde broglienne λ.

Considérons maintenant le cas où le rayon d'interaction est le plus petit des paramètres de sorte que $r_0 \ll a$, $r_0 \ll \lambda$ pour ce qui est de la relation existant entre a et λ, elle peut être quelconque. Dans ce cas, la fonction de distribution des particules d'un gaz parfait n_p, ne sera pas petite par rapport à l'unité. On peut montrer que dans ce cas les relations (3.1.35), (3.1.38) seront vérifiées du point de vue formel, cependant dans ces relations n_p n'est pas la fonction de distribution de Maxwell mais la fonction de distribution de Fermi ou de Bose; de plus, au lieu de $\Omega_0^{(1)}+\Omega_0^{(2)}$, dans la formule (3.1.38) on aura le potentiel thermodynamique d'un gaz parfait quantique Ω_0 [51, 39].

§ 3.2. Superfluidité d'un gaz de bosons et de fermions

3.2.1. Valeurs quasi moyennes. Dans les paragraphes précédents nous avons développé la théorie des perturbations pour un gaz quantique faiblement non parfait. Cependant cette théorie n'est pas applicable dans les cas où l'interaction entre les particules conduit à un changement notable de l'état fondamental ou de l'état d'équilibre statistique, changement au cours duquel la symétrie de l'état change. Il est important de souligner que ceci peut avoir lieu même pour une interaction aussi faible que l'on veut. Dans ce paragraphe nous allons envisager deux exemples expliquant cette assertion. Mais préalablement nous allons comme Bogolioubov introduire la notion de valeur *quasi moyenne* [19].

Nous avons trouvé les moyennes dans l'état d'équilibre statistique à l'aide de la formule

$$\langle a\rangle = \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \operatorname{Sp} wa, \quad w = \exp(\Omega - \beta(\mathcal{H} - \mu N)).$$

Ces moyennes peuvent cependant s'avérer instables par rapport à une variation infiniment petite du hamiltonien. A savoir, si l'on remplace $\mathcal{H} - \mu\mathcal{H} \equiv H$ par $H_\nu = \mathcal{H} - \mu N + \nu\mathcal{H}_1$ et si l'on calcule la grandeur

$$\{a\} = \lim_{\nu\to 0} \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \operatorname{Sp} w_\nu a, \quad w_\nu = \exp(\Omega_\nu - \beta H_\nu), \tag{3.2.1}$$

cette grandeur, appelée valeur quasi moyenne de a, peut ne pas coïncider avec la grandeur $\langle a\rangle$, car les passages à la limite $\mathcal{V}\to\infty$ et $\nu\to 0$ peuvent ne pas être permutables dans un certain domaine des variations des paramètres μ et β. Il est évident que pour un volume fini w_ν est une fonction analytique de ν, de sorte que sans passage à la limite $\mathcal{V}\to\infty$ les valeurs quasi moyennes ne différeraient pas des valeurs moyennes.

La valeur de la grandeur $\{a\}$ peut dépendre de la structure du hamiltonien supplémentaire $\nu\mathcal{H}_1$. Pour expliquer ceci, considérons un certain groupe de symétrie du « hamiltonien » H. A ce groupe correspondent les générateurs Γ_i qui commutent avec le « hamiltonien » H, $[H, \Gamma_i] = 0$. Soit maintenant un certain opérateur B invariant par rapport aux transformations de ce groupe, de sorte que $A_i \equiv [B, \Gamma_i] \neq 0$. Il est alors évident que la moyenne de l'opérateur A_i sera nulle:

$$\langle A_i\rangle = 0. \tag{3.2.2}$$

D'autre part, puisque le commutateur $[\mathcal{H}_1, \Gamma_i]$ est en général différent de zéro, on a $\langle A_i\rangle_\nu = \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \operatorname{Sp} w_\nu [B, \Gamma_i] \neq 0$. Donc, en

principe, il est possible que la grandeur $\langle A_i \rangle_\nu$ ne tende pas vers zéro, pour $\nu \to 0$ et dans le cas général dépende de la structure de $\mathcal{H}_1$.

Comme nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, la différence entre les valeurs quasi moyennes et moyennes peut avoir lieu dans un certain domaine de variation des paramètres β et μ. Cette différence est due à des transitions de phase pour lesquelles on a un changement de symétrie de l'état d'équilibre statistique.

Considérons avant tout, à titre d'exemple, une substance ferromagnétique parfaite de Heisenberg, dont le hamiltonien est

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{lm} \mathcal{I}_{lm} s_l s_m,$$

où s_l est l'opérateur du spin de l'atome se trouvant dans le l-ième nœud du réseau cristallin et $\mathcal{I}_{lm}$ l'intégrale d'échange entre le l-ième et le m-ième atome. Ce hamiltonien est invariant par rapport au groupe de rotations spatiales dont les générateurs coïncident avec le vecteur de spin total $\Gamma = \sum_l s_l = \mathcal{S}$. Il est évident que $[\mathcal{H}, \Gamma] =$ $= 0$. C'est pourquoi si l'on prend l'opérateur de spin total $\mathcal{S}$ en tant qu'opérateur B, on obtient, en vertu de la formule (3.2.2), $\langle [S_i S_k] \rangle = 0$ et comme $[S_i, S_k] = i\varepsilon_{ikl} S_l$ on a $\langle S_l \rangle = 0$. Cette relation est liée à l'absence de direction préférentielle dans l'espace et, comme le montre la démonstration, elle est vraie quelle que soit la température.

Entre temps, on sait qu'au-dessous du point de Curie les substances ferromagnétiques ont une aimantation spontanée et par conséquent toutes les composantes $\langle S_i \rangle$ ne peuvent s'annuler. Ceci signifie qu'en utilisant les valeurs moyennes habituelles, on n'aura pas une description correcte de l'état d'une substance ferromagnétique au-dessous du point de Curie. D'un autre côté, des considérations physiques montrent que si l'on tient compte de l'interaction d'une substance ferromagnétique avec un champ magnétique H aussi petit que l'on veut, on peut obtenir au-dessous du point de Curie un spin total différent de zéro. Ceci signifie que

$$\lim_{H\to 0} \lim_{\mathcal{V}\to 0} \mathrm{Sp}\, \mathcal{S} \exp\left\{\Omega - \beta\left(\mathcal{H} - \frac{\mu H}{s} n\mathcal{S}\right)\right\} = \frac{s}{\mu}\mathcal{M},$$

où n est un vecteur unitaire dirigé le long du champ magnétique extérieur, $\mathcal{M}$ le moment magnétique spontané. La grandeur $\mathcal{M}$ est la quasi-moyenne du spin total (la valeur absolue du champ magnétique H joue le rôle du paramètre ν).

On voit, qu'en utilisant la notion de valeur quasi moyenne, on peut obtenir une description exacte de l'état d'une substance ferromagnétique. Notons que la valeur quasi moyenne $\{\mathcal{S}\}$ dépend de n, c'est-à-dire de la structure du hamiltonien supplémentaire $\nu\mathcal{H}_1$, ce que nous avons souligné ci-dessus.

Notons que si les opérations $\lim\limits_{\mathcal{V}\to\infty}$ et $\lim\limits_{\nu\to 0}$ étaient permutables, la grandeur $\mathcal{M}$ serait nulle. C'est ce qui se passe au-dessus du point de Curie.

La notion de valeur quasi moyenne permet de préciser le principe d'affaiblissement des corrélations. En effet, en vertu de la formulation que nous avons donnée de ce principe, la valeur moyenne du produit des opérateurs de deux points suffisamment éloignés l'un de l'autre dans l'espace est égale au produit des valeurs moyennes de ces opérateurs. Entre temps, comme il est facile de le voir, dans cette formulation l'affirmation mentionnée peut ne pas être vraie. Considérons, par exemple, la valeur moyenne du produit des spins $\langle s_{l,i}, s_{m,k}\rangle$. Pour $l-m\to\infty$ au-dessous du point de Curie cette grandeur est alors différente de zéro. Cependant, si le principe d'affaiblissement des corrélations était vrai pour les valeurs moyennes, pour $l-m\to\infty$ cette grandeur serait nulle car $\langle s_{l,i}\rangle=0$. Si pourtant on remplace les valeurs moyennes par les valeurs quasi moyennes, le principe d'affaiblissement des corrélations sera de nouveau vrai

$$\prec s_{l,i}s_{m,k}\succ \xrightarrow[l-m\to\infty]{} \prec s_{l,i}\succ\cdot\prec s_{m,k}\succ .$$

A titre de second exemple, nous allons envisager le phénomène de la condensation de Bose. Rappelons (voir le paragraphe (3.1.1)) qu'il s'agit de ce que, à des températures suffisamment basses, le nombre de bosons qui se trouvent dans l'état d'impulsion nulle sera, à la différence des états d'impulsion non nulle, une grandeur macroscopique, c'est-à-dire qu'il sera proportionnel au volume. Ceci a lieu non seulement pour un gaz de Bose parfait, mais également pour un système de bosons en interaction. On dit que les particules d'impulsion nulle forment un *condensat de Bose.* Ainsi $n_0\equiv\langle a_0^+a_0\rangle\sim\mathcal{V}$. Si l'on introduit les opérateurs $\alpha_0=a_0/\sqrt{\mathcal{V}}$, $\alpha_0^+=a_0^+/\sqrt{\mathcal{V}}$ tels que $\langle\alpha_0^+\alpha_0\rangle\sim 1$, ils satisferont aux relations de commutation

$$[\alpha_0,\ \alpha_0^+]=1/\mathcal{V},\qquad [\alpha_0,\ \alpha_p^+]=0\quad (p\neq 0).$$

C'est pourquoi, pour $\mathcal{V}\to\infty$, les grandeurs α_0, α_0^+ et par conséquent a_0 et a_0^+ aussi se comporteront comme des c-nombres qu'on doit considérer comme différant de zéro.

Entre temps, la valeur moyenne de l'opérateur a_0 est nulle. En effet, le hamiltonien $\mathcal{H}$ du système de bosons est invariant en gradient et commute donc avec l'opérateur du nombre de particules N. En prenant la moyenne de la relation $[a_0, N]=a_0$ sur la distribution de Gibbs, on obtient l'égalité $\langle a_0\rangle=0$. Mais, comme nous venons de le noter, s'il y a condensation de Bose, la grandeur α_0 est différente de zéro. Cette contradiction est levée si l'état d'équilibre sta-

tistique est décrit par des grandeurs quasi moyennes et non des grandeurs moyennes. En effet, on définit α_0 comme

$$\alpha_0 = \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mathcal{V} \to \infty} (\mathcal{V})^{-1/2} \operatorname{Sp} w_\nu a_0$$

et on prend pour hamiltonien de perturbation $\nu \mathcal{H}_1 = \nu (\mathcal{V})^{1/2} \times (a_0 e^{i\varphi} + a_0^+ e^{-i\varphi})$ où φ est une phase arbitraire. Alors, étant donné la perturbation $\nu \mathcal{H}_1$ ne commutant pas avec l'opérateur du nombre total de particules, la grandeur α_0 peut être différente de zéro. Ceci exige naturellement que les passages à la limite $\mathcal{V} \to \infty$, $\nu \to 0$ ne soient pas permutables.

Nous allons maintenant montrer que pour un gaz de bosons en présence du condensat, tout comme dans le cas d'une substance ferromagnétique, le principe d'affaiblissement des corrélations sera vrai si l'on utilise la notion de valeurs quasi moyennes et non moyennes. A cet effet, écrivons la valeur moyenne du produit des opérateurs $\psi^+(x_1)\psi(x_2)$ sous la forme

$$\langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle = (\mathcal{V})^{-1} \sum_p \langle a_p^+ a_p \rangle e^{-ip(x_1-x_2)} = \frac{n_0}{\mathcal{V}} + \int d^3p \nu_p e^{-ip(x_1-x_2)},$$

où ν_p est la fonction de distribution des particules au-dessus du condensat $\nu_p = (2\pi)^{-3} \langle a_p^+ a_p \rangle$, $p \neq 0$. Cette formule montre que

$$\langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle \xrightarrow[x_1 - x_2 \to \infty]{} n_0/\mathcal{V}. \qquad (3.2.3)$$

D'un autre côté, en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations, si l'on utilise les valeurs moyennes, on a $\langle \psi^+(x_1)\psi(x_2)\rangle \to \langle \psi^+(x_1)\rangle \langle \psi(x_2)\rangle$, et vu que $\langle \psi(x)\rangle = 0$, la grandeur $\langle \psi^+(x_1) \times \psi(x_2)\rangle$ tendra vers zéro pour $x_1 - x_2 \to \infty$, ce qui se trouve en contradiction avec (3.2.3). Cependant, si l'on utilise au lieu des valeurs moyennes des valeurs quasi moyennes, la contradiction disparaît, car

$$\wr \psi \wr = (n_0/\mathcal{V})^{1/2} \exp i\varphi, \quad \wr \psi^+ \wr = (n_0/\mathcal{V})^{1/2} \exp(-i\varphi).$$

La situation est analogue lors des autres transitions de phase. Par exemple, lorsqu'un métal passe de l'état normal à l'état supraconducteur, les valeurs moyennes se trouvent être instables par rapport à la perturbation du hamiltonien détruisant l'invariance du gradient. C'est pourquoi, en utilisant la notion de valeur quasi moyenne, on peut également décrire correctement l'état des supraconducteurs au-dessous du point de transition.

Lorsque l'on passe de la phase liquide à la phase cristalline, les valeurs moyennes se trouvent être également instables par rapport à la perturbation du hamiltonien, détruisant l'invariance par rapport aux translations. C'est pourquoi, il y a lieu, ici aussi, de faire appel à la notion de valeur quasi moyenne.

En résumant on peut dire, que la différences entre les valeurs moyennes et quasi moyennes apparaît lors des transitions de phase pour lesquelles il y a une diminution de la symétrie de l'état d'équilibre statistique par rapport à la symétrie du hamiltonien initial. Avec cela, les valeurs quasi moyennes dépendent en général essentiellement de la structure du hamiltonien de perturbation qui enfreint la symétrie du hamiltonien $\mathscr{H}$ du système. Si, cependant, la grandeur moyennée a une symétrie coïncidant avec la symétrie qui est détruite à l'état d'équilibre statistique, pour une telle grandeur la valeur quasi moyenne ne dépend pas de la structure du hamiltonien de perturbation. En particulier, le potentiel thermodynamique, rapporté à l'unité de volume, ne doit pas dépendre de la structure du hamiltonien de perturbation.

Lorsqu'on utilise les valeurs quasi moyennes, on va supposer en se basant sur les exemples envisagés, que, premièrement, la limite $\lim_{\nu\to 0} \lim_{\mathscr{V}\to\infty} \Omega_\nu/\mathscr{V}$ existe et ne dépend pas de la structure du terme $\nu\mathscr{H}_1$ détruisant la symétrie; deuxièmement, les fonctions de distribution à particules multiples (quasi moyennes) $\{\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n)\} = \lim_{\nu\to\infty} \lim_{\mathscr{V}\to\infty} \operatorname{Sp} w_\nu\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n)$ existent, et les formes, dont la symétrie coïncide avec celle qui est enfreinte à l'état d'équilibre statistique, ne dépendent pas de la structure du terme $\nu\mathscr{H}_1$ détruisant la symétrie, et troisièmement, les valeurs quasi moyennes $\{\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n)\}$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations. Les valeurs moyennes

$$\langle\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n)\rangle_\nu \equiv \lim_{\mathscr{V}\to\infty} \operatorname{Sp} w_\nu\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n)$$

pour $\nu \neq 0$ satisfont également au principe d'affaiblissement des corrélations, mais pour $\nu = 0$, elles peuvent ne pas y satisfaire. Notons qu'en mécanique quantique les valeurs moyennes peuvent aussi dépendre de la structure de la perturbation infiniment petite. A savoir, lors de la solution du problème stationnaire

$$(\mathscr{H} + \nu\mathscr{H}_1)\psi_\nu = \mathscr{E}(\nu)\psi_\nu$$

le vecteur d'état ψ_ν dépend de la structure de $\mathscr{H}_1$ pour $\nu \to 0$ si le niveau d'énergie $\mathscr{E}(0)$ est dégénéré. C'est pourquoi, si les valeurs quasi moyennes diffèrent des moyennes, on dit que *l'état d'équilibre statistique est dégénéré*. Par contre s'il n'y a pas de différence entre les valeurs moyennes et quasi moyennes, on dit que l'état d'équilibre statistique est *normal* ou *non dégénéré*.

Soulignons une fois de plus que la nécessité d'introduire des valeurs quasi moyennes, au lieu des moyennes habituelles est liée à ce que l'état d'équilibre statistique du système peut avoir une symétrie plus basse que celle du hamiltonien du système. C'est

pourquoi, on parle de *destruction spontanée de la symétrie*. Par exemple, l'état cristallin est un état de symétrie spontanément détruite de translations et de rotations de l'interaction des particules.

3.2.2. Théorie de la superfluidité d'un gaz de Bose. La théorie thermodynamique des perturbations exposée au paragraphe 3.1.2 n'est pas applicable à l'étude des propriétés d'un gaz de Bose non parfait au-dessous du point de condensation même dans le cas d'une interaction faible entre les particules. Ceci est lié à ce que dans les séries de la théorie des perturbations apparaissent des termes divergeant dans le domaine des petites impulsions. A son tour cette divergence est liée à ce que la fonction de distribution de Bose, de potentiel chimique nul, se comporte dans le domaine des impulsions petites comme $n_p \sim 2mT/p^2$. C'est pourquoi pour l'étude d'un gaz de Bose faiblement non parfait il y a lieu d'utiliser une théorie spéciale des perturbations. Cette théorie a été élaborée par Bogolioubov [22].

Passant à l'étude de cette question, rappelons préalablement que, comme noté dans le paragraphe 2.3.4, les opérateurs de création et d'annihilation des particules d'impulsion $\boldsymbol{p} = 0$ peuvent être envisagés, pour des températures au-dessous du point de transition, comme des c-nombres. C'est pourquoi dans le hamiltonien et dans la distribution de Gibbs les opérateurs a_0^+ et a_0 peuvent être remplacés par $n_0^{1/2}$, n_0 étant le nombre de bosons d'impulsion $\boldsymbol{p} = 0$ *). Le hamiltonien de l'interaction entre les particules

$$V = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{1234} \nu(1-3)\, \delta_{1+2,\,3+4} a_1^+ a_2^+ a_3 a_4,$$

où $\nu(\boldsymbol{p})$ est la transformation de Fourier de l'énergie d'interaction entre les particules

$$\nu(\boldsymbol{p}) = \int d^3x V(\boldsymbol{x}) \exp(-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}),$$

peut s'écrire comme

$$V \to V(n_0) = f(n_0) + \frac{\partial f(n_0)}{\partial n_0} N' + n_0 V_2 + n_0^{1/2} V_3 + V_4 \quad (3.2.4)$$

avec $f(n_0) = n_0^2 \nu(0)/2\mathcal{V}$, $N' = \sum_{1\neq 0} a_1^+ a_1$ et

$$V_2 = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{1\neq 0} \nu(1)(a_1^+ a_1 + a_1^+ a_{-1}^+) + \text{c.h.}^{**}),$$

$$V_3 = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{123\neq 0} \nu(2)\, \delta_{1+2,\,3} a_1^+ a_2^+ a_3 + \text{c.h.},$$

$$V_4 = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{1234\neq 0} \nu(1-3)\, \delta_{1+2,\,3+4} a_1^+ a_2^+ a_3 a_4.$$

*) Pour la démonstration rigoureuse voir [19].

**) Ici et plus loin c.h. signifie conjugué hermitien.

(Le hamiltonien V s'obtient à partir de (2.2.29) en passant des opérateurs $\psi(x)$, $\psi^+(x)$ aux opérateurs a_p, a_p^+.)

Lors de la substitution $a_0 \to n_0^{1/2}$, $a_0^+ \to n_0^{1/2}$ les opérateurs de l'énergie cinétique $\mathcal{H}_0$ et de l'impulsion $\boldsymbol{P}$ des particules ne changent pas, et l'opérateur du nombre des particules est remplacé par l'opérateur $N(n_0) = n_0 + N'$. La distribution de Gibbs w devient alors

$$w \to w(n_0) = \exp\{\Omega - \beta(\mathcal{H}(n_0) - u\boldsymbol{P} - \mu n_0 - \mu N')\}, \quad (3.2.5)$$

où $\mathcal{H}(n_0) = \mathcal{H}_0 + V(n_0)$ et Ω en tant que fonction de β, μ, u, n_0 est donné par la condition de normalisation $\operatorname{Sp} w(n_0) = 1$ (la trace est prise dans l'espace des nombres de remplissage de l'impulsion $p \neq 0$). On voit que la grandeur n_0 figure dans le potentiel thermodynamique Ω comme un paramètre arbitraire. Entre temps, il est clair que n_0 — nombre de particules dans le condensat — doit être une fonction déterminée de β, μ, u. Nous allons montrer qu'on peut trouver n_0 à partir de la condition de minimum du potentiel Ω [19]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_0} = 0. \quad (3.2.6)$$

Nous allons, à cet effet, utiliser la méthode des valeurs quasi moyennes. Conformément à cette méthode, il faut ajouter au hamiltonien $\mathcal{H}$ le terme $\nu \mathcal{V}^{1/2}(a_0 + a_0^+)$ détruisant la symétrie du hamiltonien par rapport aux transformations de gradient et faire tendre ν vers zéro après le passage à la limite thermodynamique. En utilisant l'identité

$$\operatorname{Sp} w_\nu[\mathcal{H} - u\boldsymbol{P} - \mu N + \nu \mathcal{V}^{1/2}(a_0 + a_0^+),\ a_0 - a_0^+] = 0,$$

on trouve

$$2\mu n_0^{1/2} = 2\nu \mathcal{V}^{1/2} - \operatorname{Sp} w_\nu [V,\ a_0 - a_0^+]. \quad (3.2.7)$$

Puis, en remarquant que $[a_0, a_0^+] = 1$, on obtient après le calcul du commutateur $[V,\ a_0 - a_0^+]$, avec substitution ultérieure $a_0 \to n_0^{1/2}$ et en passant à la limite $\nu \to 0$:

$$-\operatorname{Sp} w_\nu [V,\ a_0 - a_0^+] \to 2n_0^{1/2} \operatorname{Sp} w(n_0) \frac{\partial V(n_0)}{\partial n_0}. \quad (3.2.8)$$

Comme en vertu de (3.2.5)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_0} = -\beta \left\{ \mu - \operatorname{Sp} w(n_0) \frac{\partial V(n_0)}{\partial n_0} \right\},$$

à partir de (3.2.7), (3.2.8), on obtient la condition (3.2.6) ainsi que

$$\mu = \operatorname{Sp} w(n_0) \frac{\partial V(n_0)}{\partial n_0}. \quad (3.2.6')$$

Les relations obtenues jusqu'à présent sont des relations exactes.

Supposons maintenant que l'interaction entre les particules est faible et la température suffisamment basse. Dans ce cas, $n_0/\mathcal{V}$ sera

un paramètre grand, car pour $T \to 0$ et $\nu(p) \to 0$ toutes les particules appartiennent au condensat. C'est pourquoi le plus grand des termes de l'expression (3.2.4) sera $f(n_0)$, puis viendront $N' \partial f/\partial n_0$ et $n_0 V_2$. Les termes $n_0^{1/2} V_3$, V_4 seront omis, car il n'y a lieu d'en tenir compte que lorsqu'on envisage l'interaction entre les quasi-particules que nous allons maintenant introduire.

En supposant que n_0 est une variable indépendante et en remplaçant dans la formule (3.2.6') $V(n_0)$ par $f(n_0)$, on trouve le potentiel chimique comme une fonction de n_0 en approximation principale (pour des températures basses et une interaction faible entre les particules) :

$$\mu(n_0) \approx \frac{\partial f(n_0)}{\partial n_0} = \frac{n_0}{\mathcal{V}} \nu(0). \tag{3.2.9}$$

En utilisant cette expression et en négligeant dans $V(n_0)$ le terme $n_0^{1/2} V_3 + V_4$, on obtient

$$w(n_0) \approx w_0(n_0) = \exp\{\Omega_0 - \beta(\mathcal{H}_q(n_0) - uP)\},$$

où

$$\mathcal{H}_q(n_0) = \mathcal{H}_0 + n_0 V_2 - f(n_0) \tag{3.2.10}$$

et Ω_0 est donné à partir de la condition de normalisation Sp $w_0(n_0) = 1$. Remarquons que le potentiel Ω dans la formule (3.2.5) en approximation envisagée coïncide avec le potentiel Ω_0.

En utilisant ensuite l'expression explicite (3.2.4) pour V_2, on peut écrire $\mathcal{H}_q(n_0)$ comme

$$\mathcal{H}_q(n_0) = \sum_{1 \neq 0} \left\{\alpha_1 a_1^+ a_1 + \frac{1}{2} \beta_1 (a_1^+ a_{-1}^+ + a_1 a_{-1})\right\} - f(n_0), \tag{3.2.11}$$

où $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \beta_1$, $\varepsilon_1 = p_1^2/2m$, $\beta_1 = \nu(1) n_0/\mathcal{V}$.

Nous allons maintenant trouver une transformation unitaire U $(UU^+ = 1)$ qui diagonalise cet opérateur, à savoir

$$U\mathcal{H}_q(n_0) U^+ = \sum_{1 \neq 0} \omega_1 a_1^+ a_1 + E_0, \tag{3.2.12}$$

où E_0 est l'énergie de l'état fondamental pour $\mathcal{H}_q(n_0)$ et ω_1 le spectre de l'énergie des quasi-particules. Il est facile de voir que pour la diagonalisation de $\mathcal{H}_q(n_0)$ il suffit de se limiter aux opérateurs unitaires U mélangeant les opérateurs a_1 et a_{-1}^+ [22] :

$$\begin{aligned} Ua_1U^+ &= a_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + a_{-1}^+ \operatorname{sh} \varphi_1, \\ Ua_1^+U^+ &= a_1^+ \operatorname{ch} \varphi_1 + a_{-1} \operatorname{sh} \varphi_1, \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

où φ_1 est une certaine grandeur qu'il y a lieu de définir. Il est évident qu'un tel opérateur existe, car les opérateurs $a_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + a_{-1}^+ \operatorname{sh} \varphi_1$ et $a_1^+ \operatorname{ch} \varphi_1 + a_{-1} \operatorname{sh} \varphi_1$ satisfont aux mêmes relations de permu-

tation que les opérateurs a_1 et a_1^+. Remarquons que

$$[Ua_1U^+, a_1] = -\delta_{1,-1'} \operatorname{sh} \varphi_1, \quad [Ua_1^+, U^+, a_1] = -\delta_{1,1'} \operatorname{ch} \varphi_1,$$

par conséquent, en vertu de (3.2.11), (3.2.13), on a

$$[U\mathscr{H}_q(n_0)\, U^+, a_1] = -(\alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \varphi_1)\, a_{-1}^+ - \\ - (\alpha_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \varphi_1)\, a_1 = \omega_1 a_1,$$

on obtient donc

$$\alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \varphi_1 = 0, \quad \alpha_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \varphi_1 = \omega_1,$$

d'où

$$\omega_1 = (\alpha_1^2 - \beta_1^2)^{1/2}, \quad \operatorname{th} \varphi_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}. \tag{3.2.14}$$

A partir des formules (3.2.13) il s'ensuit

$$UPU^+ = P$$

(nous avons tenu compte de ce que ($\varphi_1 = \varphi_{-1}$), c'est pourquoi on a

$$Uw_0(n_0)\, U^+ = \exp\{\tilde{\Omega}_0 - \beta \sum_1 (\omega_1 - p_1 u)\, a_1^+ a_1, \\ \tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 - \beta E_0. \tag{3.2.15}$$

Pour trouver l'énergie de l'état fondamental E_0, considérons le vecteur d'état $|\,0\rangle$ dans lequel il n'y a pas de particules au-dessus du condensat

$$a_1 \,|\, 0\rangle = 0. \tag{3.2.16}$$

En moyennant la relation (3.2.12) sur cet état et en utilisant les formules (3.2.13), on trouve

$$E_0 = -f(n_0) + \sum_1 (\alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \varphi_1) \operatorname{sh} \varphi_1.$$

Nous allons maintenant trouver l'opérateur unitaire U. En dérivant la relation (3.2.13) par rapport à φ_1, on obtient

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} U^+, \; Ua_1U^+\right] = a_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + a_{-1}^+ \operatorname{ch} \varphi_1,$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} U^+, \; Ua_1^+U^+\right] = a_1^+ \operatorname{sh} \varphi_1 + a_{-1} \operatorname{ch} \varphi_1.$$

En utilisant de nouveau les relations (3.2.13), on trouve

$$\left[U^+ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}, \; a_1\right] = a_{-1}^+, \quad \left[U^+ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}, \; a_1^+\right] = a_{-1},$$

d'où

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = -U\,(a_1^+ a_{-1}^+ - a_1 a_{-1})$$

et par conséquent

$$U = \exp \frac{1}{2} \sum_{1} \varphi_1 (a_1 a_{-1} - a_1^+ a_{-1}^+), \quad \varphi_1 = \varphi_{-1}. \tag{3.2.17}$$

A partir de l'expression pour U on peut trouver le vecteur de l'état fondamental du système. Ce vecteur, que nous désignerons par $|0)$, satisfait à l'équation

$$\mathscr{H}_q (n_0) \mid 0) = E_0 \mid 0)$$

et, par conséquent, en vertu de (3.2.12), il s'écrit comme

$$\mid 0) = U^+ \mid 0\rangle, \tag{3.2.18}$$

où $|0\rangle$ est le vecteur d'état (3.2.16).

Les valeurs propres des opérateurs $a_1^+ a_1$ étant égales à 0, 1, 2, . . ., la grandeur ω_1 figurant dans la formule (3.2.12) donne, comme nous l'avons déjà mentionné, le spectre des excitations élémentaires de Bose. Compte tenu des formules (3.2.11) la grandeur $\omega_1 = \omega_p$ peut s'écrire comme suit

$$\omega_p = \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 + \frac{n_0}{\mathscr{V}} \frac{\nu(p)}{m} p^2 \right\}^{1/2}. \tag{3.2.19}$$

On voit que dans le domaine des p grands le spectre des excitations élémentaires coïncide avec l'énergie d'une particule libre. Par contre, dans le domaine des p petits, le spectre coïncide avec le spectre des phonons:

$$\omega_p = cp, \quad c = \left(\frac{n_0}{\mathscr{V}} \frac{\nu(0)}{m} \right)^{1/2}.$$

La grandeur c, comme il est facile de le montrer [18], coïncide avec la vitesse du son au zéro absolu dans un gaz de Bose faiblement non parfait.

Notons que la grandeur ω_p doit être réelle pour tous les $\boldsymbol{p}$. C'est pourquoi, on doit avoir la condition $\nu(0) > 0$ qui est la condition de stabilité de l'état fondamental du système envisagé et signifie que les forces de répulsion dominent en moyenne sur les forces d'attraction.

Nous allons trouver le nombre de particules n_1 d'impulsion $\boldsymbol{p}_1$ dans l'état d'équilibre statistique auquel correspond l'opérateur statistique $w_0(n_0)$. Ce nombre est de toute évidence donné par la formule suivante

$$n_1 = \mathrm{Sp}\, w_0(n_0)\, a_1^+ a_1 = \mathrm{Sp}\, U w_0(n_0)\, U^+ U a_1^+ a_1 U^+.$$

En utilisant les relations (3.2.13), (3.2.15), on obtient

$$n_1 = \tilde{n}_1 + (1 + \tilde{n}_1 + \tilde{n}_{-1}) \operatorname{sh}^2 \varphi_1, \tag{3.2.20}$$

où

$$\tilde{n}_1 = (\exp \beta (\omega_1 - \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{u}) - 1)^{-1}. \tag{3.2.21}$$

La grandeur $\tilde{n}_1$ est la fonction de distribution des quasi-particules. Comme le système de référence est fixé (le condensat y est au repos), la grandeur $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}_n$ doit être interprétée comme la vitesse du gaz de quasi-particules par rapport au condensat. Cette vitesse est appelée *vitesse de la composante normale* d'un gaz de Bose.

L'impulsion $\boldsymbol{P}$ d'un gaz de Bose est, de toute évidence, égale à

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{Sp}\, w_0(n_0)\, \boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p} n_{\boldsymbol{p}}, \tag{3.2.22}$$

c'est-à-dire, en vertu de (3.2.20),

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p} \tilde{n}_{\boldsymbol{p}}. \tag{3.2.23}$$

Ainsi l'impulsion d'un gaz de Bose est égale à l'impulsion d'un gaz de quasi-particules.

En substituant dans (3.2.23) la distribution (3.2.21) on obtient

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{V} \rho_n^{(m)} \boldsymbol{u}_n, \quad \rho_n^{(m)} = (2\pi)^{-3} u_n^{-2} \int d^3p\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{u}_n \tilde{n}_{\boldsymbol{p}}.$$

La grandeur $\rho_n^{(m)}$ peut être interprétée comme la *densité de la composante normale* d'un gaz de Bose non parfait, c'est-à-dire comme la densité d'un gaz de quasi-particules. Quant à la grandeur $\rho_s^{(m)} = \rho^{(m)} - \rho_n^{(m)}$, où $\rho^{(m)}$ est la densité du gaz, elle peut être interprétée comme la *densité de la composante superfluide* d'un gaz de Bose. (Dans le système de référence où le condensat est au repos, la vitesse de la composante superfluide $\boldsymbol{u}_s$ est nulle.)

Notons que pour que la distribution de Gibbs (3.2.15) ait un sens et, en particulier, pour que la grandeur $\tilde{n}_{\boldsymbol{p}}$ soit supérieure à zéro, il faut que quel que soit $\boldsymbol{p}$ on ait l'inégalité

$$\omega_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{u} > 0.$$

Par conséquent

$$u < u_0, \quad u_0 = \min_{\boldsymbol{p}} \frac{\omega_p}{p}. \tag{3.2.24}$$

Ce n'est que pour ces valeurs de la vitesse de la composante normale (dans le système où la composante superfluide est au repos) que l'effet de *superfluidité* aura lieu. Landau a donné une théorie phénoménologique de cet effet [71].

Nous allons maintenant trouver le caractère que porte l'état fondamental $|0)$. A cet effet, on définit la grandeur

$$L = (0|\exp \sum_1 \xi_1 a_1^\dagger |0\rangle = \langle 0| U \exp \sum_1 \xi_1 a_1^\dagger |0\rangle. \tag{3.2.25}$$

En dérivant L par rapport à ξ on peut trouver les grandeurs $(0 \mid a_1^+, \ldots, a_n^+ \mid 0\rangle$ qui sont les amplitudes des probabilités pour

un ensemble donné de particules se trouvant au-dessus du condensat d'être dans l'état fondamental. En dérivant L par rapport à φ_1 (l'opérateur U dépend de φ_1) et en utilisant la formule (3.2.17), on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -\langle 0 | U (a_1^+ a_{-1}^+ - a_1 a_{-1}) \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle,$$

d'où

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \langle 0 | a_1 a_{-1} U \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle. \tag{3.2.26}$$

Puis, compte tenu des relations (3.2.13) et (3.2.25), (3.2.26), on a

$$\langle 0 | U a_1 a_{-1} \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle = \xi_1 \xi_{-1} L,$$

$$\langle 0 | U a_1^+ a_{-1}^+ \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle =$$
$$= \mathrm{sh}^2 \varphi_1 \langle 0 | a_{-1} a_1 U \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle + \mathrm{sh}\, \varphi_1 \,\mathrm{ch}\, \varphi_1 =$$
$$= \mathrm{sh}^2 \varphi_1 \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} + \mathrm{sh}\, \varphi_1 \,\mathrm{ch}\, \varphi_1 L.$$

D'où l'on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \left(\frac{\xi_1 \xi_{-1}}{\mathrm{ch}^2 \varphi_1} - \mathrm{th}\, \varphi_1 \right) L.$$

En intégrant cette équation et en remarquant que $L \mid_{\varphi_1 = 0} = 1$, on trouve finalement

$$L = L_0 \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_1 \xi_1 \xi_{-1} \,\mathrm{th}\, \varphi_1 \right\}, \quad L_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_1 \ln \mathrm{ch}\, \varphi_1 \right\}. \tag{3.2.27}$$

La grandeur L_0^2 est de toute évidence la probabilité que dans l'état fondamental il n'y ait pas de particules au-dessus du condensat. Cette grandeur est égale à

$$L_0^2 = p^N, \quad p = \exp \left\{ -\frac{v_0}{(2\pi)^3} \int d^3 p_1 \ln \mathrm{ch}\, \varphi_1 \right\},$$

où v_0 est le volume rapporté à une particule et N le nombre total de particules. On voit que pour $N \to \infty$ cette probabilité tend, comme il se devait, vers zéro *).

*) Ceci est étroitement lié à ce que l'opérateur unitaire U n'existe qu'avant le calcul de la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$, $N \to \infty$, car pour $N \to \infty$ on a $\langle 0 | a_1^+ \ldots a_n^+ | 0 \rangle = 0$.

La formule (3.2.27) montre que la probabilité pour un ensemble de particules d'impulsions $p_1, \ldots, p_n$ se trouvant au-dessus du condensat d'être dans l'état fondamental n'est différente de zéro que dans le cas où n est un nombre pair et les particules peuvent être divisées en paires ayant des impulsions égales mais de sens opposé. En particulier, la probabilité pour une paire de particules d'impulsions p et $-p$ se trouvant au-dessus du condensat d'être dans l'état fondamental est égale à $L_0^2 \, \mathrm{th}^2 \, \varphi_p$. Ainsi $\mathrm{th}^2 \, \varphi_p$ est la probabilité relative pour une paire de particules d'impulsions p et $-p$ de se trouver à l'état fondamental.

Les quasi-particules que nous avons introduites ne sont pas un gaz parfait, elles interagissent entre elles *). On peut étudier cette interaction en tenant compte des termes $n_0^{1/2} V_3, V_4$ dans le hamiltonien $\mathscr{H}(n_0)$. Mais nous n'étudierons pas ici cette question **).

3.2.3. Théorie de la superfluidité d'un gaz de Fermi et phénomène de supraconduction. On sait qu'entre les électrons de conduction dans un métal il y a une interaction caractéristique liée à l'échange de phonons. Cette interaction donne lieu à une corrélation entre les électrons qui ont des impulsions et des spins de sens opposés. Par suite de cette corrélation entre l'état fondamental du système d'électrons et ses états excités peut apparaître une fente énergétique, dont l'existence est à même d'expliquer l'état de supraconduction.

L'hypothèse physique principale qui explique l'effet de supraconduction par la formation de « paires » d'électrons possédant des spins et des impulsions de sens opposés est due à Cooper [69]. En se basant sur cette idée, Bardeen, Cooper et Schrieffer ont élaboré la théorie de la supraconduction [15]. Presque simultanément Bogolioubov a développé une autre méthode d'étude de la supraconduction, basée sur une analogie physique et mathématique entre les effets de supraconduction et de superfluidité. En particulier, il a obtenu les équations dites *équations de Bogolioubov* [23, 24, 52] dans lesquelles la méthode du champ self-consistent de Hartree-Fock est généralisée au cas d'un système dont la symétrie a été spontanément perturbée. Ces équations permettent d'étudier les états spatialement non homogènes des supraconducteurs.

En abordant l'étude de l'interaction entre les électrons due à l'échange de phonons, remarquons qu'elle ne peut être décrite sur la base de la notion d'énergie potentielle de l'interaction entre les électrons, car en réalité les électrons et les phonons doivent être envisagés comme un système dynamique unique. Cependant nous n'allons pas étudier ici ce problème et nous nous limiterons à l'étude d'un certain modèle dans lequel les fermions de spin 1/2 sont en

*) On peut trouver dans [114] une étude détaillée des processus physiques liés à cette interaction.

**) On peut trouver dans [108] une étude mathématique de cette question.

interaction, celle-ci pouvant être décrite par l'énergie potentielle $V(x_1 - x_2)$ qui ne dépend que de la différence des coordonnées spatiales des particules et est indépendante de leurs spins. Dans ce modèle le hamiltonien de l'interaction des particules s'écrit

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x_1 \, d^3x_2 \psi^+_{\sigma_1}(x_1) \psi^+_{\sigma_2}(x_2) V(x_1 - x_2) \psi_{\sigma_2}(x_2) \psi_{\sigma_1}(x_1) \tag{3.2.28}$$

(on suppose qu'on effectue la sommation sur les indices de spin répétés).

En introduisant la désignation

$$\hat{A}_{\sigma_2\sigma_1}(q, x) = \frac{1}{\mathscr{V}} \int_{\mathscr{V}} d^3X \psi_{\sigma_2}\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_{\sigma_1}\left(X + \frac{x}{2}\right) e^{-iqX} \tag{3.2.29}$$

et en remarquant que

$$\psi_{\sigma_2}\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_{\sigma_1}\left(X + \frac{x}{2}\right) = \sum_q \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(q, x) \exp iqX,$$

on peut récrire V comme suit

$$V = \frac{1}{2} \mathscr{V} \int d^3x \hat{A}^+_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) V(x) \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) + \mathscr{H}_{\text{int}}, \tag{3.2.30}$$

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathscr{V} \sum_{q \neq 0} \int d^3x \hat{A}^+_{\sigma_2, \sigma_1}(q, x) V(x) \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(q, x). \tag{3.2.31}$$

Nous devons étudier l'état d'équilibre statistique d'un système de fermions de hamiltonien égal à $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V$. ($\mathscr{H}_0$ étant l'opérateur d'énergie cinétique donné par la formule (2.2.29).) En résolvant ce problème il y a lieu de tenir compte du fait que lors des transitions de phase la symétrie de l'état d'équilibre statistique peut devenir inférieure à la symétrie du hamiltonien $\mathscr{H}$. Pour prendre ceci en considération, on doit, conformément à la méthode des valeurs quasi moyennes, perturber la symétrie du hamiltonien initial $\mathscr{H}$ en lui ajoutant le terme $\delta\mathscr{H} = \nu\mathscr{H}_1$, où $\mathscr{H}_1$ n'a que les éléments de symétrie qui restent intacts lors de la transition de phase. Après le passage à la limite thermodynamique, dans les valeurs moyennes des opérateurs des grandeurs physiques, il est nécessaire de faire tendre le paramètre ν vers zéro. Le hamiltonien initial est de tout évidence invariant par rapport aux transformations de translation ainsi qu'aux transformations de gradient $\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) \exp i\alpha$. Nous allons supposer que lors de la transition de l'état normal à l'état supraconducteur (superfluide) il n'y a perturbation que de l'invariance de gradient, bien qu'en réalité on puisse être en présence des états de supraconduction dans lesquels sont

perturbées l'invariance de translation (supraconduction en présence de réseau cristallin) et l'invariance par rapport aux rotations des spins (supraconduction en présence de rangement magnétique). Pour tenir compte de la perturbation de l'invariance de gradient, nous allons prendre $\mathscr{H}_1$ sous la forme

$$\mathscr{H}_1 = \int d^3x_1\, d^3x \psi^+_{\sigma_1}(x_1)\psi^+_{\sigma_2}(x_2)\, \chi_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1 - x_2) + \text{c.h.},$$

où $\chi_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1 - x_2)$ est une certaine fonction de la différence $x_1 - x_2$, dépendant des indices spinoriels σ_1 et σ_2. Il est évident que $\mathscr{H}_1$ détruit la symétrie par rapport aux transformations de gradient, mais laisse intacte l'invariance de translation. Pour que l'invariance par rapport aux rotations des spins reste également intacte, il faut que $\chi_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1 - x_2)$ soit de la forme

$$\chi_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1 - x_2) = f(x_1 - x_2)\, \chi_{\sigma_1, \sigma_2}, \tag{3 2.32}$$

où $f(x)$ est une certaine fonction de x ne dépendant pas des indices spinoriels, et $\chi_{\sigma_1, \sigma_2} = -\chi_{\sigma_2, \sigma_1}$, $\chi_{-1/2, 1/2} = 1$. En effet, une rotation quelconque des spins peut être décrite par la transformation unitaire U:

$$\psi_\sigma(x) \rightarrow \psi'_\sigma(x) = R_{\sigma, \sigma'}\psi_{\sigma'}(x) = U\psi_\sigma(x)\, U^+, \tag{3.2.33}$$

où $R_{\sigma, \sigma'}$ est une matrice carrée à deux lignes et deux colonnes de déterminant égal à 1. Il est facile de voir que cette transformation laisse invariant le hamiltonien $\mathscr{H}$, $U\mathscr{H}U^+ = \mathscr{H}$. Pour que l'opérateur $\mathscr{H}_1$ soit également invariant par rapport à cette transformation, on doit avoir la relation

$$R_{\sigma_1, \sigma'_1} R_{\sigma_2, \sigma'_2} \chi_{\sigma'_1, \sigma'_2}(x_1 - x_2) = \chi_{\sigma_1, \sigma_2}(x_1 - x_2),$$

d'où l'on trouve la formule (3.2.32).

Ainsi, l'état d'équilibre statistique, conformément à la méthode des valeurs quasi moyennes, doit être décrit par l'opérateur statistique

$$w_\nu = \exp\{\Omega - \beta(\mathscr{H} + \nu\mathscr{H}_1 - uP - \mu N)\}. \tag{3.2.34}$$

En supposant que cet opérateur, à la limite thermodynamique, satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, on peut considérer que $A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)$ est un c-nombre égal à

$$A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) = \text{Sp}\, w_\nu \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x). \tag{3.2.35}$$

En effet dans l'intégrale

$$\mathscr{V}^{-1} \int_{\mathscr{V}} d^3X\, \text{Sp}\, w_\nu \psi_{\sigma_1}\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_{\sigma_2}\left(X + \frac{x}{2}\right) \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n) \equiv$$

$$\equiv \text{Sp}\, w_\nu \hat{A}_{\sigma_1, \sigma_2}(0, x)\, \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n)$$

à la limite $\mathscr{V} \to \infty$, seuls les points X infiniment éloignés entrent en jeu. C'est pourquoi, en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations, on a

$$\operatorname{Sp} w_\nu \hat{A}_{\sigma_1, \sigma_2}(0, x)\, \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n) \xrightarrow[\mathscr{V}\to\infty]{} \xrightarrow[\mathscr{V}\to\infty]{} A_{\sigma_1, \sigma_2}(0, x) \operatorname{Sp} w_\nu \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n),$$

où $A_{\sigma_1, \sigma_2}(0, x)$ est donné par la formule (3.2.35). Nous allons maintenant écrire le premier terme dans la formule (3.2.30) sous la forme

$$\frac{1}{2}\mathscr{V} \int d^3x V(x) (\hat{A}^+_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) - A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)) (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) - A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)) + \frac{1}{2}\mathscr{V} \int d^3x V(x) \{\hat{A}^+_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) + \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)\} - \frac{1}{2}\mathscr{V} \int d^3x V(x) A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x).$$

Remarquant qu'en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations et de la définition (3.2.29) on a

$$\operatorname{Sp} w_\nu (\hat{A}^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) - A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)) \times (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) - A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)) \xrightarrow[\mathscr{V}\to\infty]{} 0,$$

on remplace dans l'expression de w_ν le hamiltonien $\mathscr{H}$ par $\mathscr{H}_{\text{eff}}$

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \mathscr{H}_0 + \frac{1}{2}\mathscr{V} \int d^3x V(x) \{\hat{A}^+_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) + \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)\} + \mathscr{H}_{\text{int}} + E_0,$$

où $E_0 = -1/2\mathscr{V} \int d^3x\, V(x) A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)$. Ce « hamiltonien » efficace n'est pas de toute évidence invariant par rapport au gradient, c'est pourquoi en remplaçant dans l'opérateur statistique de Gibbs $\mathscr{H}$ par $\mathscr{H}_{\text{eff}}$, on peut poser $\nu = 0$.

On peut donner un fondement plus rigoureux à la substitution, à la limite thermodynamique, du hamiltonien $\mathscr{H}$ dans la distribution de Gibbs par $\mathscr{H}_{\text{eff}}$, en envisageant les équations du mouvement pour les fonctions de Green (4.1.16) (voir § 4.1) tout comme on l'a fait dans [19] pour le cas de systèmes de Bose. Il se trouve alors que le terme

$$\mathscr{H}^t = \mathscr{H} - \mathscr{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\mathscr{V} \int d^3x V(x) (\hat{A}^+_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) - A^*_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x)) \times (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x) - A_{\sigma_2, \sigma_1}(0, x))$$

n'influe pas sur les équations, du mouvement pour la fonction de Green à la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$.

Vu que l'opérateur w_v donné par la formule (3.2.34) commute avec l'opérateur U, on obtient en vertu de (3.2.29), (3.2.33)

$$A_{\sigma_2,\,\sigma_1}{}^{r}(0,x) = \mathrm{Sp}\, w_\mathrm{v} U \hat{A}_{\sigma_2,\,\sigma_1}(0,\,x)\,U^{+} = \mathrm{R}_{\sigma_2\sigma_2'} R_{\sigma_1\sigma_1'} A_{\sigma_2'\sigma_1'}(0,\,x),$$

d'où

$$A_{\sigma_2,\,\sigma_1}(0,\,x) = C(x)\,\chi_{\sigma_2,\,\sigma_1},$$

où $C(x)$ est une certaine fonction de x. La fonction $C(x)$ étant réelle, on peut écrire $\mathcal{H}_{\mathrm{eff}}$ comme

$$\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} = \mathcal{H}_q(\Delta) + \mathcal{H}_{\mathrm{int}},$$

où

$$\mathcal{H}_q(\Delta) = \frac{1}{2m}\int d^3x \nabla\psi_\sigma^{+}(x)\,\nabla\psi_\sigma(x) -$$
$$- \int d^3x_1 d^3x_2 \Delta(x_1 - x_2)\{\psi^{+}_{-\frac{1}{2}}(x_1)\,\psi^{+}_{\frac{1}{2}}(x_2) + \psi_{\frac{1}{2}}(x_2)\,\psi_{-\frac{1}{2}}(x_1)\} + E_0$$

et

$$\Delta(x) = -V(x)\,C(x). \tag{3.2.36}$$

En vertu de (3.2.35) la fonction $C(x)$ est déterminée à partir de l'équation

$$C(x) = \mathrm{Sp}\, w(\Delta)\,\psi_{-\frac{1}{2}}(0)\,\psi_{\frac{1}{2}}(x), \tag{3.2.37}$$

où $w(\Delta)$ est l'opérateur statistique correspondant au hamiltonien $\mathcal{H}_{\mathrm{eff}}$:

$$w(\Delta) = \exp\{\Omega - \beta(\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} - uP - \mu N)\}. \tag{3.2.38}$$

En supposant que $\Delta(x)$ est un paramètre libre, il est facile de voir, à partir de la formule (3.2.36) ainsi que de la relation

$$\Omega \equiv \Omega(\Delta,\ \beta,\ \mu) = -\ln \mathrm{Sp}\exp\{-\beta(\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} - uP - \mu N)\},$$

que l'expression (3.2.37) pour $C(x)$ minimise le potentiel thermodynamique

$$\delta_\Delta \Omega(\Delta,\ \beta,\ \mu) = 0.$$

Cette relation est analogue à l'équation (3.2.6) de la théorie du gaz de Bose dégénéré.

En passant des opérateurs $\psi_\sigma(x)$ aux opérateurs

$a_{p,\frac{1}{2}} \equiv a_p,\ a_{p,-\frac{1}{2}} \equiv b_p$:

$$\psi_{\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} \sum_p a_p e^{ipx}, \quad \psi_{-\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} \sum_p b_p e^{-ipx},$$

on peut écrire l'expression de $\mathscr{H}_q(\Delta)$ comme

$$\mathscr{H}_q(\Delta)=\sum_p \frac{p^2}{2m}(a_p^+a_p+b_p^+b_p)-\sum_p \Delta(p)(a_p^+b_{-p}^+ + b_{-p}a_p)+E_0,$$

où

$$\Delta(p)=\int d^3x\,\Delta(x)\,e^{-ipx}=-\int d^3xV(x)\,C(x)\,e^{-ipx}.$$

(Remarquons qu'en vertu de (3.2.37), (3.2.38), on a $\Delta(p)=\Delta(-p)$.)

Il s'agit maintenant de trouver la structure du spectre de l'opérateur $\mathscr{H}_{\text{eff}}-uP-\mu N$ figurant dans la distribution de Gibbs (3.2.38). Ce problème étant très compliqué, nous nous limiterons au cas de l'interaction faible, cas où dans le hamiltonien efficace on peut ne pas tenir compte du terme $\mathscr{H}_{\text{int}}$. Ainsi, nous allons étudier la structure du spectre de l'opérateur $\mathscr{H}_q(\Delta)-uP-\mu N$. Au spectre de cet opérateur seront liées certaines excitations de Fermi formant un gaz parfait de quasi-particules de Fermi. La présence de $\mathscr{H}_{\text{int}}$ donne lieu à différents processus d'interaction entre les quasi-particules, que nous n'envisagerons pas ici.

Pour la diagonalisation de l'opérateur

$$\mathscr{H}_q(\Delta)-uP-\mu N=\sum_p\{\xi_p(a_p^+a_p+b_{-p}^+b_{-p})-\\ -\Delta(p)(a_p^+b_{-p}^+ + b_{-p}a_p)\}-uP+E_0, \quad (3.2.39)$$

où $\xi_p=p^2/2m-\mu$, on introduit l'opérateur unitaire U:

$$\begin{aligned} Ua_pU^+ &= a_p\cos\varphi_p+b_{-p}^+\sin\varphi_p\equiv a'_p,\\ Ub_{-p}U^+ &= -a_p^+\sin\varphi_p+b_{-p}\cos\varphi_p\equiv b'_{-p}, \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

où la phase $\varphi_p=\varphi_{-p}$ est déterminée à partir de la condition de diagonalisation de l'opérateur $U(\mathscr{H}_q(\Delta)-\mu N)U^+$ [24]:

$$U(\mathscr{H}_q(\Delta)-\mu N)U^+=\sum_p\omega_p(a_p^+a_p+b_{-p}^+b_{-p})+\mathscr{E}_0. \quad (3.2.41)$$

La grandeur ω_p qui est une certaine fonction de p est ici l'énergie de la quasi-particule, et $\mathscr{E}_0$ l'énergie de l'état initial du système envisagé estimé à partir de la valeur μN.

L'opérateur de l'impulsion $\boldsymbol{P}$, comme il est facile de s'en rendre compte, satisfait à la relation $UPU^+=\boldsymbol{P}$, c'est pourquoi le terme $u\boldsymbol{P}$ dans (3.2.39) reste inchangé lors de la transformation unitaire U. (L'existence de l'opérateur U est liée à ce que les opérateurs a'_p, b'_p satisfont aux mêmes relations de commutation que les opérateurs a_p, b_p.)

En remarquant que

$$\{Ua_pU^+,\ b_{-p'}\}=-\{Ub_{-p}U^+,\ a_{p'}\}=\delta_{pp'}\sin\varphi_p,$$
$$\{Ua_pU^+,\ a_{p'}^+\}=\delta_{pp'}\cos\varphi_p,\quad \{Ua_pU^+,\ a_{p'}\}=\{Ub_{-p}U^+,\ b_{-p'}\}=0$$

et vu que pour des opérateurs arbitraires A, B, C

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\} B,$$

on a

$$[U(\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N) U^+, a_p] = -\xi_p \cos\varphi_p U a_p U^+ - \xi_p \sin\varphi_p U b_{-p}^+ U^+ + \\ + \Delta(p) \cos\varphi_p U b_{-p}^+ U^+ - \Delta(p) \sin\varphi_p U a_p U^+ = -\omega_p a_p,$$

d'où à partir de (3.2.40) on obtient

$$\Delta(p) \cos 2\varphi_p = \xi_p \sin 2\varphi_p, \quad \xi_p \cos 2\varphi_p = \omega_p - \Delta(p) \sin 2\varphi_p$$

ou

$$\sin 2\varphi_p = \frac{\Delta(p)}{\omega_p}, \quad \cos 2\varphi_p = \frac{\xi_p}{\omega_p}, \quad \omega_p = (\xi_p^2 + \Delta^2(p))^{1/2}. \quad (3.2.42)$$

Il découle de ces formules que pour $\Delta(p) = 0$, la phase $\varphi_p = 0$ si $p > p_F$ et $\varphi_p = \pi/2$ si $p < p_F$ (p_F étant l'impulsion de Fermi limite, $p_F = (2m\mu)^{1/2}$). Ainsi nous allons considérer que pour $\Delta = 0$ la transformation unitaire (3.2.40) diffère également de l'unité et s'écrit comme suit

$$U a_p U^+ |_{\Delta=0} \equiv a'_p = \begin{cases} a_p, & p > p_F, \\ b_{-p}^+, & p < p_F, \end{cases}$$

$$U b_p U^+ |_{\Delta=0} \equiv b'_p = \begin{cases} b_p, & p > p_F, \\ -a_{-p}^+, & p < p_F. \end{cases}$$

Cette transformation correspond à la transition des opérateurs de création et d'annihilation des particules a_p^+, a_p aux opérateurs de création et d'annihilation des « particules » et des « trous » $a_p'^+$, a'_p, à savoir: a'_p pour $p > p_F$ est l'opérateur d'annihilation d'une « particule », et pour $p < p_F$ l'opérateur d'annihilation d'un « trou ».

Nous allons maintenant trouver l'énergie de l'état fondamental $\mathcal{E}_0$. En prenant la moyenne de la formule (3.2.41) sur l'état du vide $|0\rangle$ des opérateurs a_p, b_p, $a_p |0\rangle = b_p |0\rangle = 0$ et en utilisant les relations (3.2.40) ainsi que la définition de $\mathcal{H}_q(\Delta)$, on trouve

$$\mathcal{E}_0 = \sum_p (\xi_p - \omega_p). \quad (3.2.43)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, $U\boldsymbol{P}U^+ = \boldsymbol{P}$, c'est pourquoi, en vertu de (3.2.41), l'opérateur statistique $w(\Delta)$, lorsqu'on y néglige $\mathcal{H}_{\text{int}}$ (nous le désignerons par $w_0(\Delta)$), se transforme lors de la transformation unitaire U comme suit:

$$w_0(\Delta) \to U w_0(\Delta) U^+ = \exp\left[\Omega_0 - \beta \sum_p (\omega_p - up)(a_p^+ a_p + b_p^+ b_p)\right], \quad (3.2.44)$$

où Ω_0 se détermine à partir de la relation Sp $w_0(\Delta) = 1$. Remarquons que $Uw_0(\Delta)U^+$ peut être considéré comme l'opérateur statistique d'un gaz de quasi-particules.

Nous allons passer à la définition de la fonction $\Delta(x)$ qui est liée à la fonction $C(x)$ par la relation (3.2.36), de plus $C(x)$, en vertu de (3.2.37), est donnée par l'équation suivante

$$C(x) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_p e^{ipx} \operatorname{Sp} w_0(\Delta) a_p b_{-p}.$$

Remarquant que

$$\operatorname{Sp} w_0(\Delta) a_p b_{-p} = \operatorname{Sp} U w_0(\Delta) U^+ U a_p U^+ U b_{-p} U^+,$$

on obtient conformément à (3.2.40), (3.2.44)

$$\operatorname{Sp} w_0(\Delta) a_p b_{-p} = (1 - \tilde{n}_p - \tilde{n}_{-p}) \cos\varphi_p \sin\varphi_p,$$

où $\tilde{n}_p$ est la fonction de distribution des quasi-particules:

$$\tilde{n}_p = \operatorname{Sp} U w_0(\Delta) U^+ a_p^+ a_p = \{1 + \exp\beta(\omega_p - up)\}^{-1}, \qquad (3.2.45)$$

par conséquent, compte tenu de (3.2.42), on a

$$C(x) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_p \frac{1}{2} \frac{\Delta(p)}{\omega_p} (1 - \tilde{n}_p - \tilde{n}_{-p}) e^{ipx}. \qquad (3.2.46)$$

En substituant (3.2.46) dans (3.2.36), on obtient pour la fonction $\Delta(p)$ l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\Delta(p) = -\frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{p'} \nu(p - p') (1 - \tilde{n}_p - \tilde{n}_{-p'}) \frac{\Delta(p')}{\omega_{p'}}, \qquad (3.2.47)$$

où

$$\omega_p = (\xi_p^2 + \Delta^2(p))^{1/2} \quad \text{et} \quad \nu(p) = \int d^3x V(x) \exp ipx.$$

Cette équation, en plus de la solution triviale $\Delta(p) = 0$, peut avoir une solution réelle, différente de zéro. Ceci apparaît dans le cas d'une interaction aussi faible que l'on veut, pourvu que les forces d'attraction agissent entre les particules.

Nous allons trouver l'état propre de l'opérateur $\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N$ qui correspond à sa plus petite valeur propre $\mathcal{E}_0$. En vertu de (2.3.85), cet état s'écrit

$$|0) = U^+ |0\rangle, \qquad (3.2.48)$$

de plus

$$(\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N)|0) = \mathcal{E}_0 |0).$$

Si $\Delta = 0$, on a $\mathcal{E}_0|_{\Delta=0} = 2 \sum_{p<p_F} \xi_p$. Ainsi, pour $\Delta(p) \neq 0$, on

a $\mathscr{E}_0 < \mathscr{E}_0 |_{\Delta=0}$ et par conséquent, la solution non triviale de l'équation (3.2.47) (si elle existe) correspond à l'état énergétique plus bas.

La grandeur Δ (p_F) a un sens physique simple : elle correspond à une fente énergétique entre les états fondamentaux et le premier état excité d'un gaz de quasi-particules.

Il est également facile de trouver l'expression explicite de l'opérateur U. En effet, à partir de (3.2.40) on a pour $\varphi_p = \delta\varphi_p$ infiniment petit

$$U = 1 + i \sum_p T_p \delta\varphi_p, \qquad T_p = T_{-p},$$

où l'opérateur hermitien T_p satisfait à l'équation suivante

$$i\,[T_p,\ a_p] = \frac{1}{2} b^+_{-p}, \qquad i\,[T_p,\ b_{-p}] = -\frac{1}{2} a^+_p$$

et, par conséquent

$$T_p = \frac{i}{2}\{a^+_p b^+_{-p} - b_{-p} a_p + a^+_{-p} b^+_p - b_p a_{-p}\}.$$

Comme φ_p est un paramètre additif du groupe de transformations (3.2.40), on a

$$U = \exp \sum_p \varphi_p\,(b_{-p} a_p - a^+_p b^+_{-p}). \qquad (3.2.49)$$

En utilisant les règles de commutation pour les opérateurs a_p, b_p, il est facile de montrer que

$$|\,0) = \prod_p (\cos\varphi_p + \sin\varphi_p a^+_p b^+_{-p})\,|\,0\rangle.$$

En l'absence d'interaction, $\Delta = 0$ et, comme mentionné, $\varphi_p = 0$ pour $p > p_F$ et $\varphi_p = \frac{\pi}{2}$ pour $p < p_F$. C'est pourquoi le vecteur d'état $|\,0)$ pour $\Delta = 0$ s'écrit

$$|\,0)|_{\Delta=0} = \prod_{p<p_F} a^+_p b^+_{-p}\,|\,0\rangle$$

et correspond à des particules sans interaction, remplissant une sphère de Fermi de rayon p_F. En présence d'interaction, c'est-à-dire pour $\Delta \neq 0$, le vecteur de l'état fondamental $|\,0)$ est la superposition d'états correspondant à des paires de particules sans interaction qui ont des spins et des impulsions de sens opposés. La probabilité de trouver N paires d'impulsions $(p_1, -p_1), \ldots, (p_N, -p_N)$ dans l'état $|\,0)$ est égale à

$$\langle \mathfrak{N}\,|\,0) = \prod_{p_i \in \mathfrak{N}} \sin\varphi_{p_i} \prod_{p_i \in \mathfrak{N}} \cos\varphi_{p_i},$$

où $|\,\mathfrak{N}\rangle = \prod_{p_i \in \mathfrak{N}} a^+_{p_i} b^+_{-p_i} |0\rangle$ et $\mathfrak{N}$ désigne l'ensemble des variables d'im-

pulsion $p_1, \ldots, p_N$. Comme $\sin\varphi_p \approx 0$ pour $p > p_F$ et $\cos\varphi_p \approx 0$ pour $p < p_F$, l'amplitude $\langle \mathfrak{N} \mid 0)$ n'est nulle que si le vecteur $\mid \mathfrak{N} \rangle$ diffère du vecteur $\mid 0) |_{\Delta=0}$ par une redistribution des paires d'opérateurs $a_p^+ b_{-p}^+$ au voisinage de la surface de Fermi.
Ainsi, on peut considérer que l'état fondamental pour $\Delta \neq 0$ est formé de paires de particules se trouvant en corrélation forte seulement au voisinage de la surface de Fermi et ayant une impulsion totale et un spin total nuls. Ce gaz de particules appariées est analogue à un condensat de Bose au repos, et tout comme le condensat de Bose, il est doué de la propriété de superfluidité. Il est facile de voir que cette propriété apparaît si le paramètre u figurant dans la distribution de Gibbs n'est pas supérieur à une certaine valeur critique u_0. En effet, en vertu de la formule (3.2.44), pour l'état d'équilibre statistique, il faut que la condition $\omega'_p - \boldsymbol{pu} > 0$ soit vérifiée pour p quelconques. Par conséquent, on a

$$u < u_0, \quad u_0 = \min_p \frac{\omega_p}{p} \approx \frac{\Delta(p_F)}{p_F}. \tag{3.2.50}$$

Comme la grandeur $\Delta(p_F)$ dépend de u et de T, u_0 sera une fonction de u et de T.

La grandeur $u \equiv u_n$ peut être interprétée comme la vitesse d'un gaz de quasi-particules, c'est-à-dire la vitesse de la composante normale par rapport au condensat de paires qui est supposé au repos.

Tout comme dans le cas d'un gaz de Bose non parfait, l'impulsion moyenne du gaz de Fermi envisagé est égale à $\boldsymbol{P} = \sum_p \boldsymbol{p}\tilde{n}_p$. Cette impulsion peut s'écrire sous la forme:

$$\boldsymbol{P} = \mathcal{V} \rho_n^{(m)} \boldsymbol{u}_n,$$

où $\rho_n^{(m)}$ est interprétée comme la densité de la composante normale d'un gaz de Fermi. Pour un gaz de Fermi faiblement non parfait

$$\rho_n^{(m)} = \frac{r}{(2\pi)^3} u_n^{-2} \int d^3p\, \boldsymbol{pu}_n \tilde{n}_p.$$

La grandeur $\rho_s^{(m)} = \rho^{(m)} - \rho_n^{(m)}$ ($\rho^{(m)}$ étant la densité d'un gaz de Fermi) est la densité de la composante superfluide. (Dans le système de référence que nous avons adopté la vitesse de la composante superfluide est nulle.) Ainsi, tout comme un gaz de bosons, un gaz de fermions est doué de la propriété de superfluidité.

Pour les fermions chargés, la superfluidité est équivalente à la supraconduction. Connaissant la grandeur de la vitesse critique u_0, pour $u_n = 0$, on peut estimer la densité d'un courant de supraconduction $j_s = 2eu_0 m^{-1} \rho_s^{(m)}$, où $\rho_s^{(m)}$ est la densité de la composante superfluide du gaz d'électrons.

Jusqu'à présent, nous avons partout négligé le terme $\mathscr{H}_{\text{int}}$ du hamiltonien total, ce qui n'est vrai que dans le cas d'une interaction faible et au loin de la température de la transition supraconductible. On peut cependant élaborer un modèle de hamiltonien dans lequel il n'y a pas de terme $\mathscr{H}_{\text{int}}$ correspondant à l'interaction entre les quasi-particules. Dans la représentation des impulsions ce hamiltonien est

$$V = -\mathscr{V}^{-1} \sum_{pp'} I(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') a_p^+ b_{-p}^+ b_{-p'} a_{p'}, \tag{3.2.51}$$

où $I(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ est une certaine fonction des impulsions décrivant l'interaction entre les particules. Dans ce hamiltonien (appelé *hamiltonien de Bardeen*) on tient compte seulement de l'interaction entre les fermions d'impulsions et de spins de sens opposés. Dans la représentation des coordonnées le hamiltonien (3.2.51) s'écrit

$$V = -\frac{1}{\mathscr{V}} \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_1'\, d^3x_2' \psi_{\frac{1}{2}}^+ (\boldsymbol{x}_1)\, \psi_{-\frac{1}{2}}^+ (\boldsymbol{x}_2) \times \\ \times I(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_2')\, \psi_{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{x}_2')\, \psi_{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{x}_1'), \tag{3.2.52}$$

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = (2\pi)^{-6} \int d^3p\, d^3p' I(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \exp(i\boldsymbol{x}\boldsymbol{p} - i\boldsymbol{x}'\boldsymbol{p}').$$

Nous allons voir certaines particularités du modèle de hamiltonien (3.2.52). Tout d'abord à la différence de l'interaction potentielle ordinaire (3.2.28), l'interaction (3.2.52) n'est pas localisée dans l'espace, car le noyau $I(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_2')$ ne décroît pas pour $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' \to \infty$ et $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1' \sim \boldsymbol{x}_2'$. De plus, pour un système d'un grand nombre de particules, à la limite $\mathscr{V} \to \infty$, le hamiltonien (3.2.52) ne conduit, dans le cadre de la théorie des perturbations, à aucun changement des fonctions de distribution à particules multiples. En d'autres termes, dans le cadre de la théorie des perturbations un gaz de fermions reste parfait, indépendamment de la présence d'un hamiltonien d'interaction V. En effet, comme dans le cadre de la théorie des perturbations seules les liaisons normales (voir paragraphe 3.1.2) $\underbrace{\psi^+\psi}$ sont différentes de zéro et les liaisons anomales $\underbrace{\psi^+\psi^+}$, $\underbrace{\psi\psi}$ sont nulles, les corrections aux fonctions de distribution à particules multiples liées au hamiltonien V, en vertu de (3.1.29), seront proportionnelles à $\mathscr{V}^{-1}$ et disparaîtront pour $\mathscr{V} \to \infty$.

L'apport de V dans l'énergie du système, le potentiel et d'autres fonctions thermodynamiques sera également infiniment petit. Par exemple, pour la première approximation de la théorie des perturbations la correction à l'énergie du système sera égale à

$$-\mathscr{V}^{-1} \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_1'\, d^3x_2' I(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_2') \times \\ \times \underbrace{\psi_{\frac{1}{2}}^+ (\boldsymbol{x}_1)\, \psi_{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{x}_1')}\, \underbrace{\psi_{-\frac{1}{2}}^+ (\boldsymbol{x}_2)\, \psi_{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{x}_2')}.$$

Les liaisons écrites décroissent pour $x_1 - x_1' \to \infty$, $x_2 - x_2' \to \infty$, cette grandeur ne contient pas le volume $\mathscr{V}$, alors que l'énergie du système doit être proportionnelle au volume $\mathscr{V}$. Remarquons cependant que, si les liaisons anomales étaient différentes de zéro, il en serait tout autrement et les corrections aux fonctions de distribution à particules multiples seraient finies, alors que la correction à l'énergie serait proportionnelle à $\mathscr{V}$. Par exemple, la correction du premier ordre à l'énergie serait égale à

$$-\mathscr{V}^{-1}\int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_1'\, d^3x_2' \underbrace{\psi^+_{\frac{1}{2}}(x_1)\, \psi^+_{-\frac{1}{2}}}(x_2) \times$$
$$\times I(x_1 - x_2,\ x_1' - x_2') \underbrace{\psi_{-\frac{1}{2}}(x_2')\, \psi_{\frac{1}{2}}}(x_1'),$$

et serait proportionnelle à $\mathscr{V}$, car l'intégrale dans ce cas est proportionnelle à $\mathscr{V}^2$. On peut en conclure que le hamiltonien (3.2.52) ne donne pas lieu à des effets liés à ce que le système de Fermi n'est pas parfait pour les états normaux auxquels on peut appliquer les méthodes de la théorie des perturbations. Au contraire, ce hamiltonien donne lieu à des effets réels pour les systèmes dégénérés, pour lesquels les moyennes anomales $\{\psi\psi\}$ sont différentes de zéro. L'avantage méthodique du hamiltonien (3.2.52) est en ce qu'il admet à la limite $\mathscr{V} \to \infty$ la solution exacte du problème d'un grand nombre de fermions à des températures quelconques *).

En procédant tout comme lors de la déduction des formules (3.2.30), (3.2.38), on peut passer du hamiltonien (3.2.52) au hamiltonien efficace $\mathscr{H}_{\text{eff}}$ dans lequel les opérateurs $\hat{A}_{\sigma_1, \sigma_2}(0, x)$ sont remplacés par des c-nombres. Le noyau $I(x_1 - x_2,\ x_1' - x_2')$ ne dépendant pas de $x_1 - x_1'$, le hamiltonien ne contiendra pas les opérateurs $\hat{A}_{\sigma_1, \sigma_2}(q, x)$ pour $q \neq 0$. En d'autres termes le hamiltonien efficace $\mathscr{H}_{\text{eff}}$ ne contiendra pas le terme $\mathscr{H}_{\text{int}}$ et s'écrira comme suit :

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \mathscr{H}_0 -$$
$$- \int d^3x_1\, d^3x_2\, \Delta(x_1 - x_2) \{\psi_{-\frac{1}{2}}(x_2)\, \psi_{\frac{1}{2}}(x_1) +$$
$$+ \psi^+_{\frac{1}{2}}(x_1)\, \psi^+_{-\frac{1}{2}}(x_2)\} + E_0, \qquad (3.2.53)$$
$$\mathscr{H}_0 = \sum_p \varepsilon_p (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p),$$

*) Dans [31] on peut trouver une étude mathématique rigoureuse des modèles de hamiltonien de forme plus générale que celle du hamiltonien (3.2.52), qui admettent une solution exacte du problème d'un grand nombre de particules à la limite thermodynamique.

où ε_p est l'énergie de l'électron de quasi-impulsion égale à $\boldsymbol{p}$, et la fonction $\Delta(\boldsymbol{x})$ est donnée par l'équation

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \int d^3x' I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \operatorname{Sp} w(\Delta) \psi_{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) \psi_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}').$$

L'opérateur $w(\Delta)$ est déterminé par la formule (3.2.38) où pour hamiltonien on a pris le hamiltonien (3.2.53).

Par une procédure analogue à celle utilisée pour trouver la formule (3.2.47), il est facile d'obtenir une équation intégrale pour la fonction $\Delta(\boldsymbol{p})$:

$$\Delta(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{p'} I(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \frac{\Delta(\boldsymbol{p}')}{\omega_{p'}} (1 - \tilde{n}_{p'} - \tilde{n}_{-p'}), \qquad (3.2.54)$$

où comme auparavant $\omega_p = \{\xi_p^2 + \Delta^2(\boldsymbol{p})\}^{1/2}$, $\xi_p = \varepsilon_p - \mu$, $\tilde{n}_p$ étant donné par la formule (3.2.45).

Pour trouver le caractère des solutions de cette équation, nous allons supposer que la fonction $I(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ est différente de zéro et est égale à la constante I si $|\xi_p| < \Theta$, $|\xi_{p'}| < \Theta$, où Θ est une certaine constante (pour le mécanisme phononique de la supraconduction l'ordre de grandeur de la constante Θ coïncide avec la température de Debye). On a alors

$$\Delta(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} 0, & |\xi_p| > \Theta, \\ \Delta, & |\xi_p| < \Theta, \end{cases}$$

où la constante Δ est déterminée à partir de l'équation

$$\frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{|\xi_p| < \Theta} \frac{1 - \tilde{n}_p - \tilde{n}_{-p}}{(\xi_p^2 + \Delta^2)^{1/2}} = 1, \qquad (3.2.55)$$

la sommation s'effectue sur les impulsions satisfaisant à la condition $-|\xi_p| < \Theta$. Cette équation a une solution seulement si $I > 0$ et détermine Δ en fonction de la température T et de la vitesse u_n, $\Delta = \Delta(T, u_n)$.

Pour $T = 0$ et $u_n = 0$ cette équation s'écrit

$$1 = \frac{I}{2\mathcal{V}} \sum_{|\xi_p| < \Theta} (\xi_p^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} = \frac{mIp_F}{2\pi^2} \ln \frac{\Theta + (\Theta^2 + \Delta_0^2)^{1/2}}{\Delta_0}, \qquad (3.2.56)$$

où $\Delta_0 = \Delta(0, 0)$. En supposant que $\Delta_0 \ll \Theta$, on obtient

$$\Delta_0 = 2\Theta \exp\left(-\frac{2\pi^2}{mIp_F}\right).$$

Cette formule montre qu'en l'absence d'interaction ($I = 0$) la grandeur Δ_0 s'annule.

En utilisant la formule (3.2.56) et en supposant que $\Delta \ll \Theta$, on peut écrire l'équation (3.2.55) comme suit

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{4\pi m p_F} \int\limits_{|\xi_p|<\Theta} d^3p \tilde{n}_p (\xi_p^2 + \Delta^2)^{-1/2},$$

d'où en intégrant sur les angles entre les vecteurs $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{u}_n$, on obtient

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{2mp_F} \int\limits_0^\infty dp \frac{p^2}{\omega_p} \left\{ 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta u_n p} \ln \frac{1 + \exp \beta (\omega_p - p u_n)}{1 + \exp \beta (\omega_p + p u_n)} \right\}. \qquad (3.2.57)$$

Cette équation donne Δ comme fonction de $T = \beta^{-1}$ et de u_n. Pour $T = 0$ cette équation devient

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{2mp_F} \int\limits_0^\infty dp \frac{p^2}{\omega_p} \left(1 - \frac{\omega_p}{pu_n}\right) \Theta(pu_n - \omega_p).$$

Ainsi, on voit que pour $u_n < u_0$, où $u_0 = \Delta_0/p_F$, l'intégrale s'annule et par conséquent la grandeur de la fente Δ coïncide avec Δ_0, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la vitesse. Pour $u_n > u_0$ Δ commence à dépendre de la vitesse u_n et s'annule pour $u_n = u_c$, où u_c est donné par l'équation

$$\ln \frac{\Delta_0}{2p_F u_c} = p_F^{-1} (p_F^2 + m u_c^2)^{1/2} - 2 + \ln \frac{p_F + (p_F^2 + m^2 u_c^2)^{1/2}}{2p_F}. \qquad (3.2.58)$$

Pour $\Delta_0 \ll p_F^2/2m = \mu$, la solution de cette équation est de la forme

$$u_c = \frac{e}{2} \Delta_0 p_F^{-1} = \frac{e}{2} u_0 \approx 1{,}36\, u_0.$$

Ci-dessus nous avons noté que l'état de superfluidité est instable pour $u_n > u_0\,(u_n, T)$. On voit maintenant que pour $T = 0$ la grandeur $\Delta\,(u_n, 0)$ s'annule non pas pour $u_n = u_0$ mais pour $u_n = 1{,}36 u_0$. Ceci signifie que dans l'intervalle $u_0 < u_n < u_c$ (pour $T = 0$) l'état de superfluidité sera métastable et se conservera jusqu'à la vitesse u_c si l'on s'approche de u_c du côté des vitesses faibles; si, au contraire, on s'approche de u_c du côté des vitesses grandes, l'état de superfluidité apparaîtra pour $u_n = u_0$. En supposant dans (3.2.57) $\Delta = 0$, on obtient l'équation

$$\ln \frac{\Delta_0}{\mu} = -3 \ln 2 +$$

$$+ \frac{1}{2mp_F} \int\limits_0^\infty dp |\xi_p|^{-1} \left\{ p^2 \left(2 + \frac{1}{\beta u_n p} \ln \frac{1 + \exp \beta (|\xi_p| - p u_n)}{1 + \exp \beta (|\xi_p| + p u_n)} \right) - p_F^2 \right\},$$

donnant la ligne d'équilibre de phase des états supraconducteur et normal.

CHAPITRE 4

MÉTHODES D'ÉTUDE DES ÉTATS HORS D'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES QUANTIFIÉS

§ 4.1. Réaction d'un système à une perturbation extérieure

4.1.1. Opérateur statistique des systèmes dans un champ extérieur faible. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la description microscopique le plus complète des états d'un système quantique est la description à l'aide d'un opérateur statistique $\rho(t) \equiv \rho$ satisfaisant à l'équation du mouvement (2.1.7), à savoir:

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathscr{H}, \rho], \qquad (4.1.1)$$

où $\mathscr{H}$ est le hamiltonien complet du système, qui n'est pas obligatoirement fermé et peut se trouver dans un champ extérieur variable (dans ce cas le hamiltonien sera une fonction donnée du temps $\mathscr{H} = \mathscr{H}(t)$). La résolution de l'équation (4.1.1) avec la condition initiale $\rho(0) = \rho_0$, où ρ_0 est un opérateur donné, permet en principe de résoudre le problème fondamental de la physique macroscopique revenant à la recherche de la valeur moyenne d'une grandeur physique quelconque a: si à cette grandeur correspond l'opérateur $\hat{a}$, la valeur moyenne $a(t)$ sera donnée par la formule

$$a(t) = \mathrm{Sp}\, \rho(t)\, \hat{a}.$$

Si le système se trouve dans l'état d'équilibre statistique, on a $\rho = w$, où w est l'opérateur statistique de Gibbs (3.1.1). Par contre, si l'état du système est hors d'équilibre, on ne peut donner qu'une solution générale formelle de l'équation (4.1.1)

$$\rho(t) = U(t)\, \rho_0 U(t)^{-1},$$

où l'opérateur unitaire $U(t)$ satisfait à l'équation

$$i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \mathscr{H}(t)\, U(t)$$

et à la condition initiale $U(0) = 1$. Pour obtenir des résultats concrets, il y a lieu d'utiliser des assertions physiques supplémentaires.

Le plus simple des cas est celui où le système se trouve tout d'abord à l'état d'équilibre statistique, puis à un certain instant

apparaît un champ extérieur qui fait sortir le système de l'état d'équilibre. Si l'intensité du champ est suffisamment faible, l'état du système différera peu de l'équilibre, c'est-à-dire que l'opérateur statistique du système différera peu de l'opérateur statistique de Gibbs et l'écart de ρ à w peut être trouvé par la résolution de l'équation (4.1.1), par la méthode de la théorie des perturbations.

Les problèmes où il n'y a pas de champ extérieur sont plus compliqués, mais les interactions entre les particules peuvent être nettement divisées du point de vue physique en deux groupes, à savoir: les interactions fortes et les interactions relativement faibles. Si l'on tient compte des seules interactions fortes l'équilibre statistique complet ne s'établit pas, et l'état du système est décrit par un opérateur statistique différent de w. Cependant, on connaît la structure de cet opérateur, qui est déterminé par une formule du type (2.4.29) où figurent les intégrales du mouvement correspondant seulement à des interactions fortes. Pour des interactions faibles, ces grandeurs ne seront plus des intégrales du mouvement au sens strict et varieront dans le temps, mais cette variation sera lente et pour sa description on peut obtenir des équations dont l'étude est bien plus simple que celle de l'équation initiale (4.1.1). En d'autres termes, dans ce cas on part d'une certaine structure de l'opérateur statistique et on étudie la variation dans le temps des paramètres déterminant cette structure.

Nous allons commencer par le premier problème qui peut être formulé comme suit [70]. Le système de hamiltonien $\mathcal{H}$ se trouve à l'état d'équilibre statistique décrit par l'opérateur de Gibbs

$$w = \exp \{\Omega - \beta (\mathcal{H} - \mu N)\}. \tag{4.1.2}$$

A un certain instant t_0 on branche un champ extérieur, de sorte que le hamiltonien du système devient l'opérateur

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H} + V(t), \tag{4.1.3}$$

où $V(t)$ est le hamiltonien de l'interaction du système avec le champ. Il y a lieu de trouver l'opérateur statistique du système $\rho(t)$ pour $t > t_0$. En introduisant au lieu de $\rho(t)$ l'opérateur

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i\mathcal{H}t} \rho(t) e^{-i\mathcal{H}t},$$

on obtient pour cet opérateur, conformément à (4.1.1), l'équation suivante

$$i\frac{\partial\tilde{\rho}(t)}{\partial t} = [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)], \text{ où } \tilde{V}(t) = e^{i\mathcal{H}t} V(t) e^{-i\mathcal{H}t}. \tag{4.1.4}$$

Comme pour $t \to -\infty$ le champ extérieur était absent et le système se trouvait à l'état d'équilibre statistique, on a $\rho(-\infty) = w$. Puisque $[w, \mathcal{H}] = 0$, on a $\tilde{\rho}(-\infty) = w$. Cette relation doit être envi-

sagée comme la condition initiale lors de la résolution de l'équation (4.1.4). C'est pourquoi à partir de (4.1.4), on obtient l'équation intégrale suivante pour $\tilde{\rho}(t)$

$$\tilde{\rho}(t) = w - i \int_{-\infty}^{t} dt' \, [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')].$$

Remarquons que l'opérateur $\tilde{\rho}(t)$ peut être envisagé comme un opérateur statistique dans la représentation de l'interaction, liée à la décomposition (4.1.3) du hamiltonien total $\mathscr{H}(t)$. L'opérateur d'une certaine grandeur physique $a(x)$ dans cette représentation $\tilde{a}(x, t)$ est lié à l'opérateur de Schrödinger correspondant $a(x)$ par la relation suivante

$$\tilde{a}(x, t) = e^{i\mathscr{H}t} a(x) e^{-i\mathscr{H}t}.$$

Cet opérateur coïncide avec l'opérateur de Heisenberg pour un système décrit par le hamiltonien $\mathscr{H}$.

Supposant que l'interaction du système avec le champ extérieur est faible, on peut développer $\tilde{\rho}(t)$ en série suivant les puissances de $\hat{V}(t)$:

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\rho}_n(t), \quad \tilde{\rho}_0(t) = w,$$

$$\tilde{\rho}_n(t) = (-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \, [\tilde{V}(t_1), [\ldots [\tilde{V}(t_n), w] \ldots]], \tag{4.1.5}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Seule la première correction $\tilde{\rho}_1$ à w nous intéresse, c'est pourquoi on peut supposer que le hamiltonien de l'interaction $V(t)$ est linéaire par rapport au champ extérieur, c'est-à-dire

$$V(t) = \int d^3x F_i(x, t) \, \xi_i(x), \tag{4.1.6}$$

où $F_i(x, t)$ sont des grandeurs qui déterminent le champ extérieur, et $\xi_i(x)$ les opérateurs quasi locaux se rapportant au système envisagé et ne dépendant pas du champ extérieur (on suppose la sommation sur l'indice i). On peut dire que ce sont des « *courants* » *généralisés* qui correspondent aux champs $F_i(x, t)$. En substituant (4.1.6) dans (4.1.5), on obtient:

$$\tilde{\rho}_1(t) = -i \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' F_i(x', t') \, [\tilde{\xi}_i(x', t'), w].$$

C'est pourquoi la valeur moyenne de l'opérateur $a(x)$, aux termes linéaires par rapport au champ F_i près, est donnée par la formule

$$\operatorname{Sp} \rho(t)\, a(x) = \operatorname{Sp} w a(x) + i \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x' F_i(x', t') \operatorname{Sp} w [\tilde{\xi}_i(x', t'), \tilde{a}(x, t)] + \ldots \qquad (4.1.7)$$

Pour les opérateurs quasi locaux $a(x)$, $b(x)$ nous allons introduire la fonction de Green à double retard, à savoir:

$$G_{ab}^{(+)}(x, t; x', t') = -i\theta(t-t') \operatorname{Sp} w [\tilde{a}(x, t), \tilde{b}(x', t')],$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Si les opérateurs quasi locaux $a(x)$, $b(x)$ sont invariants par rapport à la translation, la fonction de Green $G_{ab}^{(+)}$ ne dépendra que des différences $t - t'$, $x - x'$:

$$G_{ab}^{(+)}(x, t; x', t') = G_{ab}^{(+)}(x - x', t - t').$$

Ainsi si a et ξ_i sont invariants par rapport à la translation, la formule (4.1.7) devient

$$\operatorname{Sp} \rho(t)\, a(x) = \operatorname{Sp} w a(0) + a^F(x, t) + \ldots,$$

$$a^F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G_{a\xi_i}^{(+)}(x - x', t - t') F_i(x', t'). \qquad (4.1.8)$$

En passant aux composantes de Fourier des grandeurs a^F, F_i:

$$a^F(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k\, d\omega\, e^{-i(\omega t - kx)} a^F(k, \omega), \quad F_i(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k\, d\omega\, e^{-i(\omega t - kx)} F_i(k, \omega),$$

on obtient

$$a^F(k, \omega) = G_{a\xi_i}^{(+)}(k, \omega) F_i(k, \omega),$$

$$G_{a\xi_i}^{(+)}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k\, d\omega\, e^{-i(\omega t - kx)} G_{a\xi_i}^{(+)}(k, \omega). \qquad (4.1.9)$$

Après avoir défini l'opérateur $\tilde{\rho}_1$, on peut trouver l'énergie que le système reçoit du champ extérieur. Rapportée à l'unité de temps, cette énergie est, de toute évidence, égale à

$$\dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Sp} \rho(t) \mathscr{H}(t),$$

ou en vertu de (4.1.1)

$$\dot{Q} = \operatorname{Sp} \tilde{\rho}(t)\, e^{i\mathscr{H}t} \frac{\partial V(t)}{\partial t} e^{-i\mathscr{H}t}.$$

En y substituant le développement $\tilde{\rho}(t) = w + \tilde{\rho}_1(t) + \ldots$ on trouve, aux termes quadratiques par rapport au champ $F_i(x, t)$ près :

$$\dot{Q} = \int d^3x \frac{\partial F_i(x, t)}{\partial t} \operatorname{Sp} w\xi_i(x) -$$

$$- \frac{i}{(2\pi)^5} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' e^{-it(\omega+\omega')} F_i(-k, \omega') \xi_i^F(k, \omega), \tag{4.1.10}$$

$$\xi_i^F(k, \omega) = G_{ij}^{(+)}(k, \omega) F_j(k, \omega), \quad G_{ij}^{(+)}(k, \omega) = G_{\xi_i\xi_j}^{(+)}(k, \omega).$$

Les grandeurs $G_{ij}^{(+)}(k, \omega)$ reliant les composantes de Fourier des « courants» généralisés aux composantes de Fourier des champs extérieurs peuvent être appelés *susceptibilités généralisées* du système.

En intégrant $\dot{Q}$ par rapport au temps, on trouve la quantité totale d'énergie Q absorbée par le système. Si le champ n'agit que durant un temps fini, l'intégrale du premier terme dans (4.1.10) s'annule et l'on obtient :

$$Q = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \omega F_i(-k, -\omega) G_{ij}^{(+)}(k, \omega) F_j(k, \omega). \tag{4.1.11}$$

Comme le champ extérieur $F_i(x, t)$ est réel, les opérateurs ξ_i sont hermitiens. C'est pourquoi les fonctions de Green $G_{ij}^{(+)}(x, t)$ doivent être réelles. Par conséquent

$$F_i^*(k, \omega) = F_i(-k, -\omega), \quad G_{ij}^{(+)*}(k, \omega) = G_{ij}^{(+)}(-k, -\omega). \tag{4.1.12}$$

C'est pourquoi la formule (4.1.11) peut s'écrire finalement comme suit :

$$Q = \int_0^{\infty} d\omega \int d^3k Q_{\omega k}, \tag{4.1.13}$$

$$Q_{\omega k} = \frac{i\omega}{(2\pi)^4} F_i^*(k, \omega) \{G_{ij}^{(+)}(k, \omega) - G_{ji}^{(+)}(k, \omega)^*\} F_j(k, \omega).$$

La grandeur $Q_{\omega k}\, d\omega d^3k$ est l'énergie absorbée par le système dans l'intervalle des fréquences ω, $\omega + d\omega$ et dans l'intervalle des vecteurs d'onde k, $k + dk$. Elle est donnée, comme on peut le voir, par la partie antihermitienne de la matrice $G_{ij}^{(+)}(k, \omega)$.

4.1.2. Propriétés des fonctions de Green. En plus des fonctions de Green retardées

$$G_{ab}^{(+)}(x, t) = -i\theta(t)\,\mathrm{Sp}\,w\,[a(x, t), b(0)] \equiv$$
$$\equiv \langle\langle a(x, t); b(0)\rangle\rangle^{+}, \qquad (4.1.14)$$

on peut introduire les fonctions de Green avancées

$$G_{ab}^{(-)}(x, t) = i\theta(-t)\,\mathrm{Sp}\,w\,[a(x, t), b(0)] \equiv$$
$$\equiv \langle\langle a(x, t); b(0)\rangle\rangle^{-}, \qquad (4.1.15)$$

où $b(0) = b(0, 0)$, $a(x, t) \equiv \tilde{a}(x, t)$.

A la différence des fonctions de Green retardées, qui déterminent l'état du système à un certain instant t dans le cas où le champ extérieur est donné aux instants antérieurs (pour $t = -\infty$, le système se trouve dans l'état d'équilibre statistique), les fonctions de Green avancées donnent l'état du système à l'instant t si le champ extérieur est donné à tous les instants postérieurs (pour $t = \infty$ le système se trouve à l'état d'équilibre statistique).

Il est facile d'obtenir l'équation du mouvement pour la fonction de Green. Dérivons à cet effet la fonction $G_{ab}^{(+)}(x, t)$ par rapport au temps. Compte tenu de ce que

$$i\frac{\partial}{\partial t}a(x, t) = -[\mathscr{H}, a(x, t)]$$

et vu la formule $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \delta(t)$, on a [34]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a(x, t); b(0)\rangle\rangle^{\pm} = \delta(t)\,\mathrm{Sp}\,w\,[a(x), b(0)] -$$
$$-\langle\langle[\mathscr{H}, a(x, t)]; b(0)\rangle\rangle^{\pm} \qquad (4.1.16)$$

Comme $[\mathscr{H}, a(x, t)]$ est un opérateur quasi local (tout comme l'opérateur $a(x, t)$), dans le second membre de la formule (4.1.16) on trouve une nouvelle fonction de Green différente de la fonction initiale. Ainsi l'équation (4.1.16) donne lieu à une chaîne infinie d'équations pour la fonction de Green du type

$$\langle\langle[\mathscr{H}, [\mathscr{H}, \ldots[\mathscr{H}, a(x, t)]\ldots]]; b(0)\rangle\rangle^{\pm}.$$

On voit que les équations pour les fonctions de Green retardées et avancées sont du même type. Pour trouver les fonctions de Green retardées, il y a lieu de prendre la solution de l'équation (4.1.16) qui s'annule pour $t < 0$, et pour trouver les fonctions de Green avancées, celle qui s'annule pour $t > 0$.

Les équations (4.1.16) peuvent être écrites pour les composantes de Fourier des fonctions de Green. Introduisant, conformément au paragraphe précédent, la désignation suivante:

$$\langle\langle a;\ b\rangle\rangle^{\pm}_{k\omega} = \int d^3x\, dt e^{-i(kx-\omega t)} \langle\langle a(x,\ t);\ b(0)\rangle\rangle^{\pm},$$

on a

$$\omega\,\langle\langle a;\ b\rangle\rangle^{\pm}_{k\omega} = \langle[a,\ b]\rangle_k - \langle\langle[\mathcal{H},\ a];\ b\rangle\rangle^{\pm}_{k\omega}, \qquad (4.1.17)$$

$$\langle[a,\ b]\rangle_k = \int d^3x e^{-ikx} \operatorname{Sp} w\,[a(x),\ b(0)].$$

Comme le second terme à droite de (4.1.17) est la composante de Fourier d'une certaine fonction de Green et le premier terme ne dépend pas de ω, l'expression (4.1.17) nous donne le comportement asymptotique des fonctions de Green dans le domaine des fréquences élevées:

$$\langle\langle a\ ;\ b\rangle\rangle^{\pm}_{k\omega} = \frac{1}{\omega}\langle[a,\ b]\rangle_k - \frac{1}{\omega^2}\langle[[\mathcal{H},\ a],\ b]\rangle_k + \dots \qquad (4.1.18)$$

Notons que le comportement asymptotique des fonctions de Green retardées et avancées dans le domaine des fréquences élevées est le même.

Les fonctions de Green retardées et avancées sont douées de propriétés analytiques importantes. Pour trouver ces propriétés nous allons introduire la fonction

$$\mathcal{J}_{ba}(x,\ t) = \langle b\ (0)\ a\ (x,\ t)\rangle, \qquad (4.1.19)$$

où $\langle\ldots\rangle = \operatorname{Sp} w \ldots$ Nous allons supposer que les opérateurs a et b sont invariants par rapport à la translation, par conséquent, la fonction $\langle b(x',\ t')\ a(x,\ t)\rangle$ ne dépend que de la différence des arguments $x - x'$, $t - t'$. Nous allons montrer que la fonction $\mathcal{J}_{ba}(x, t)$ peut avoir un prolongement analytique dans le domaine de la variable complexe t qui est définie par l'inégalité

$$0 < \operatorname{Im} t < \beta.$$

A cet effet, on représente $\mathcal{J}_{ba}(x, t)$ sous la forme:

$$\mathcal{J}_{ba}(x,\ t) = \operatorname{Sp} wb(0)\, a(x,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE' \exp\{-\beta E + it(E'-E)\},$$

$$\operatorname{Sp} e^{\Omega+\beta\mu N} b(0)\,\delta(E'-\mathcal{H})\, a(x,\ 0)\,\delta(E-\mathcal{H}).$$

Le spectre du hamiltonien $\mathcal{H}$ peut, de toute évidence, être supposé positif. (S'il commençait par une grandeur négative $-Nc$, il serait possible de rapporter cette grandeur à μN.) C'est pourquoi grâce aux

fonctions delta l'intégration dans la dernière formule a réellement lieu de 0 à ∞. Par conséquent, la fonction

$$\chi(t) = \exp\{-\beta E + it(E' - E)\}, \quad t = \xi + i\eta$$

décroît pour $E \to \infty$, $E' \to \infty$ si seulement $0 < \eta < \beta$, ce qui démontre notre assertion.

Remarquons que la fonction

$$\mathcal{J}_{ab}(-x, -t) = \mathrm{Sp}\, wa(x, t)\, b(0)$$

est analytique dans l'intervalle $-\beta < \mathrm{Im}\, t < 0$.

Puis nous allons montrer que la fonction $\mathcal{J}_{ab}(x, t)$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction $\mathcal{J}_{ba}(x, t)$:

$$\mathcal{J}_{ab}(-x, -t) = e^{-\beta\mu(n-m)}\mathcal{J}_{ba}(x, t+i\beta), \tag{4.1.20}$$

où n et m sont des nombres entiers, montrant combien de fois les opérateurs du type ψ^+ et ψ figurent dans l'opérateur a:

$$a \sim \underbrace{\psi^+ \ldots \psi^+}_{n} \underbrace{\psi \ldots \psi}_{m}.$$

Pour la démonstration notons que

$$\langle b(0)\, a(x, t)\rangle = \mathrm{Sp}\, wb(0)\, a(x, t) = \mathrm{Sp}\, ww^{-1}a(x, t)\, wb(0).$$

Comme, en vertu de (2.3.35), on a $e^{\lambda N}\psi(x)\, e^{-\lambda N} = e^{\lambda}\psi(x)$ et que de plus $e^{\beta\mathcal{H}}a(x, t)\, e^{-\beta\mathcal{H}} = a(x; t - i\beta)$ (λ étant un paramètre arbitraire), on obtient

$$\begin{aligned} w^{-1}a(x, t)\, w &= e^{\beta(\mathcal{H}-\mu N)}a(x, t)\, e^{-\beta(\mathcal{H}-\mu N)} = \\ &= a(x, t - i\beta)\exp\{\beta\mu(m-n)\}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir la relation (4.1.20).

Les composantes de Fourier des fonctions de corrélations $\mathcal{J}_{ab}(k, \omega)$

$$\mathcal{J}_{ab}(k, \omega) = \int d^3x\, dt e^{i(\omega t - kx)}\mathcal{J}_{ab}(x, t)$$

sont, en vertu de (4.1.20), liées entre elles par la relation

$$\mathcal{J}_{ab}(-k, -\omega) = \mathcal{J}_{ba}(k, \omega)\exp\{\beta(\omega+\mu)(m-n))\}. \tag{4.1.21}$$

Remarquant que

$$G_{ab}^{(\pm)}(x, t) = \mp i\theta(\pm t)(\mathcal{J}_{ab}(-x, -t) - \mathcal{J}_{ba}(x, t))$$

et

$$-i\int_0^\infty dt\, e^{i(\omega-\omega')t} = \frac{1}{\omega-\omega'+i0}, \quad i\int_{-\infty}^0 dt\, e^{i(\omega-\omega')t} = \frac{1}{\omega-\omega'-i0},$$

on obtient l'expression suivante pour la composante de Fourier de la fonction de Green $G_{ab}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$G_{ab}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathcal{J}_{ba}(\boldsymbol{k}, \omega')}{\omega - \omega' \pm i0} (e^{\beta(\omega' + \mu(m-n))} - 1). \qquad (4.1.22)$$

Ces formules montrent que $G_{ab}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ est une fonction analytique de la variable complexe ω dans le demi-plan supérieur, et $G_{ab}^{(-)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ une fonction analytique de la variable complexe dans le demi-plan inférieur.

Si l'on introduit la fonction de la variable complexe z

$$G_{ab}(\boldsymbol{k}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathcal{J}_{ba}(\boldsymbol{k}, \omega')}{z - \omega'} (e^{\beta(\omega' + \mu(m-n))} - 1), \qquad (4.1.23)$$

la fonction de Green retardée et avancée peut être considérée comme la valeur limite de la fonction $G_{ab}(\boldsymbol{k}, z)$ pour $z \to \omega + i0$ et $z \to \omega - i0$:

$$G_{ab}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}, \omega) = G_{ab}(\boldsymbol{k}, \omega \pm i0). \qquad (4.1.24)$$

En remarquant que

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp \pi i \delta(x) \equiv \mp \pi i \delta_{\pm}(x), \qquad (4.1.25)$$

on a

$$G_{ab}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) - G_{ab}^{(-)}(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\mathcal{J}_{ba}(\boldsymbol{k}, \omega)(e^{\beta(\omega + \mu(m-n))} - 1).$$

C'est pourquoi

$$G_{ab}(\boldsymbol{k}, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{G_{ab}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega') - G_{ab}^{(-)}(\boldsymbol{k}, \omega')}{z - \omega'}. \qquad (4.1.26)$$

Les relations obtenues peuvent être utilisées pour trouver certaines propriétés des susceptibilités généralisées $G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$. Les opérateurs $\xi_i(\boldsymbol{x})$ étant hermitiens, on a de toute évidence

$$G_{ij}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}, t) = G_{ij}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}, t)^*, \quad G_{ij}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}, \omega)^* = G_{ij}^{(\pm)}(-\boldsymbol{k}, -\omega).$$

De plus, pour des opérateurs a et b arbitraires, en vertu des définitions des fonctions de Green retardées et avancées, on a

$$G_{ab}^{(+)}(-\boldsymbol{x}, -t) = G_{ba}^{(-)}(\boldsymbol{x}, t),$$

et par conséquent

$$G_{ab}^{(+)}(-\boldsymbol{k}, -\omega) = G_{ba}^{(-)}(\boldsymbol{k}, \omega).$$

Donc on a

$$G_{ij}^{(-)}(\boldsymbol{k}, \omega) = G_{ji}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)^*.$$

Compte tenu de cette relation et en utilisant (4.1.26), (4.1.24), on obtient

$$G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega') - G_{ji}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega')^*}{\omega - \omega' + i\eta}. \qquad (4.1.27)$$

Considérant l'ensemble des fonctions $G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ comme une certaine matrice $G(\boldsymbol{k}, \omega)$, nous allons écrire la dernière relation sous la forme suivante:

$$G(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{G(\boldsymbol{k}, \omega') - G(\boldsymbol{k}, \omega')^+}{\omega - \omega' + i\eta},$$

où $G(\boldsymbol{k}, \omega)^+$ est la matrice hermitienne conjuguée de $G(\boldsymbol{k}, \omega)$. En utilisant (4.1.25), on obtient à partir de (4.1.27) l'expression suivante reliant les parties hermitienne et antihermitienne de la matrice des susceptibilités généralisées $G(\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$G'(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{G''(\boldsymbol{k}, \omega)}{\omega - \omega'}, \qquad (4.1.28)$$

où

$$G'(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2} \{G(\boldsymbol{k}, \omega) + G(\boldsymbol{k}, \omega)^+\},$$

$$G''(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2} \{G(\boldsymbol{k}, \omega) - G(\boldsymbol{k}, \omega)^+\}.$$

On peut montrer qu'on a également la relation

$$G''(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{G'(\boldsymbol{k}, \omega)}{\omega - \omega'}. \qquad (4.1.29)$$

(Ces deux relations sont appelées *relations de dispersion de Cramers-Kronig.*)

Ci-dessus nous avons obtenu les équations (4.1.17) pour les composantes de Fourier des fonctions de Green. Ces équations sont de la même forme, tant pour les fonctions de Green avancées que retardées. En utilisant maintenant les propriétés analytiques des fonctions de Green ainsi formulées, on peut dire que pour trouver les fonctions de Green retardées (avancées) à partir de l'équation (4.1.17), on doit exiger que les solutions dans la partie supérieure (inférieure) du demi-plan de la variable complexe ω soient analytiques. Cette condition est généralement appelée *condition de spectralité* [25].

Les fonctions de Green sont douées d'un certain nombre de propriétés de symétrie, liées à l'invariance des équations de la mécanique quantique par rapport à différentes transformations. Considérons, par exemple, la symétrie de la fonction de Green, liée à l'invariance des équations de la mécanique quantique par rapport à l'inversion du temps. Les opérateurs ξ_i, ξ_j étant hermitiens, on a

$$i \operatorname{Sp} w\, [\xi_i (\boldsymbol{x}, t),\ \xi_j (0)] = -i \operatorname{Sp} w^* \,[\xi_i^* (\boldsymbol{x}, t),\ \xi_j^* (0)].$$

Vu que pour l'opérateur unitaire U correspondant à l'inversion du temps (voir 2.3.2), on a les relations (2.3.52), (2.3.53), on obtient

$$-i \operatorname{Sp} w^* [\xi_i^* (\boldsymbol{x}, t),\ \xi_j^* (0)] = -i \operatorname{Sp} U^+ w^* U\, [U^+ \xi_i^* (\boldsymbol{x}, t)\, U,$$
$$U^+ \xi_j^* (0)\, U] = -i \operatorname{Sp} w\, [\xi_i (\boldsymbol{x}, -t),\ \xi_j (0)]\, \varepsilon_i \varepsilon_j =$$
$$= \varepsilon_i \varepsilon_j i \operatorname{Sp} w\, [\xi_j (-\boldsymbol{x}, t),\ \xi_j (0)],$$

où ε_i est la signature temporelle de l'opérateur ξ_i.

A partir de ces formules on obtient la relation suivante pour les composantes de Fourier de la fonction de Green $G_{ij}^{(\pm)} (\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$G_{ij}^{(\pm)} (\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_i \varepsilon_j G_{ji}^{(\pm)} (-\boldsymbol{k}, \omega), \qquad (4.1.30)$$

relation qui exprime la propriété de symétrie des fonctions de Green (ou des susceptibilités généralisées) lors de l'inversion du temps.

§ 4.2. Théorie généralisée des processus de relaxation

4.2.1. Equation intégrale pour l'opérateur statistique dans le cas d'une interaction faible. Nous allons passer maintenant à l'étude des processus cinétiques dans les cas où le hamiltonien du système peut être divisé en deux termes $\mathscr{H}_0$ et V, où $\mathscr{H}_0$ contient des interactions principales, et V décrit des interactions faibles. Par exemple, dans le cas d'un gaz, par $\mathscr{H}_0$ on peut entendre le hamiltonien des particules libres, et par V le hamiltonien de leur interaction. La division de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{H}_0$ et V est possible non seulement dans le cas d'un gaz. Par exemple, en étudiant des processus cinétiques dans les substances ferromagnétiques, on entend par $\mathscr{H}_0$ le hamiltonien de l'interaction d'échange, et par V le hamiltonien des interactions relativistes.

Nous allons commencer par l'étude des systèmes spatialement homogènes. Si l'on part du hamiltonien $\mathscr{H}_0$ (que nous avons appelé hamiltonien tronqué), après un temps suffisamment long, l'opérateur statistique du système ne tendra en général pas vers la distribution de Gibbs à l'équilibre avec le hamiltonien $\mathscr{H}_0$. Cependant, en vertu de la relation ergodique (2.4.31), on peut affirmer que, pour des temps suffisamment grands ($t \gg \tau_0$, τ_0 étant le temps de chaotisation), on a également un certain état universel qui diffère de l'état d'équilibre et est caractérisé non par cinq intégrales du

mouvement $\mathscr{H}$, $\boldsymbol{P}$, N, mais dans le cas général par un plus grand nombre d'opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) déterminés par la structure du hamiltonien $\mathscr{H}_0$ et ses propriétés de symétrie. A savoir, pour $t \gg \tau_0$, on aura la relation

$$e^{-i\mathscr{H}_0 t}\rho e^{i\mathscr{H}_0 t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \rho^{(0)}\,(e^{iat}\,\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}), \tag{4.2.1}$$

où ρ est la valeur initiale de l'opérateur statistique du système

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \exp\{\Omega(\gamma) - Y_\alpha(\gamma)\,\hat{\gamma}_\alpha\},$$

les grandeurs $\Omega(\gamma)$ et $Y_\alpha(\gamma)$ étant données par les équations suivantes

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma) = 1, \quad \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,\hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha$$

(γ dans les arguments des différentes grandeurs désigne l'ensemble des c-nombres γ_1, γ_2, . . . ; on suppose la sommation sur l'indice répété). Comme nous venons de le noter, les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ dépendent des propriétés de symétrie du hamiltonien $\mathscr{H}_0$. C'est ce qui apparaît dans les relations (2.4.27) $[\mathscr{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = a_{\alpha\beta}\hat{\gamma}_\beta$, où la matrice $a \equiv \equiv \| a_{\alpha\beta} \|$ est également donnée par la structure du hamiltonien $\mathscr{H}_0$.

Nous allons considérer que l'ensemble des opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ est connu, bien que leur recherche soit un problème compliqué, dont la solution doit être trouvée pour chaque cas particulier. Supposant ce problème résolu, nous allons voir comment va se comporter l'opérateur statistique du système $\rho(t)$ pour des temps suffisamment grands, compte tenu des interactions relativement faibles décrites par le hamiltonien V.

De même que dans le cas classique en tenant compte de l'interaction faible, on peut décrire l'état du système par une fonction de distribution à une particule (c'est pourquoi les fonctions de distribution à particules multiples étaient des fonctionnelles de la fonction de distribution à une particule), dans le cas quantique, lorsqu'on tient compte des interactions faibles, on peut décrire l'état du système à l'aide des grandeurs $\gamma_\alpha(t) = \mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\hat{\gamma}_\alpha$. Ceci signifie que l'opérateur statistique $\rho(t)$, compte tenu de toutes les interactions, pour $t \gg \tau_0$, dépendra du temps et de l'état initial du système seulement par les paramètres

$$\rho(t) \equiv e^{-i\mathscr{H}t}\rho e^{i\mathscr{H}t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \sigma(\gamma(t;\,\rho)), \tag{4.2.2}$$

où $\rho = \rho(0)$ est la valeur initiale de l'opérateur statistique $\rho(t)$ *).

*) L'idée d'une description abrégée de l'état du système a été énoncée par Gilbert, Enskog et Chapman lors de la recherche des équations de la dynamique des gaz à partir de l'équation cinétique de Boltzmann. L'idée que les fonctions de distribution à particules multiples deviennent pour des temps grands des fonctionnelles d'une fonction de distribution à une particule ou des fonctionnelles des variables hydrodynamiques appartient à Bogolioubov.

Cette relation est analogue à la relation classique (1.2.2), et la formule (4.2.1) à la formule classique (1.2.1) (dans la théorie classique on entend par $\mathcal{H}_0$ le hamiltonien d'un système de particules libres). Nous étudierons plus en détail le problème de la représentation asymptotique (4.2.2) dans le § 4.3.

Lorsque l'on tient compte seulement du hamiltonien $\mathcal{H}_0$, les grandeurs γ_α, dans le cas général, ne restent pas constantes et varient dans le temps suivant la loi $\gamma(t) = \exp(iat)\,\gamma(0)$. Si maintenant on tient compte des interactions faibles, les grandeurs $\gamma_\alpha(t)$ seront astreintes à une variation supplémentaire qui sera cependant lente par rapport à la variation due au hamiltonien $\mathcal{H}_0$ et donnant lieu à l'établissement de la distribution universelle $\rho^0(\gamma)$. En d'autres termes, on peut dire que le système aura le temps de « s'accorder » aux valeurs instantanées hors d'équilibre des paramètres γ_α *). Ceci est dû au fait que le temps de relaxation τ_r des paramètres γ_α à ses valeurs d'équilibre est bien supérieur au temps de chaotisation τ_0, $\tau_r \gg \tau_0$. Cette inégalité est toujours vérifiée pour une interaction suffisamment faible, car le temps de chaotisation ne dépend pas de l'intensité de l'interaction V, et $\tau_r \to \infty$ pour $V \to 0$.

Nous appellerons l'opérateur $\sigma(\gamma)$ opérateur statistique *grossier* **). Notre problème revient maintenant à trouver la structure de cet opérateur et la dépendance de $\gamma(t;\rho)$ du temps et de l'état initial de l'opérateur statistique ρ sans étudier les processus transitoires donnant lieu à l'établissement de l'opérateur statistique grossier $\sigma(\gamma)$ ***). Il est évident que, $\sigma(\gamma(t))$ $(\gamma(t) = \gamma(t;\rho))$ étant l'opérateur statistique à l'instant t, lorsque les paramètres γ prennent les valeurs $\gamma(t;\rho)$, on a les relations suivantes

$$\operatorname{Sp}\sigma(\gamma)\,\hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha. \tag{4.2.3}$$

L'opérateur statistique $\sigma(\gamma(t))$ doit satisfaire à l'équation du mouvement

$$i\frac{\partial\sigma}{\partial t} = [\mathcal{H}, \sigma],$$

*) L'idée d'une description abrégée des états due à la hiérarchie des temps de relaxation a été développée pour la première fois au cours de l'étude des processus cinétiques dans les travaux de Landau sur l'égalisation des températures dans les plasmas [72], les travaux de Gourévitch [45] et de Akhiezer et Aleksine [3] sur l'aimantation des gaz, les travaux de Akhiezer, Bariakhtar, Péletminski [4] sur les processus cinétiques dans les substances ferromagnétiques.

**) La notion d'opérateur statistique grossier a pour la première fois été introduite par Von Neumann [83]. La valeur grossière était alors liée à la recherche d'opérateurs mutuellement commutables, correspondant aux grandeurs macroscopiques. Ci-dessous, tout comme dans le premier chapitre, nous entendrons par valeur grossière la simplification de l'état du système au cours de son évolution naturelle.

***) Ci-dessus nous utiliserons les travaux [88].

et comme σ dépend du temps seulement par les paramètres $\gamma(t)$, on a

$$i\frac{\partial\sigma(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\dot{\gamma}_\alpha=[\mathscr{H},\sigma(\gamma)].$$

En multipliant cette équation par $\hat{\gamma}_\beta$ et en utilisant la relation (4.2.3), on obtient après le calcul de la trace

$$\dot{\gamma}_\alpha(t)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma(\gamma(t))[\mathscr{H},\hat{\gamma}_\alpha]\equiv\mathscr{L}_\alpha(\gamma(t)) \tag{4.2.4}$$

et par conséquent

$$i\frac{\partial\sigma(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\mathscr{L}_\alpha(\gamma)=[\mathscr{H},\sigma(\gamma)]. \tag{4.2.5}$$

Cette équation doit servir à la recherche de l'opérateur statistique $\sigma(\gamma)$, celui-ci une fois trouvé, on peut à l'aide de l'équation (4.2.4) trouver la loi donnant les variations des grandeurs γ_α dans le temps.

Par elle-même, l'équation (4.2.5) ne permet pas de trouver d'une manière univoque l'opérateur statistique $\sigma(\gamma)$: à cet effet il y a lieu de connaître, tout comme dans le cas classique, la « condition aux limites » pour l'opérateur $\sigma(\gamma)$. Pour trouver cette condition, nous allons nous référer à la relation ergodique (4.2.1) dans laquelle pour ρ on prend l'opérateur $\sigma(\gamma)$ *). En utilisant la relation (4.2.3), on obtient

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma(\gamma)\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\rho^{(0)}(e^{i a\tau}\gamma),$$

ou

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma(e^{-ia\tau}\gamma)\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}=\rho^{(0)}(\gamma) \tag{4.2.6}$$

(le passage à la limite $\tau\to\infty$ doit ici avoir lieu après le passage à la limite thermodynamique dans les valeurs moyennes des grandeurs physiques, voir § 2.4). Cette relation est la « condition aux limites » cherchée qui doit compléter l'équation (4.2.5). Remarquons que la condition (4.2.6) est analogue à la « condition aux limites » (1.2.3) pour les systèmes classiques.

L'équation différentielle (4.2.5) peut, tout comme dans le cas classique, être transformée en une équation intégrale pour l'opérateur statistique $\sigma(\gamma)$ tenant automatiquement compte de la « condition aux limites » (4.2.6). A cet effet posons

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\alpha(\gamma)&=\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)+L_\alpha(\gamma),\\ \mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)&=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma(\gamma)[\mathscr{H}_0,\hat{\gamma}_\alpha],\\ L_\alpha(\gamma)&=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma(\gamma)[V,\hat{\gamma}_\alpha].\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

*) Dans (4.2.2) l'opérateur statistique ρ doit à la limite $\mathscr{V}\to\infty$ satisfaire au principe d'affaiblissement des corrélations. L'opérateur $\sigma(\gamma)$ satisfait également à ce principe.

La grandeur $\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)$ peut, de toute évidence, en vertu de (2.4.27), (4.3.2), s'écrire sous la forme

$$\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) = ia_{\alpha\beta}\gamma_\beta. \tag{4.2.8}$$

En substituant (4.2.7) dans (4.2.5), on obtient

$$i\frac{\partial\sigma(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) - [\mathscr{H}_0, \sigma(\gamma)] = f(\gamma), \tag{4.2.9}$$

$$f(\gamma) = [V, \sigma(\gamma)] - i\frac{\partial\sigma(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}L_\alpha(\gamma).$$

Le premier membre de cette équation ne contient pas, sous forme explicite, le hamiltonien de l'interaction V, quant au second membre, il est linéaire par rapport à V. En effectuant dans l'équation (4.2.9) la substitution $\gamma \to \exp(ia\tau)\gamma$, puis remarquant qu'en vertu de (4.2.8) on a

$$\mathscr{L}^{(0)}(e^{ia\tau}\gamma) = e^{ia\tau}\mathscr{L}^{(0)}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\tau}e^{ia\tau}\gamma$$

et par conséquent que

$$\frac{\partial\sigma(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)\Big|_{\gamma\to e^{ia\tau}\gamma} = \frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(e^{ia\tau}\gamma),$$

on obtient

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(e^{ia\tau}\gamma) - [\mathscr{H}_0, \sigma(e^{ia\tau}\gamma)] = f(e^{ia\tau}\gamma).$$

En introduisant les désignations suivantes

$$\sigma_\tau = e^{i\mathscr{H}_0\tau}\sigma(e^{ia\tau}\gamma)\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}, \tag{4.2.10}$$

on peut écrire cette équation sous la forme

$$i\frac{\partial\sigma_\tau}{\partial\tau} = e^{i\mathscr{H}_0\tau}f(e^{ia\tau}\gamma)\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}.$$

En remarquant qu'en vertu de (4.2.6), (4.2.10) on a

$$\sigma_{-\infty} = \rho^{(0)}(\gamma), \qquad \sigma_0 = \sigma(\gamma),$$

on obtient après intégration de la dernière équation de $\tau = -\infty$ à $\tau = 0$

$$\sigma(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}f(e^{ia\tau}\gamma)\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}.$$

Comme nous l'avons déjà souligné plus d'une fois, l'intégrale impropre sur τ doit être calculée après le passage à la limite thermodynamique. C'est pourquoi, il est commode d'introduire sous le signe de l'intégrale le facteur $\exp\eta\tau$ ($\eta > 0$) et après le calcul à l'aide de

$\sigma(\gamma)$ des fonctions de distribution à particules multiples et le passage à la limite thermodynamique, faire tendre η vers zéro ($\eta \to +0$). Ainsi

$$\sigma(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma) + i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ [\sigma(\gamma),\ V] + \right.$$

$$\left. + i \frac{\partial \sigma(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} L_\alpha(\gamma) \right\}_{\gamma \to e^{i a \tau}\gamma} \cdot e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \qquad (4.2.11)$$

où

$$L_\alpha(\gamma) = i \operatorname{Sp} \sigma(\gamma)\, [V,\ \hat{\gamma}_\alpha].$$

C'est là l'équation intégrale pour l'opérateur statistique grossier $\sigma(\gamma)$. En le multipliant par le produit des opérateurs de création et d'annihilation des particules $\psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n)$ et en calculant la trace, on obtient une chaîne d'équations intégrales s'accrochant pour les fonctions de distribution à particules multiples, analogue à la chaîne d'équations intégrales (1.2.11) pour les fonctions de distribution à particules multiples dans le cas classique.

Le terme intégral dans le second membre de cette équation est explicitement proportionnel au hamiltonien de l'interaction V, que nous supposons être petit. C'est pourquoi la solution de l'équation (4.2.11) peut être recherchée sous la forme d'une série suivant les puissances de V:

$$\sigma(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}(\gamma).$$

En substituant ce développement dans (4.2.11), on trouve la relation de récurrence suivante

$$\sigma^{(n)}(\gamma) = i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ [\sigma^{(n-1)}(\gamma),\ V] + \right.$$

$$\left. + i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial \sigma^{(l)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} L_\alpha^{(n-l)}(\gamma) \right\}_{\gamma \to e^{i a \tau}\gamma} \cdot e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (4.2.12)$$

où

$$\sigma^{(0)}(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma) \quad \text{et} \quad L_\alpha^{(l)}(\gamma) = i \operatorname{Sp} \sigma^{(l-1)}(\gamma)\, [V,\ \hat{\gamma}_\alpha].$$

Ce qui, en particulier, montre que

$$\sigma^{(1)}(\gamma) = \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ i\, [\rho^{(0)}(\gamma),\ V] - L_\alpha^{(1)}(\gamma) \frac{\partial \rho^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \right\}_{\gamma \to e^{i a \tau}\gamma} \cdot e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

$$L_\alpha^{(1)}(\gamma) = i \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma)\, [V,\ \hat{\gamma}_\alpha].$$

En vertu de (4.2.1), on a

$$e^{i\mathscr{H}_0\tau}\rho^{(0)}(e^{ia\tau}\gamma)\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}=\rho^{(0)}(\gamma), \tag{4.2.13}$$

donc

$$e^{i\mathscr{H}_0\tau}\left.\frac{\partial\rho^{(0)}(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\right|_{\gamma\to e^{ia\tau}\gamma}e^{-i\mathscr{H}_0\tau}=\frac{\partial\rho^{(0)}(\gamma)}{\partial\gamma_\beta}(e^{-ia\tau})_{\beta\alpha},$$

$$L_\alpha^{(1)}(e^{ia\tau}\gamma)=i\,\mathrm{Sp}\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\rho^{(0)}(\gamma)\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}[V,\ \hat{\gamma}_\alpha]=$$
$$=(e^{ia\tau})_{\alpha\beta}\,i\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V(\tau),\ \hat{\gamma}_\beta],$$

où $V(\tau)$ est l'opérateur de l'interaction V dans la représentation de l'interaction

$$V(\tau)=e^{i\mathscr{H}_0\tau}\,Ve^{-i\mathscr{H}_0\tau},$$

(nous avons tenu compte de ce qu'en vertu de (2.4.27), on a $e^{i\mathscr{H}_0\tau}\hat{\gamma}e^{-i\mathscr{H}_0\tau}=e^{ia\tau}\hat{\gamma}$). En utilisant ces formules, on peut écrire l'opérateur $\sigma^{(1)}(\gamma)$ sous la forme

$$\sigma^{(1)}(\gamma)=i\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}\Big\{[\rho^{(0)}(\gamma),\ V(\tau)]-$$
$$-\frac{\partial\rho^{(0)}(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V(\tau),\ \hat{\gamma}_\alpha]\Big\}. \tag{4.2.14}$$

Conformément à (4.2.4), les paramètres γ_α (4.2.4) doivent satisfaire aux équations différentielles

$$\dot{\gamma}_\alpha=\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)+L_\alpha^{(1)}(\gamma)+L_\alpha^{(2)}(\gamma)+\ldots, \tag{4.2.15}$$

où

$$\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)=ia_{\alpha\beta}\gamma_\beta,\quad L_\alpha^{(1)}(\gamma)=i\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V,\ \hat{\gamma}_\alpha],$$

$$L_\alpha^{(2)}(\gamma)=-\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\Big[V(\tau),\ [V,\ \hat{\gamma}_\alpha]+i\hat{\gamma}_\beta\frac{\partial L_\alpha^{(1)}(\gamma)}{\partial\gamma_\beta}\Big]$$

et $\rho^{(0)}(\gamma)$ est donné par la formule (2.4.29).

On peut considérer les équations (4.2.15) comme les équations cinétiques généralisées pour les grandeurs γ_α. En particulier, si $\mathscr{H}_0$ est le hamiltonien des particules libres, il faut, en tant que paramètres γ_α, prendre la fonction de distribution à une particule, l'indice α marquant dans ce cas la variable impulsionnelle (voir § 5.1). On obtient ainsi les équations cinétiques quantiques décrivant l'évolution du système pour $t \gg \tau_0$. Nous appellerons cette étape de l'évolution *étape cinétique*. Le chapitre suivant est consacré à l'étude détaillée des équations cinétiques quantiques.

Remarquons que chacun des termes faisant partie de $\sigma^{(n)}(\gamma)$ dans la formule (4.2.12) diverge lors de l'intégration sur τ et seule leur somme totale est finie (pour plus en détail voir le § 4.3). Nous allons montrer maintenant comment on peut trouver les paramètres γ en fonction de la valeur initiale de l'opérateur statistique ρ [89]. A cet effet remarquons que, comme $[\mathscr{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = a_{\alpha\beta}\hat{\gamma}_\beta$, on a

$$e^{-ia\tau} \operatorname{Sp} \rho(\tau) \hat{\gamma} = \operatorname{Sp} \rho\hat{\gamma} - i \int_0^\tau d\tau' e^{-ia\tau'} \operatorname{Sp}[V, \rho(\tau')] \hat{\gamma}, \quad (4.2.16)$$

où $\rho(\tau) = \exp(-i\mathscr{H}\tau) \rho \exp(i\mathscr{H}\tau)$. On doit passer ici dans le domaine asymptotique $\tau \gg \tau_0$ dans lequel $\rho(\tau) \xrightarrow[\tau \gg \tau_0]{} \sigma(\gamma(\tau; \rho))$. Cependant, dans le second membre de (4.2.16) lorsqu'on applique la théorie des perturbations par rapport à V, certains termes de la série divergeront pour $\tau \to \infty$ (ces termes dits séculaires seront étudiés dans le § 4.3). C'est pourquoi, sous le signe de l'intégrale, on remplace $\rho(\tau')$ par $\rho(\tau') - \sigma(\gamma(\tau'; \rho)) + \sigma(\gamma(\tau'; \rho))$. Dans l'intégrale sur τ' des deux premiers termes $\rho(\tau') - \sigma(\gamma(\tau'; \rho))$ on peut alors, en vertu de (4.2.2), remplacer la limite supérieure de l'intégration sur τ' par ∞. En remarquant ensuite que, vu (4.2.9), on a

$$-ie^{-ia\tau} \operatorname{Sp} \sigma(\gamma(\tau; \rho)) [\hat{\gamma}, V] = \frac{\partial}{\partial\tau} e^{-ia\tau}\gamma(\tau; \rho),$$

l'apport dans l'intégrale sur τ' du dernier terme $\sigma(\gamma(\tau'; \rho))$ est donc égal à

$$-i \int_0^\tau d\tau' e^{-ia\tau'} \operatorname{Sp}[\hat{\gamma}, V] \sigma(\gamma(\tau'; \rho)) = e^{-ia\tau}\{\gamma(\tau; \rho) - \gamma(0; \rho)\}.$$

C'est pourquoi

$$\gamma(0; \rho) = \operatorname{Sp} \rho\hat{\gamma} - i \int_0^\infty d\tau e^{-ia\tau} \operatorname{Sp}\{\rho - \sigma(\gamma(0; \rho))\} \times$$
$$\times e^{-i\mathscr{H}\tau} [\hat{\gamma}, V] e^{i\mathscr{H}\tau}. \quad (4.2.17)$$

Pour $\sigma(\gamma)$ donné, cette formule permet, en appliquant les méthodes de la théorie des perturbations (en développant $\exp(\pm i\mathscr{H}\tau)$ et $\sigma(\gamma)$ en séries suivant V), de trouver les grandeurs $\gamma(0; \rho)$ en approximation quelconque par rapport à V. En utilisant $\gamma(0; \rho)$ en tant que condition initiale pour la résolution de l'équation (4.2.4), on peut trouver $\gamma(\tau; \rho)$.

Remarquons que les grandeurs $\gamma(0; \rho)$ ne coïncident pas avec les valeurs initiales vraies des paramètres γ qui sont égales à $\operatorname{Sp} \rho\hat{\gamma}$. Dans le cas général, comme nous l'avons vu, les valeurs vraies des paramètres γ coïncident avec $\gamma(\tau; \rho)$ seulement pour $\tau \gg \tau_0$, quant

aux grandeurs γ (0; ρ), elles sont indispensables pour la restitution de la dépendance de l'opérateur statistique grossier de l'état initial ρ.

4.2.2. Equation intégrale pour l'opérateur statistique dans le cas des petites hétérogénéités. Dans le paragraphe précédent nous avons supposé que l'état du système était spatialement homogène. Nous allons maintenant passer à l'étude des processus de relaxation des états spatialement hétérogènes. En ce qui concerne le hamiltonien $\mathscr{H}$, il faut, en principe, distinguer deux cas: premièrement, le cas où $\mathscr{H}$ peut être représenté comme dans le paragraphe précédent sous forme de la somme de $\mathscr{H}_0$ et de V, $\mathscr{H}_0$ décrivant les interactions fortes et V les interactions relativement faibles, et, deuxièmement, le cas où une telle division est impossible (c'est ce qui se passe, par exemple, dans le cas des liquides).

Pour les états spatialement homogènes, la possibilité de décomposer $\mathscr{H}$ en $\mathscr{H}_0$ et V a donné lieu à une hiérarchie des temps de relaxation $\tau_0 \ll \tau_r$, où τ_0 est le temps de chaotisation déterminé par le hamiltonien $\mathscr{H}_0$ et τ_r le temps de relaxation donné par les interactions relativement faibles V. Dans le cas des états non homogènes, les processus de relaxation apparaissent non seulement grâce à la décomposition éventuelle de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{H}_0$ et V, mais également par suite de l'existence même des hétérogénéités spatiales. Ceci est particulièrement important dans le cas où la décomposition de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{H}_0$ et V n'a pratiquement pas de sens, comme, par exemple, dans le cas des liquides pour lesquels en l'absence d'hétérogénéités spatiales il n'y a pas de hiérarchie des temps de relaxation, car le temps de chaotisation est de l'ordre de grandeur du temps de relaxation. En effet, on a $\tau_0 \sim r_0/\bar{v}$ et $\tau_r \sim l/\bar{v}$, où r_0 est le rayon d'action des forces, l le libre parcours moyen des particules et $\bar{v}$ leur vitesse thermique. Comme $l \sim (n\sigma)^{-1}$ (n étant la densité des particules, $\sigma \sim r_0^2$ la section de diffusion des particules), on a $\tau_0/\tau_r \sim (r_0/a)^3$, où a est la distance moyenne entre les particules. C'est pourquoi la grandeur τ_0/τ_r est bien plus petite que l'unité pour les gaz, lorsque $r_0 \ll a$, et de l'ordre de l'unité pour les liquides, lorsque $r_0 \sim a$. C'est la raison pour laquelle dans le cas d'un liquide l'étape cinétique de l'évolution disparaît et il ne reste que l'*étape hydrodynamique de l'évolution* qui est caractérisée par le fait que dans chaque point de l'espace, on voit rapidement s'établir, durant le temps τ_r, une distribution locale de Gibbs avec des paramètres thermodynamiques variant lentement d'un point à l'autre. Le temps caractéristique des variations de ces paramètres τ_m croît avec l'augmentation des dimensions caractéristiques des hétérogénéités a_m et pour a_m grands dépasse notablement le temps τ_r qui ne dépend pas de a_m. Les dimensions caractéristiques des hétérogénéités spatiales à l'étape hydrodynamique de l'évolution sont grandes par rapport aux dis-

tances microscopiques, c'est-à-dire par rapport aux distances interatomiques pour les liquides et la longueur du libre parcours moyen des particules l pour les gaz. (Soulignons que pour les gaz, à la différence des liquides, l'étape cinétique de l'évolution existe et elle précède l'étape hydrodynamique.) Il est facile de voir que la condition $a_m \gg r_0$ (ou l) devient la condition $\tau_m \gg \tau_r$. La hiérarchie des temps de relaxation $\tau_m \gg \tau_r$ permet de simplifier la description de l'état du système à l'étape hydrodynamique de l'évolution apparaissant pour $t \gg \tau_r$. A savoir, pour $t \gg \tau_r$, l'opérateur statistique dépendra du temps seulement par l'intermédiaire des densités des grandeurs hydrodynamiques: la masse, l'impulsion et l'énergie.

En passant à l'étude de l'évolution des états spatialement non homogènes, nous allons commencer par l'étude de l'évolution due au hamiltonien $\mathcal{H}_0$ qui peut être soit une partie du hamiltonien total $\mathcal{H}$, soit coïncider avec $\mathcal{H}$ (comme par exemple dans le cas d'un liquide). L'influence du hamiltonien de l'interaction faible V sur l'évolution des états spatialement non homogènes sera étudiée au paragraphe suivant.

Comme nous l'avons déjà vu pour les états initiaux spatialement homogènes, l'évolution liée au hamiltonien $\mathcal{H}_0$ se termine pour $t \gg \tau_0$ par la formation de l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\gamma)$ (voir la formule (4.2.1)). Si, par contre, l'état initial n'est pas spatialement homogène, pour $t \gg \tau_0$ (mais $t \ll \tau_m$) cette relation asymptotique ne sera plus vraie. Cependant, tout comme dans le cas hydrodynamique, pour $t \gg \tau_0$, la description du système se simplifie. A savoir, pour $t \gg \tau_0$, l'état du système peut être décrit par les densités $\zeta_\alpha(x)$ des grandeurs γ_α dont l'opérateur statistique dépendra fonctionnellement, c'est-à-dire qu'on aura l'égalité asymptotique

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \sigma_0(\zeta_\alpha(x', t; \rho)), \qquad (4.2.18)$$

où l'opérateur σ_0, qui est une fonctionnelle opératorielle $\zeta_\alpha(x)$, dépend du temps et de la valeur initiale de l'opérateur statistique seulement par l'intermédiaire des valeurs moyennes des densités $\zeta_\alpha(x, t; \rho)$. Nous appellerons cet opérateur *opérateur statistique grossier*.

Aux densités des grandeurs physiques correspondent les opérateurs des densités $\zeta_\alpha(x)$ liés aux opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ par les relations suivantes

$$\hat{\gamma}_\alpha = \int d^3x \hat{\zeta}_\alpha(x). \qquad (4.2.19)$$

Ici et dans le paragraphe suivant nous allons supposer pour plus de simplicité que les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ sont des intégrales du mouvement par rapport au hamiltonien $\mathcal{H}_0$, c'est-à-dire que $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = 0$ et par conséquent, en vertu de (2.4.27) on a $a_{\alpha\beta} = 0$. Nous allons donc

considérer que les opérateurs des densités $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ dans la représentation de Schrödinger satisfont aux lois différentielles de conservation

$$i[\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(x)] = -\frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha k}(x)}{\partial x_k}, \tag{4.2.20}$$

où $\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)$ sont les opérateurs des densités des flux des grandeurs $\zeta_\alpha(x)$.

L'opérateur statistique grossier en vertu de la définition des grandeurs $\zeta_\alpha(x, t; \rho)$ satisfait à la relation

$$\mathrm{Sp}\, \sigma_0(\zeta(x'))\, \hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x), \tag{4.2.21}$$

analogue à (4.2.3). En vertu de (4.2.18), on a également les relations suivantes

$$\begin{gathered} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_0(\zeta(x', t; \rho))\, e^{i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma_0(\zeta(x', t+\tau; \rho)), \\ e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_0(\zeta(x', t; \rho))\, e^{i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma_0(\zeta(x', t; e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\rho e^{i\mathcal{H}_0\tau})). \end{gathered} \tag{4.2.22}$$

A partir de (4.2.21) et de (4.2.22) on a

$$\zeta_\alpha(x, t+\tau; \rho) = \zeta_\alpha(x, t; e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\rho e^{i\mathcal{H}_0\tau}).$$

En dérivant la première des formules (4.2.22) par rapport à τ et en posant $\tau = 0$, on obtient

$$-i[\mathcal{H}_0, \sigma_0(\zeta(x', t; \rho))] = \frac{\partial}{\partial t}\sigma_0(\zeta(x', t; \rho)),$$

ou

$$\begin{gathered} -i[\mathcal{H}_0, \sigma_0(\zeta(x'))] = \int d^3x\, \frac{\delta\sigma_0(\zeta(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta(x')), \\ L_\alpha(x; \zeta(x')) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0(\zeta(x'))\,[\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(x)] \end{gathered} \tag{4.2.23}$$

avec

$$\dot{\zeta}_\alpha(x, t) = L_\alpha(x; \zeta(x', t)), \quad \zeta_\alpha(x, t) \equiv \zeta_\alpha(x, t; \rho). \tag{4.2.24}$$

La grandeur $L_\alpha(x; \zeta(x'))$ peut, en vertu de (4.2.20), s'écrire comme

$$L_\alpha(x; \zeta(x')) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}\,\sigma_0(\zeta(x'))\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(x). \tag{4.2.25}$$

Nous allons maintenant obtenir l'équation intégrale pour l'opérateur statistique grossier $\sigma_0(\zeta(x'))$ qui permet d'élaborer la théorie des perturbations par rapport aux gradients spatiaux des densités $\zeta_\alpha(x)$. A cet effet, on écrit l'opérateur figurant dans le premier membre de (4.2.18) sous la forme

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} = \rho - i\int_0^t d\tau e^{-i\mathcal{H}_0\tau}[\mathcal{H}_0, \rho]\, e^{i\mathcal{H}_0\tau},$$

ou

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} = \rho + \sigma_0(\zeta(x', t; \rho)) - \sigma_0(\zeta(x', 0; \rho)) - \\ - i\int_0^t d\tau \left\{e^{-i\mathcal{H}_0\tau}[\mathcal{H}_0, \rho]\, e^{i\mathcal{H}_0\tau} - i\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_0(\zeta(x', \tau; \rho))\right\}. \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Remarquons maintenant qu'en vertu de (4.2.18) l'expression sous l'intégrale tend vers zéro pour $\tau \to \infty$. C'est pourquoi, en passant dans l'équation (4.2.26) à la limite $t \to \infty$ et en utilisant (4.2.18), (4.2.22), (4.2.23), on obtient:

$$\sigma_0(\zeta(x')) = \rho - \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \Big\{ i[\mathcal{H}_0, \rho] + \\ + \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(\zeta(x))}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x;\ \zeta(x)) \Big\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

$$\zeta_\alpha(x) \equiv \zeta_\alpha(x,\ 0;\ \rho). \tag{4.2.27}$$

Cette équation équivaut, en fait, à la relation asymptotique (4.2.18), mais elle est plus commode que (4.2.18), car elle se présente sous la forme d'une égalité exacte.

La formule (4.2.27), tout comme (4.2.18), est dans le cas général vraie pour un opérateur statistique quelconque ρ satisfaisant au principe d'affaiblissement des corrélations. Pour ρ on prend l'opérateur statistique $w(Y(x'))$ qui est localement équilibré par rapport à $\rho^{(0)}$:

$$w(Y(x')) = \exp\{\Omega - \int d^3x'\, Y_\alpha(x')\, \hat{\zeta}_\alpha(x')\}, \tag{4.2.28}$$

où $Y_\alpha(x)$ sont des fonctions c-numériques arbitraires et la grandeur Ω est donnée par la condition de normalisation $\mathrm{Sp}\, w(Y(x')) = 1$. Ce choix de l'opérateur statistique est dû à ce qui suit. Premièrement, l'opérateur $w(Y(x'))$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations; deuxièmement, l'opérateur $w(Y(x'))$ contient un nombre suffisant de fonctions arbitraires $Y_\alpha(x)$, ce qui permet de définir l'opérateur $\sigma_0(\zeta(x'))$ comme une fonctionnelle des fonctions arbitraires $\zeta_\alpha(x)$; enfin, pour un tel choix de ρ, le commutateur $[\mathcal{H}_0, \rho] = [\mathcal{H}_0, w(Y(x'))]$ s'annulera avec les dérivées spatiales $Y_\alpha(x)$, ce qui permet, dans le cas des petits gradients $\zeta_\alpha(x)$ (ou $Y_\alpha(x)$), d'utiliser la théorie des perturbations en supposant petit le terme intégral dans l'équation (4.2.27).

La substitution de $w(Y(x'))$ au lieu de ρ dans l'équation (4.2.27) donne [89, 90]

$$\sigma_0(\zeta(x')) = w(Y(x')) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \Big\{ i[\mathcal{H}_0, w(Y(x'))] - \\ - \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(\zeta(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{Sp}\, \sigma_0(\zeta(x'))\, \hat{\zeta}_{\alpha k}(x) \Big\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{4.2.29}$$

Les grandeurs $\zeta_\alpha(x) \equiv \zeta_\alpha(x,\ 0;\ w(Y(x')))$ doivent être des fonctionnelles bien déterminées des forces thermodynamiques $Y_\alpha(x)$,

$\zeta_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x; Y(x'))$. Ces fonctionnelles peuvent être obtenues à partir de la condition de compatibilité de (4.2.29) **avec** (4.2.21):

$$\mathrm{Sp}\, \sigma_0(\zeta(x'))\, \hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x).$$

Nous allons maintenant voir comment les grandeurs $\zeta_\alpha(x, 0; \rho)$ dépendent de ρ. Remarquons à cet effet qu'en vertu de (4.2.21) on a $\zeta_\alpha(x, 0; \rho) = \mathrm{Sp}\, \sigma_0(\zeta(x', 0; \rho))\, \hat{\zeta}_\alpha(x)$. En y substituant l'expression (4.2.27) au lieu de $\sigma_0(\zeta(x', 0; \rho))$ et en utilisant (4.2.23), on obtient

$$\zeta_\alpha(x, 0; \rho) = \mathrm{Sp}\, \rho\hat{\zeta}_\alpha(x) - \\ - i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{Sp}\, e^{i\mathscr{H}_0\tau} [\mathscr{H}_0, \rho - \sigma_0(\zeta(x', 0; \rho))]\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau} \hat{\zeta}_\alpha(x).$$

Compte tenu de ce que $i[\mathscr{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(x)] = -\frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha k}(x)}{\partial x_k}$, on trouve

$$\zeta_\alpha(x, 0; \rho) = \mathrm{Sp}\, \rho\hat{\zeta}_\alpha(x) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-\infty}^{0} d\tau \cdot \mathrm{Sp}\, e^{i\mathscr{H}_0\tau} (\rho - \sigma_0(\zeta(x', 0; \rho)))\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(x). \quad (4.2.30)$$

Cette équation nous servira à définir la fonction $\zeta_\alpha(x, 0; \rho)$ (dans la théorie des perturbations par rapport aux gradients spatiaux) de ρ. En posant dans (4.2.30) $\rho = w(Y(x'))$, on obtient

$$\zeta_\alpha(x; Y(x')) = \mathrm{Sp}\, w(Y(x'))\hat{\zeta}_\alpha(x) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{Sp}\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau} \left\{ w(Y(x')) - \sigma_0(\zeta(x'; Y(x''))) \right\} e^{-i\mathscr{H}_0\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(x). \quad (4.2.31)$$

Il est évident que cette équation est équivalente à la relation (4.2.21).

Nous allons montrer maintenant comment on peut élaborer la théorie des perturbations par rapport aux gradients des densités $\zeta_\alpha(x)$. Remarquons à cet effet que

$$e^{iPx} w(Y(x'))\, e^{-iPx} = w(Y(x + x')), \quad (4.2.32)$$

où P est l'opérateur de l'impulsion du système. C'est pourquoi, en utilisant (4.2.32), (2.2.34), on a en vertu de (4.2.29)

$$e^{iPx} \sigma_0(\zeta(x'))\, e^{-iPx} = \sigma_0(\zeta(x + x')). \quad (4.2.33)$$

Supposons qu'il y a lieu de calculer la valeur moyenne d'un certain opérateur $a(x)$ quasi local invariant par rapport à la translation, c'est-à-dire la grandeur $\mathrm{Sp}\, \sigma_0(\zeta(x'))\, a(x)$. En vertu de la formule (4.2.33), on peut récrire cette grandeur sous la forme suivante:

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0(\zeta(x'))\,a(x) = \mathrm{Sp}\,\sigma_0(\zeta(x'+x))\,a(0).$$

La dernière expression contient l'opérateur $a(x)$ au point $x = 0$, c'est pourquoi, lors du calcul de la trace, seules entreront en ligne de compte les valeurs de $\zeta(x + x')$ pour $x' \approx 0$, de telle sorte qu'on peut utiliser le développement

$$\zeta(x+x') = \zeta(x) + x'_k \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x_k} + \ldots,$$

auquel correspond le développement de l'opérateur statistique grossier en série suivant les gradients des densités

$$\begin{gathered}\sigma_0(\zeta(x'+x)) = \sigma_0^{(0)}(x) + \sigma_0^{(1)}(x) + \ldots,\\ \sigma_0^{(0)}(x) = \sigma_0(\zeta(x'))\big|_{\zeta(x')\to\zeta(x)},\\ \sigma_0^{(1)}(x) = \frac{\partial \zeta_\alpha(x)}{\partial x_k}\int d^3x'\,x'_k\,\frac{\delta\sigma_0(\zeta(x''))}{\delta\zeta_\alpha(x')}\bigg|_{\zeta(x'')\to\zeta(x)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{4.2.34}$$

Comme $\mathrm{Sp}\,\sigma_0(\zeta(x+x'))\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(x)$, les termes du développement $\sigma_0^{(k)}(x)$ satisfont aux relations

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(k)}(x)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \delta_{k0}\zeta_\alpha(x). \tag{4.2.35}$$

Pour trouver les opérateurs $\sigma_0^{(0)}(x)$, $\sigma_0^{(1)}(x)$, ... à partir de l'équation intégrale (4.2.29), nous allons développer l'opérateur $w(Y(x + x'))$ en série suivant les puissances des gradients $Y_\alpha(x)$

$$w(Y(x+x')) = w^{(0)}(x) + w^{(1)}(x) + \ldots \tag{4.2.36}$$

Compte tenu du développement opératoriel de $\exp(A + B)$ suivant les puissances de B

$$\exp(A+B) = e^A\left\{1 + \int_0^1 d\lambda\, e^{-\lambda A} B e^{\lambda A} + \ldots\right\},$$

on trouve

$$\begin{gathered}w^{(0)}(x) = \exp\{\Omega^{(0)}(x) - Y_\alpha(x)\,\hat{\gamma}_\alpha\},\\ w^{(1)}(x) = -\frac{\partial Y_\alpha(x)}{\partial x_j}\,w^{(0)}\int_0^1 d\lambda\int d^3x'\,x'_j\,(\hat{\zeta}_\alpha(x',\lambda) - \langle\zeta_\alpha\rangle),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{4.2.37}$$

où on a utilisé les désignations $a(x', \lambda) = w^{(0)-\lambda} a(x')\, w^{(0)\lambda}$, $\langle a\rangle = \mathrm{Sp}\, w^{(0)}a$. Remarquons que $w^{(0)}(x)$ coïncide avec $\rho^{(0)}(\gamma)$ si dans l'expression pour $\rho^{(0)}(\gamma)$, à la place de Y_α, on prend $Y_\alpha(x)$.

En utilisant maintenant l'équation intégrale (4.2.29) et la relation (4.2.35), il est facile de trouver les termes du développement $\sigma_0^{(k)}(x)$ de l'opérateur statistique grossier en série suivant les gra-

dients des densités $\zeta_\alpha(x)$. Le premier terme du développement est de toute évidence de la forme

$$\sigma_0^{(0)}(x) = w^{(0)}(x), \tag{4.2.38}$$

où $\Omega^{(0)}(x)$ et $Y_\alpha(x)$ sont déterminés à partir des équations

$$\operatorname{Sp} w^{(0)}(x) = 1, \quad \operatorname{Sp} w^{(0)}(x)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(x). \tag{4.2.39}$$

Remarquons que $[\mathscr{H}_0, w^{(0)}] = 0$ et qu'en vertu de (4.2.37) on a

$$[\mathscr{H}_0, w^{(1)}(x)] = -i\frac{\partial Y_\alpha(x)}{\partial x_k} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \cdot \int d^3x' x'_k \frac{\partial}{\partial x'_l} \hat{\zeta}_{\alpha l}(x', \lambda),$$

par conséquent,

$$[\mathscr{H}_0, w^{(1)}(x)] = i\frac{\partial Y_\alpha(x)}{\partial x_k} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x' (\hat{\zeta}_{\alpha k}(x', \lambda) - \langle\zeta_{\alpha k}\rangle)$$

(en intégrant par parties, nous avons utilisé le principe d'affaiblissement des corrélations). En utilisant ces formules, ainsi que les relations (4.2.36), (4.2.37), on trouve à partir des équations (4.2.29) [93]

$$\sigma_0^{(1)}(x) = w^{(1)}(x) - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \operatorname{Sp} w^{(1)}(x)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} d\tau \int_0^1 d\lambda \int d^3x' \left\{ \frac{\partial Y_\alpha(x)}{\partial x_j} w^{(0)}(x)\, e^{i\mathscr{H}_0\tau} (\hat{\zeta}_{\alpha j}(x', \lambda) - \right.$$

$$\left. - \langle\zeta_{\alpha j}\rangle)\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \langle\zeta_{\alpha l}\rangle}{\partial x_j} \right\}, \tag{4.2.40}$$

où $Y_\alpha(x)$ sont comme auparavant liés à $\zeta_\alpha(x)$ par les formules (4.2.39). (Remarquons que le terme $\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \operatorname{Sp} w^{(1)} \hat{\zeta}_\alpha$, dans (4.2.40), est apparu par suite de la détermination réitérée des grandeurs $Y_\alpha(x)$ conformément à (4.2.35), $\operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)}(x)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = 0$.) On peut récrire cette expression d'une manière plus simple si on utilise la relation

$$\frac{\partial \langle\zeta_{\alpha k}\rangle}{\partial Y_\beta} = \frac{\partial \langle\zeta_{\beta k}\rangle}{\partial Y_\alpha} \tag{4.2.41}$$

que nous démontrerons un peu plus loin. Remarquant que $\partial Y_\alpha/\partial\zeta_\beta = \partial Y_\beta/\partial\zeta_\alpha$ et en utilisant (4.2.41), on obtient:

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \langle\zeta_{\alpha j}\rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_\delta}{\partial x_j} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle\zeta_{\delta j}\rangle}{\partial \zeta_\alpha}.$$

C'est pourquoi

$$\sigma_0^{(1)}(x) = w^{(1)}(x) - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \operatorname{Sp} w^{(1)}(x)\, \hat{\zeta}_\alpha(0) + \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} w^{(0)}, \quad (4.2.42)$$

$$\int_{-\infty}^{0} d\tau \int d^3x \int_0^1 d\lambda\, e^{i\mathcal{H}_0\tau} (\hat{\zeta}'_{\alpha j}(x', \lambda) - \langle \zeta'_{\alpha j}\rangle)\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

où

$$\hat{\zeta}'_{\alpha j}(x) = \hat{\zeta}_{\alpha j}(x) - \frac{\partial \langle \zeta_{\alpha j}\rangle}{\partial \zeta_\beta} \hat{\zeta}_\beta(x).$$

Les équations du mouvement pour les densités $\zeta_\alpha(x)$ aux termes quadratiques par rapport aux gradients près, peuvent s'écrire en vertu de (4.2.24) comme suit

$$\begin{gathered} \dot{\zeta}_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \zeta_{\alpha k}(x), \\ \zeta_{\alpha k}(x) = \operatorname{Sp} \sigma_0^{(0)}(x)\, \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) + \operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)}(x)\, \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) + \ldots \end{gathered} \quad (4.2.43)$$

Nous utiliserons ces équations dans le chapitre 6 pour déduire les équations de l'hydrodynamique.

Nous avons montré comment on peut trouver le développement de $\sigma_0(\zeta)$ en série suivant les puissances des gradients des densités $\zeta_\alpha(x)$. Pour donner une définition complète de l'opérateur statistique grossier $\sigma_0(\zeta(x', t; \rho))$, il y a lieu de trouver ζ_α en fonction de l'opérateur statistique initial ρ. Nous allons supposer que cet opérateur a la structure suivante:

$$\rho = \exp\left\{\Omega - \int d^3x C_\alpha(x)\, \hat{a}_\alpha(x)\right\}, \quad (4.2.44)$$

où $\hat{a}_\alpha(x)$ sont des opérateurs quasi locaux arbitraires et $C_\alpha(x)$ des fonctions c-numériques variant lentement. (Comme nous l'avons vu dans 2.4.1, cette structure correspond à ce que ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations.) A partir du développement (4.2.34) et de l'équation (4.2.30), on peut à l'aide de cette formule trouver le développement des densités $\zeta(x, 0; \rho)$ en série suivant les gradients des fonctions $C_\alpha(x)$. Les équations du mouvement (4.2.43) permettent alors de trouver $\zeta(x, t; \rho)$ et par là même l'opérateur statistique grossier. Nous reviendrons au problème de la recherche de $\zeta(x, 0; \rho)$ dans le § 4.4 lors de l'étude de l'expression asymptotique de la fonction de Green.

Remarquons que tout comme dans le cas homogène (voir la fin du paragraphe 4.2.1), les grandeurs $\zeta(x, t; \rho)$ coïncident avec les valeurs réelles des densités $\zeta(x, t)$ seulement pour $t \gg \tau_0$, quant aux grandeurs $\zeta(x, 0; \rho)$, elles sont nécessaires à la restitution de la dépendance de l'opérateur statistique grossier de l'état initial.

Pour conclure ce paragraphe, nous allons démontrer la relation (4.2.41). Remarquant que

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial Y_\alpha} = -w^{(0)} \int d^3x \int_0^1 d\lambda \left(\hat{\zeta}_\alpha(x, \lambda) - \langle\hat{\zeta}_\alpha\rangle\right),$$

on a

$$\frac{\partial \langle\zeta_{\beta k}\rangle}{\partial Y_\alpha} = -\operatorname{Sp} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x \left(\hat{\zeta}_\alpha(0, \lambda) - \langle\hat{\zeta}_\alpha\rangle\right) \hat{\zeta}_{\beta k}(-x).$$

Comme (voir (4.2.20)) on a $\zeta_{\beta k}(-x) = \frac{\partial}{\partial x_s} x_k \hat{\zeta}_{\beta s}(-x) - ix_k \times$ $\times [\mathscr{H}_0, \hat{\zeta}_\beta(-x)]$, on obtient compte tenu du principe d'affaiblissement des corrélations

$$\frac{\partial \langle\zeta_{\beta k}\rangle}{\partial Y_\alpha} = \operatorname{Sp} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x \left(\hat{\zeta}_\alpha(x, \lambda) - \langle\hat{\zeta}_\alpha\rangle\right) i\, [\mathscr{H}_0, \hat{\zeta}_\beta(0)]\, x_k.$$

En intervertissant les opérateurs sous le signe de la trace et en utilisant de nouveau la relation (4.2.20), on peut écrire cette expression sous la forme

$$\frac{\partial \langle\zeta_{\beta k}\rangle}{\partial Y_\alpha} = \operatorname{Sp} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x \frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha l}(x, \lambda)}{\partial x_l} x_k \hat{\zeta}_\beta(0).$$

En intégrant par parties et en tenant compte du principe d'affaiblissement des corrélations on trouve

$$\frac{\partial \langle\zeta_{\beta k}\rangle}{\partial Y_\alpha} = -\operatorname{Sp} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x\, \hat{\zeta}_{\alpha k}(x, \lambda) \left(\hat{\zeta}_\beta(0) - \langle\hat{\zeta}_\beta\rangle\right),$$

ce qui donne la relation (4.2.41).

La formule (4.2.41) montre que les grandeurs $\langle\zeta_{\alpha k}\rangle$ peuvent s'écrire comme suit

$$\langle\zeta_{\alpha k}\rangle = \frac{1}{\mathscr{V}} \frac{\partial \Omega_k}{\partial Y_\alpha}, \tag{4.2.45}$$

où Ω_k est une certaine fonction des forces thermodynamiques. Cette formule est analogue à la formule suivante

$$\langle\zeta_\alpha\rangle = \frac{1}{\mathscr{V}} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_\alpha}.$$

C'est pourquoi la grandeur $\mathcal{V}^{-1}\Omega_k$ peut être appelée *densité du flux du potentiel thermodynamique* $\mathcal{V}^{-1}\Omega$. En plus de $\mathcal{V}^{-1}\Omega_k$, on peut introduire la densité du flux d'entropie, à savoir

$$s_k = -\mathcal{V}^{-1}\Omega_k + Y_\alpha \langle\zeta_{\alpha k}\rangle. \tag{4.2.46}$$

Cette formule est analogue à la formule pour la densité de l'entropie

$$s = -\mathcal{V}^{-1}\Omega + Y_\alpha \langle\zeta_\alpha\rangle.$$

Compte tenu seulement des termes linéaires par rapport aux gradients, dans les équations du mouvement (4.2.43)

$$\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial\zeta_{\alpha k}^{(0)}}{\partial x_k}, \quad \zeta_{\alpha k}^{(0)} = \langle\hat{\zeta}_{\alpha k}\rangle = \operatorname{Sp} w^{(0)}\hat{\zeta}_{\alpha k}(0),$$

on a la relation

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0, \tag{4.2.47}$$

qui représente la condition d'adiabaticité des processus se déroulant dans le système.

4.2.3. Equation intégrale pour l'opérateur statistique des systèmes hétérogènes compte tenu des interactions faibles. Dans le paragraphe précédent nous avons envisagé des processus de relaxation dans les systèmes faiblement non homogènes et nous avons vu que l'étape finale de l'évolution d'un état non homogène sera un état spatialement homogène décrit par l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\gamma)$. Dans le cas général, cet opérateur ne coïncide pas avec l'opérateur statistique de Gibbs à l'équilibre caractérisé seulement par l'énergie, l'impulsion et le nombre de particules du système, alors que parmi les paramètres γ déterminant l'opérateur $\rho^{(0)}(\gamma)$ on peut trouver d'autres intégrales additives du mouvement liées au hamiltonien $\mathcal{H}_0$. Pour qu'on puisse avoir dans le système un équilibre statistique complet, il est indispensable de tenir compte des interactions supplémentaires ne figurant pas dans le hamiltonien $\mathcal{H}_0$. Si l'on en tient compte, le système n'aura aucune intégrale additive du mouvement supplémentaire à part l'énergie, l'impulsion et le nombre de particules, et l'état d'équilibre statistique décrit par la distribution de Gibbs sera atteint.

Ainsi on voit apparaître le problème de la recherche de l'opérateur statistique d'un système faiblement non homogène en présence d'interactions faibles ne figurant pas dans $\mathcal{H}_0$ qui sont décrites par le hamiltonien V. C'est ce que nous allons étudier dans le présent paragraphe.

L'état du système pour des temps suffisamment grands sera comme auparavant décrit par l'opérateur statistique qui ne dépend du temps et de l'état initial que par l'intermédiaire des densités $\zeta_\alpha(x)$. Nous désignerons cet opérateur par $\sigma(\zeta(x'))$. Il est évident que la varia-

tion des densités $\zeta_\alpha(x)$ dans le temps sera donnée non seulement par les gradients des densités, mais également par le hamiltonien faible V. En conséquence, on aura la relation asymptotique suivante:

$$e^{-i\mathscr{H}t}\rho e^{i\mathscr{H}t} \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \sigma(\zeta(x', t; \rho)), \tag{4.2.48}$$

où $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V$ et la grandeur τ_0 est comme auparavant déterminée par le hamiltonien $\mathscr{H}_0$. Le problème revient à trouver la fonctionnelle opératorielle $\sigma(\zeta(x'))$ et la dépendance des densités $\zeta_\alpha(x, t; \rho)$ vis-à-vis de t et de ρ.

Tout comme dans le paragraphe précédent, l'opérateur statistique grossier $\sigma(\zeta(x'))$ satisfait à la relation

$$\operatorname{Sp}\sigma(\zeta(x'))\,\hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x) \tag{4.2.49}$$

et à l'équation

$$e^{-i\mathscr{H}\tau}\sigma(\zeta(x', t; \rho))e^{i\mathscr{H}\tau} = \sigma(\zeta(x', t+\tau; \rho)) \tag{4.2.50}$$

avec de plus, comme auparavant

$$\zeta_\alpha(x, t+\tau; \rho) = \zeta_\alpha(x, t; e^{-i\mathscr{H}\tau}\rho e^{i\mathscr{H}\tau}). \tag{4.2.51}$$

En dérivant (4.2.50) par rapport à τ et en posant $\tau = 0$, on obtient une équation fonctionnelle pour $\sigma(\zeta(x'))$, à savoir

$$-i[\mathscr{H}, \sigma(\zeta(x'))] = \int d^3x\, \frac{\delta\sigma(\zeta(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta(x')), \tag{4.2.52}$$

où

$$L_\alpha(x; \zeta(x')) = i\operatorname{Sp}\sigma(\zeta(x'))[\mathscr{H}, \hat{\zeta}_\alpha(x)], \quad \dot{\zeta}_\alpha(x) = L_\alpha(x; \zeta(x')) \tag{4.2.53}$$

(tout comme dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé la désignation $\zeta_\alpha(x) \equiv \zeta_\alpha(x, t; \rho)$). La grandeur L_α peut en vertu de (3.2.19) s'écrire comme

$$L_\alpha(x; \zeta(x')) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{Sp}\sigma(\zeta(x'))\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(x) + i\operatorname{Sp}\sigma(\zeta(x'))[V, \zeta_\alpha(x)]. \tag{4.2.54}$$

Le développement de l'opérateur statistique $\sigma(\zeta(x'))$, suivant les gradients des densités $\zeta_\alpha(x)$ se fait d'après les formules (4.2.34) dans lesquelles il y a lieu de remplacer $\sigma_0(\zeta(x'))$ par l'opérateur $\sigma(\zeta(x'))$ (de plus il ne faut pas oublier que le hamiltonien de l'interaction V commute avec l'opérateur de l'impulsion $\boldsymbol{P}$).

Nous allons maintenant trouver l'équation intégrale pour $\sigma(\zeta(x'))$ qui permet d'obtenir les termes du développement $\sigma(\zeta(x'))$ suivant

les puissances de l'interaction V et des gradients des densités $\zeta_\alpha(x)$. Conformément à (4.2.18), on a les relations:

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma(\zeta(x'))\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\sigma_0(\zeta^0(x',\tau;\sigma)),$$

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}w(Y(x'))\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\sigma_0(\zeta^0(x',\tau;w)),$$

où $\zeta^0(x, t;\rho)$ coïncident avec les fonctions $\zeta(x, t;\rho)$ introduites au paragraphe précédent. Nous allons choisir les fonctions $Y_\alpha(x)$ de telle sorte que les relations

$$\zeta^0_\alpha(x, 0;\ \sigma(\zeta(x'))) = \zeta^0_\alpha(x, 0;\ w(Y(x')))$$

soient vérifiées. On aura alors l'égalité asymptotique suivante

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\{\sigma(\zeta(x'))-w(Y(x'))\}\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0.$$

D'un autre côté, le premier membre de cette égalité s'écrira comme

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\{\sigma(\zeta(x'))-w(Y(x'))\}\,e^{i\mathscr{H}_0\tau}=\sigma(\zeta(x'))-w(Y(x'))-$$
$$-i\int_0^\tau d\tau' e^{-i\mathscr{H}_0\tau'}[\mathscr{H}_0,\sigma(\zeta(x'))-w(Y(x'))]\,e^{i\mathscr{H}_0\tau'}.$$

Donc

$$\sigma(\zeta(x'))=w(Y(x'))+$$
$$+i\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}[\mathscr{H}_0,\sigma(\zeta(x'))-w(Y(x'))]\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}.$$

A partir de (4.2.52), on obtient finalement l'équation suivante pour la définition de $\sigma(\zeta(x'))$ [90, 98]:

$$\sigma(\zeta(x'))=w(Y(x'))-\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}\Big\{i[\mathscr{H}_0,w(Y(x'))]+$$
$$+i[V,\sigma(\zeta(x'))]+\int d^3x\frac{\delta\sigma(\zeta(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)}L_\alpha(x;\zeta(x'))\Big\}e^{-i\mathscr{H}_0\tau},\qquad(4.2.55)$$

où $L_\alpha(x;\ \zeta(x'))$ est donné par la formule (4.2.54) et la relation entre l'argument fonctionnel $\zeta_\alpha(x)$ et l'argument fonctionnel $Y_\alpha(x)$ est donnée par la formule

$$\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta(x'))\,\hat{\zeta}_\alpha(x)=\zeta_\alpha(x).\qquad(4.2.56)$$

Le terme intégral dans (4.2.55) est petit, car il contient des termes proportionnels soit à V, soit aux gradients des densités. C'est pourquoi l'équation (4.2.55) permet de développer facilement la théorie des perturbations pour trouver $\sigma(\zeta(x'))$.

Nous allons trouver maintenant les paramètres $\zeta_\alpha(x, 0; \rho)$ en fonction de la valeur initiale de l'opérateur statistique ρ. A cet effet remarquons qu'en vertu de la relation asymptotique (4.2.48) on a

$$\sigma(\zeta(x', 0; \rho)) = \rho + i\int_0^\infty d\tau\,[\mathcal{H}, e^{-i\mathcal{H}\tau}\{\sigma(\zeta(x', 0; \rho)) - \rho\}e^{i\mathcal{H}\tau}].$$

d'où en remarquant que $\zeta_\alpha(x, 0; \rho) = \mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta(x', 0; \rho))\,\hat{\zeta}_\alpha(x)$ on a

$$\zeta_\alpha(x, 0; \rho) = \\ = \mathrm{Sp}\,\rho\hat{\zeta}_\alpha(x) + \int_{-\infty}^0 d\tau\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}\,e^{i\mathcal{H}\tau}(\sigma(\zeta(x', 0; \rho)) - \rho)\,e^{-i\mathcal{H}\tau}\hat{\zeta}_{\alpha k}(x) - \right. \\ \left. - i\,\mathrm{Sp}\,e^{i\mathcal{H}\tau}(\sigma(\zeta(x', 0; \rho)) - \rho)\,e^{-i\mathcal{H}\tau}[V, \hat{\zeta}_\alpha(x)]\right\}. \qquad (4.2.57)$$

Cette relation a la « mémoire » de l'état initial de l'opérateur statistique ρ et permet, connaissant la série de la théorie des perturbations pour $\sigma(\zeta(x'))$ donnée par l'équation (4.2.55) et le développement de ρ par rapport aux gradients, de trouver la série de la théorie des perturbations pour $\zeta_\alpha(x, 0; \rho)$.

Les équations (4.2.55), (4.2.57) deviennent, de toute évidence, les équations (4.2.29), (4.2.30) pour $V = 0$. Par contre, si dans les équations (4.2.55), (4.2.57) on suppose les gradients des densités nuls, on obtient les équations (4.2.11), (4.2.17) pour l'opérateur statistique d'un système spatialement homogène (pour $a_{\alpha\beta} = 0$) *).

Dans les chapitres suivants nous utiliserons les équations (4.2.55), (4.2.29) pour la description des étapes cinétique et hydrodynamique de l'évolution d'un système non homogène. On voit alors que les équations (4.2.55), (4.2.53) pour l'étape cinétique de l'évolution peuvent se réduire du point de vue formel aux équations (4.2.29) dans lesquelles les coefficients $a_{\alpha\beta}$ diffèrent de zéro par suite de la présence d'une non-homogénéité spatiale du système.

Nous avons vu que l'opérateur statistique grossier $\sigma(\zeta(x', t; \rho))$ dépend de la valeur initiale de l'opérateur statistique ρ seulement par les densités $\zeta_\alpha(x, t; \rho)$. En introduisant les désignations

$$\sigma\{\rho\} \equiv \sigma(\zeta(x', 0; \rho))$$

et en utilisant (4.2.50), (4.2.51), on peut écrire $\sigma(\zeta(x', t; \rho))$ sous la forme

$$\sigma(\zeta(x', t; \rho)) = \sigma\{e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t}\}. \qquad (4.2.58)$$

---

*) Une méthode un peu différente d'étude des processus de relaxation, basée sur l'analogie existant entre la théorie de la dispersion et les solutions asymptotiques de l'équation de Liouville, a été donnée dans les ouvrages de Zoubarev [59] et de Zoubarev et Kalachnikov [60]. L'utilisation de l'opérateur statistique du système tout entier lors de l'étude des processus de relaxation dans les substances magnétiques a été proposée dans les travaux de Provotorov [100].

Cette relation peut être interprétée comme suit. Si ρ est l'opérateur statistique à l'instant initial, $e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t}$ sera alors l'opérateur statistique exact à l'instant t. C'est pourquoi la relation (4.2.58) montre que le symbole σ peut être considéré comme un certain opérateur dit « opérateur de grossièreté » agissant dans l'espace des opérateurs statistiques (et non dans l'espace hilbertien des vecteurs d'état) et transformant les opérateurs statistiques exacts en opérateurs statistiques grossiers.

Nous allons montrer qu'on a la relation

$$\sigma\{\sigma\{\rho\}\} = \sigma\{\rho\} \tag{4.2.59}$$

ou sous forme abrégée

$$\sigma^2 = \sigma.$$

En d'autres termes « l'opérateur de grossièreté » a les propriétés de l'opérateur de projection *). Pour obtenir cette relation, notons qu'en vertu de (4.2.48) on a

$$e^{-i\mathcal{H}t}\sigma\{\rho\}e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \sigma(\zeta(x', t; \sigma\{\rho\})).$$

D'un autre côté, pour t quelconques on a la relation

$$e^{-i\mathcal{H}t}\sigma\{\rho\}e^{i\mathcal{H}t} = \sigma(\zeta(x', t; \rho)),$$

et comme $\sigma(\zeta(x', t; \rho))$ est déjà l'opérateur statistique asymptotique, la relation

$$\sigma(\zeta(x', t; \sigma\{\rho\})) = \sigma(\zeta(x', t; \rho))$$

est vraie pour t quelconques. La formule (4.2.59) découle de cette formule ainsi que de la définition de $\sigma\{\rho\}$.

Pour conclure ce paragraphe, il y a lieu de remarquer que les équations du mouvement obtenues ici pour les grandeurs $\zeta_\alpha(x, t)$ sont locales par rapport au temps, tout comme sont locales les équations cinétiques dans le cas classique (voir §§ 1.2, 1.3). Cependant, il faut avoir en vue que leur forme locale dans le temps ne signifie pas une simplification quelconque, car elle tient entièrement compte des effets de mémoire sous forme de développement suivant un paramètre petit qui existe toujours dans la description simplifiée.

§ 4.3. Sommation des termes séculaires

4.3.1. Opérateurs asymptotiques. Dans les paragraphes précédents nous avons supposé qu'après un temps suffisamment long la description de l'état du système se trouve simplifiée, par conséquent, l'opérateur statistique devient une fonctionnelle de certains paramètres bien déterminés donnés par le hamiltoni-

*) Balescu [14] a obtenu une relation du type (4.2.59) en déduisant la « master equation ».

en $\mathcal{H}_0$ et englobant un grand nombre de grandeurs ; suivant la structure du hamiltonien $\mathcal{H}_0$, ces grandeurs peuvent être : la fonction de distribution à une particule, les grandeurs hydrodynamiques, etc.

Maintenant, sur l'exemple des systèmes spatialement homogènes (que nous avons envisagés dans 4.2.1), nous allons voir comment apparaît une telle relation fonctionnelle. En d'autres termes, nous allons montrer comment, par suite de l'évolution d'un système de hamiltonien total $\mathcal{H}$, s'établit la relation asymptotique (4.2.2)

$$\rho(\tau) \equiv e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau \gg \tau_0]{} \sigma(\gamma(\tau;\ \rho)).$$

Pour plus de simplicité, nous allons supposer que $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = 0$.

En supposant comme précédemment que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ on développe l'opérateur $\rho(\tau)$ en série suivant les puissances de V:

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n, \tag{4.3.1}$$

où le n-ième terme de la série est déterminé par la formule

$$\{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n =$$
$$= (-i)^n e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \int_0^\tau d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, [V(\tau_1) \ldots [V(\tau_n), \rho] \ldots] \, e^{i\mathcal{H}_0\tau}$$

et $V(\tau) = \exp(i\mathcal{H}_0\tau) V \exp(-i\mathcal{H}_0\tau)$ est le hamiltonien de l'interaction dans la représentation de l'interaction. (Dans l'expression du type $\{e^{-i\mathcal{H}\tau} A e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n$ l'indice n désigne l'ordre de la théorie des perturbations liée au développement suivant les puissances de V de l'exponentielle $\exp(\pm i\mathcal{H}\tau)$ seulement, et non de l'opérateur A.)

Notre objectif principal est de trouver le comportement asymptotique dans le temps, pour $\tau \to \infty$, de l'opérateur $\{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n$ *). La formule (4.3.1) montre que dans le domaine des τ grands, des termes séculaires peuvent apparaître, ces termes croissent avec τ mais pas plus rapidement que τ^n. En d'autres termes

$$\{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n \xrightarrow[\tau \to \infty]{} \sum_{l=0}^{n} \tau^l \sigma_l^{(n)} \{\rho\}, \tag{4.3.2}$$

où $\sigma_l^{(n)}\{\rho\}$ sont des opérateurs fonctionnellement liés à ρ. Les opérateurs $\sigma_l^{(n)}\{\rho\}$, que nous appellerons *opérateurs asymptotiques*, sont proportionnels à la n-ième puissance de l'interaction. (Si $a_{\alpha\beta} \neq 0$, les opérateurs asymptotiques $\sigma_l^{(n)}$ seront des fonctions oscillatoires de τ [89].)

Nous allons supposer que la relation (4.3.2) détermine les opérateurs asymptotiques non seulement pour les opérateurs statistiques ρ satisfaisant au principe d'affaiblissement des corrélations, mais également pour la superposition de ces opérateurs. A partir de (4.3.2), on aura la relation

$$\sigma_l^{(n)} \{\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\} = \alpha_1 \sigma_l^{(n)} \{\rho_1\} + \alpha_2 \sigma_l^{(n)} \{\rho_2\},$$

où α_1, α_2 sont des nombres arbitraires. (Notons que le principe d'affaiblissement des corrélations étant non linéaire, la superposition des opérateurs statistiques qui satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations ne satisfait

*) Pour résoudre ce problème nous allons utiliser les ouvrages [89].

plus à ce principe.) Une telle extension du domaine de définition des opérateurs asymptotiques nous permettra d'effectuer des opérations sur l'argument ρ pour lesquelles le principe d'affaiblissement des corrélations peut ne pas être vérifié.

Notons maintenant, qu'en vertu de la relation ergodique (4.2.1) et de la définition (4.3.2), si ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, l'opérateur s'écrit

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho\} = \rho^{(0)}(\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}), \tag{4.3.3}$$

où $\rho^{(0)}(\gamma)$ est donné par la formule (2.4.29).

Nous allons voir certaines propriétés des opérateurs asymptotiques. Remarquant que

$$\{e^{-i\mathcal{H}(\tau+\tau')}\rho e^{i\mathcal{H}(\tau+\tau')}\}_n = \sum_{m=0}^{n} \{e^{-i\mathcal{H}\tau'}\{e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_m e^{i\mathcal{H}\tau'}\}_{n-m},$$

on a en vertu de (4.3.2)

$$A^{(n)}(\tau+\tau') = \sum_{m=0}^{n} \{e^{-i\mathcal{H}\tau'}A^{(m)}(\tau)e^{i\mathcal{H}\tau'}\}_{n-m},$$

où

$$A^{(n)}(\tau) = \sum_{l=0}^{n} \tau^l \sigma_l^{(n)}\{\rho\}.$$

En égalant dans cette formule, vraie de toute évidence pour τ et τ' quelconques (car $A^{(n)}(\tau)$ est un polynôme de τ), les coefficients de τ^l, on trouve

$$\sum_{m=0}^{n-l} \tau'^m C_{m+l}^l \sigma_{m+l}^{(n)}\{\rho\} = \sum_{m=l}^{n} \{e^{-i\mathcal{H}\tau'}\sigma_l^{(m)}\{\rho\}\, e^{i\mathcal{H}\tau'}\}_{n-m}. \tag{4.3.4}$$

Si $l = 0$, on a

$$\sum_{m=0}^{n} \tau^m \sigma_m^{(n)}\{\rho\} = \sum_{m=0}^{n} \{e^{-i\mathcal{H}\tau}\sigma_0^{(m)}\{\rho\}e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-m}. \tag{4.3.5}$$

En dérivant (4.3.4) par rapport à τ' et en posant $\tau' = 0$, on obtient

$$(l+1)\,\sigma_{l+1}^{(n)}\{\rho\} = -i\,[\mathcal{H}_0,\ \sigma_l^{(n)}\{\rho\}] - i\,[V,\ \sigma_l^{(n-1)}\{\rho\}]. \tag{4.3.6}$$

Cette formule montre que pour trouver $\sigma_l^{(n)}\{\rho\}$, il suffit de connaître $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$.

Nous allons introduire l'opérateur générateur (suivant l'indice n) $\sigma_l\{\rho\} = \sum_{n=l}^{\infty} \lambda^n \sigma_l^{(n)}\{\rho\}$ pour le système d'opérateurs asymptotiques $\sigma_l^{(n)}\{\rho\}$ ($n = l$, $l+1, \ldots$). Comme $\sigma_l^{(n)}\{\rho\}$ est proportionnel à V^n, on peut considérer que le paramètre λ entre dans V, et poser dans la suite $\lambda = 1$

$$\sigma_l\{\rho\} = \sum_{n=l}^{\infty} \sigma_l^{(n)}\{\rho\}. \tag{4.3.7}$$

En termes des opérateurs générateurs $\sigma_l\{\rho\}$ on peut récrire la formule (4.3.6) comme suit

$$\sigma_{l+1}\{\rho\} = -\frac{i}{l+1}\,[\mathcal{H},\ \sigma_l\{\rho\}]. \tag{4.3.8}$$

Comme $[\mathscr{H}, \exp(-i\mathscr{H}\tau)\rho\exp(i\mathscr{H}\tau)] = e^{-i\mathscr{H}\tau}[\mathscr{H}, \rho]e^{i\mathscr{H}\tau}$, on a

$$\{\mathscr{H}_0, \{e^{-i\mathscr{H}\tau}\rho e^{i\mathscr{H}\tau}\}_n] + [V, \{e^{-i\mathscr{H}\tau}\rho e^{i\mathscr{H}\tau}\}_{n-1}] =$$
$$= \{e^{-i\mathscr{H}\tau}[\mathscr{H}_0, \rho]e^{i\mathscr{H}\tau}\}_n + \{e^{-i\mathscr{H}\tau}[V, \rho]e^{i\mathscr{H}_0\tau}\}_{n-1}$$

et par conséquent

$$[\mathscr{H}_0, \sigma_l^{(n)}\{\rho\}] + [V, \sigma_l^{(n-1)}\{\rho\}] = \sigma_l^{(n)}\{[\mathscr{H}_0, \rho]\} + \sigma_l^{(n-1)}\{[V, \rho]\}.$$

A partir de la définition de l'opérateur générateur $\sigma_l\{\rho\}$ on en déduit

$$[\mathscr{H}, \sigma_l\{\rho\}] = \sigma_l\{[\mathscr{H}, \rho]\}. \qquad (4.3.9)$$

Dans ce qui suit nous allons montrer que la recherche des opérateurs asymptotiques $\sigma_l^{(n)}\{\rho\}$ pour ρ quelconque revient à leur recherche pour un choix spécial de ρ, à savoir pour $\rho = \rho^{(0)}(\gamma)$. A cet effet on introduit la désignation

$$\sigma_l^{(n)}(\gamma) = \sigma_l^{(n)}\{\rho^{(0)}(\gamma)\}, \qquad \sigma_l(\gamma) = \sigma_l\{\rho^{(0)}(\gamma)\}. \qquad (4.3.10)$$

A partir de (4.3.3), on a

$$\sigma_0^{(0)}(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma). \qquad (4.3.11)$$

Nous allons montrer que $\sigma_0(\gamma)$ est lié à $\rho^{(0)}(\gamma)$ et $\sigma_0\{\rho\}$ par la relation

$$\sigma_0(\gamma) = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}([V, \sigma_0(\gamma)] - \sigma_0\{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\})e^{-i\mathscr{H}_0\tau}. \quad (4.3.12)$$

A cet effet remarquons qu'on a l'identité

$$e^{-i\mathscr{H}\tau}\sigma_0^{(0)}(\gamma)e^{i\mathscr{H}\tau} = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i\int_0^{\tau} d\tau' e^{-i\mathscr{H}\tau'}[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]e^{i\mathscr{H}\tau'},$$

d'où

$$\{e^{-i\mathscr{H}\tau}\rho^{(0)}(\gamma)e^{i\mathscr{H}\tau}\}_n =$$
$$= \sigma_0^{(0)}(\gamma)\delta_{n0} - i\int_0^{\tau} d\tau'\Big(\{e^{-i\mathscr{H}\tau'}[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]e^{i\mathscr{H}\tau'}\}_{n-1} -$$
$$-\sum_{l=0}^{n-1}\tau'^l\sigma_l^{(n-1)}\{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}\Big) + i\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\tau^{l+1}}{l+1}\sigma_l^{(n-1)}\{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}. \quad (4.3.13)$$

En vertu de (4.3.2), l'intégrale figurant dans cette formule converge pour $\tau\to\infty$. C'est pourquoi, en remarquant que

$$\{e^{-i\mathscr{H}\tau}\rho^{(0)}(\gamma)e^{i\mathscr{H}\tau}\}_n \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \sum_{l=0}^{n}\tau^l\sigma_l^{(n)}(\gamma)$$

et en égalant dans (4.3.13) les coefficients des mêmes puissances de τ, on obtient

$$\sigma_0^{(n)}(\gamma) = -i \int_0^\infty d\tau \left(\{e^{-i\mathcal{H}\tau} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \tau^l \sigma_l^{(n-1)} \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\} \right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.3.14}$$

$$\sigma_l^{(n)}(\gamma) = -\frac{i}{l} \sigma_{l-1}^{(n-1)} \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}, \quad n = l, l+1, \ldots \tag{4.3.15}$$

(Remarquons que la formule (4.3.15) est une conséquence de (4.3.8), (4.3.9).) En utilisant (4.3.5), on peut récrire la formule (4.3.14) comme suit

$$\sigma_0^{(n)}(\gamma) = -i \int_0^\infty d\tau \left(\{e^{-i\mathcal{H}\tau} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1} - \sum_{m=0}^{n-1} \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \sigma_0^{(m)} \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\} e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1-m} \right)$$

ou

$$\sigma_0(\gamma) = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mathcal{H}\tau} ([V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] - \sigma_0 \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}) e^{i\mathcal{H}\tau}. \tag{4.3.16}$$

On peut ramener cette équation à la forme (4.3.12) en utilisant le fait que pour l'opérateur B, dont la structure est

$$B = \int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{H}\tau} A e^{i\mathcal{H}\tau}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V \tag{4.3.17}$$

(A étant un opérateur arbitraire, $\eta > 0$), on a l'équation intégrale

$$B = \int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \{A - i[V, B]\} e^{i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{4.3.18}$$

Pour démontrer cette formule, on introduit la désignation

$$\mathcal{A}(\tau) = e^{i\mathcal{H}_0\tau} e^{-i\mathcal{H}\tau} A e^{i\mathcal{H}\tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}.$$

Il est alors facile de voir que l'opérateur $\mathcal{A}(\tau)$ satisfait à l'équation intégrale

$$\mathcal{A}(\tau) = A - i \int_0^\tau d\tau' [V(\tau'), \mathcal{A}(\tau')].$$

L'opérateur B défini par la formule (4.3.17) peut donc s'écrire sous la forme

$$B = \int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} \left\{ e^{-i\mathcal{H}_0\tau} A e^{i\mathcal{H}_0\tau} - i \int_{-\tau}^0 d\tau' [V(\tau'), e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \mathcal{A}(\tau+\tau') e^{i\mathcal{H}_0\tau}] \right\}.$$

En intervertissant l'ordre de l'intégration sur τ et τ'

$$B=\int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} A e^{i\mathcal{H}_0\tau} -$$

$$-i\int_{-\infty}^{0} d\tau' e^{\eta\tau'}\left[V(\tau'),\ \int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{H}_0(\tau-\tau')} \mathcal{A}(\tau)\, e^{i\mathcal{H}_0(\tau-\tau')}\right]$$

et en utilisant la définition (4.3.17) de l'opérateur B, on obtient la formule (4.3.18).

Compte tenu de (4.3.18), l'équation (4.3.16) peut s'écrire comme

$$\sigma_0(\gamma)=\sigma_0^{(0)}(\gamma)+\int_0^\infty d\tau e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\{-i[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]+$$

$$+i\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}-i[V,\ B]\}\, e^{i\mathcal{H}_0\tau}, \qquad (4.3.19)$$

où

$$B=-i\int_0^\infty d\tau e^{-i\mathcal{H}_0\tau}([V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]-\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\})\, e^{i\mathcal{H}\tau}=\sigma_0(\gamma)-\sigma_0^{(0)}(\gamma).$$

En substituant cette expression de B dans (4.3.19), on obtient la formule (4.3.12), en vertu de laquelle on a

$$\sigma_0^{(n)}(\gamma)=-i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}([V,\ \sigma_0^{(n-1)}(\gamma)]-\sigma_0^{(n-1)}\{[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\})\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \qquad (4.3.20)$$

Remarquons que l'équation (4.3.12) (ou (4.3.20)) n'est pas une équation intégrale fermée pour la détermination de $\sigma_0(\gamma)$, car elle contient l'opérateur inconnu $\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}$. Cependant, comme nous allons le montrer dans les paragraphes qui suivent, la grandeur $\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}$ peut s'exprimer en fonction de $\sigma_0(\gamma)$.

Pour trouver les opérateurs asymptotiques $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$ nous aurons besoin de la formule suivante:

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0\{\rho\}\,\hat{\gamma}=\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}-i\int_0^\infty d\tau\,\mathrm{Sp}\, e^{-i\mathcal{H}\tau}(\rho-\sigma_0\{\rho\})\, e^{i\mathcal{H}\tau}[\hat{\gamma},\ V]. \qquad (4.3.21)$$

Pour démontrer cette formule, remarquons que pour τ quelconques on a la relation

$$\mathrm{Sp}\,\rho(\tau)\,\hat{\gamma}=\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}-i\int_0^\tau d\tau'\,\mathrm{Sp}\,\rho(\tau')\,[\hat{\gamma},\ V],$$

où $\rho(\tau) = e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}$. En utilisant la formule (4.3.2) et en régularisant l'intégrale tout comme lors de la démonstration de la formule (4.3.16), on obtient:

$$\sum_{l=0}^{n} \tau^l \operatorname{Sp} \sigma_l^{(n)}\{\rho\}\hat{\gamma} = \delta_{n0} \operatorname{Sp} \rho\hat{\gamma} - i\int_0^\infty d\tau \operatorname{Sp}[\hat{\gamma}, V]\left(\{e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \tau^l \sigma_l^{(n-1)}\{\rho\}\right) - i\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\tau^{l+1}}{l+1} \operatorname{Sp}[\hat{\gamma}, V]\,\sigma_l^{(n-1)}\{\rho\}.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de τ, on trouve

$$\operatorname{Sp} \sigma_0^{(n)}\{\rho\}\hat{\gamma} = \operatorname{Sp} \rho\hat{\gamma} - i\int_0^\infty d\tau \operatorname{Sp}[\hat{\gamma}, V]\left(\{e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \tau^l \sigma_l^{(n-1)}\{\rho\}\right),$$

d'où, à partir de (4.3.5), (4.3.7), on obtient la formule (4.3.21).

4.3.2. Equation fonctionnelle pour les opérateurs asymptotiques. Nous allons montrer maintenant que les opérateurs asymptotiques $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$ satisfont à l'équation fonctionnelle suivante

$$\sum_{n=0}^{m} \sigma_0^{(m-n)}\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\} = \sigma_0^{(m)}\{\rho\}. \tag{4.3.22}$$

Compte tenu du principe d'affaiblissement des corrélations pour ρ, cette équation permet d'exprimer $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$ en fonction de $\sigma_L^{(n)}(\gamma)$.

Pour démontrer (4.3.22), nous allons nous référer à l'équation (4.3.5). En passant dans le second membre de (4.3.5) dans le domaine asymptotique $\tau \to \infty$ et en utilisant (4.3.2), on obtient:

$$\sum_{m=0}^{n} \tau^m \sigma_m^{(n)}\{\rho\} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-m} \tau^l \sigma_l^{(n-m)}\{\sigma_0^{(m)}\{\rho\}\},$$

d'où

$$\sigma_m^{(n)}\{\rho\} = \sum_{l=0}^{n-m} \sigma_m^{(n-l)}\{\sigma_0^{(l)}\{\rho\}\}.$$

En posant ici $m = 0$, on arrive à la formule (4.3.22).

En utilisant l'opérateur $\sigma_0\{\rho\}$, on peut écrire la formule (4.3.22) comme suit:

$$\sigma_0\{\sigma_0\{\rho\}\} = \sigma_0\{\rho\}. \tag{4.3.23}$$

Si ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations on a en vertu de (4.3.10), (4.3.7)

$$\sigma_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\}, \quad \gamma = \operatorname{Sp} \rho\hat{\gamma}. \tag{4.3.24}$$

Nous allons montrer qu'à partir de (4.3.24) on obtient la relation suivante

$$\sigma_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma(\rho)), \tag{4.3.25}$$

où $\gamma(\rho) = \mathrm{Sp}\,\sigma_0\{\rho\}\hat{\gamma}$ et $\sigma_0(\gamma)$ est donné par la formule (4.3.10).

Notons que la relation (4.3.25) n'est vraie que si ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations.

Nous allons vérifier la formule (4.3.25) en première approximation de la théorie des perturbations par rapport à V. En vertu de (4.3.24), on a

$$\sigma_0^{(1)}\{\rho\} = \sigma_0^{(1)}(\gamma) + \sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\}.$$

Nous allons montrer que le second terme dans le second membre de cette formule est égal à

$$\sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\} = \frac{\partial\sigma_0^{(0)}(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\,\hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}. \tag{4.3.26}$$

La formule (4.3.3) détermine l'opérateur asymptotique $\sigma_0^{(0)}\{\rho\}$ seulement pour les opérateurs ρ qui satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations. Entre temps, $\sigma_0^{(1)}\{\rho\}$ n'y satisfait pas. C'est pourquoi on ne peut pas utiliser directement la formule (4.3.3) pour trouver $\sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\}$. Cependant les opérateurs asymptotiques $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$ satisfont aux relations

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\,a(x)\,b(y) \xrightarrow[x-y\to\infty]{} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(k)}\{\rho\}\,a(x)\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(n-k)}\{\rho\}\,b(y), \tag{4.3.27}$$

où $a(x)$ et $b(y)$ sont des opérateurs quasi locaux arbitraires. Nous dirons donc que le système d'opérateurs $\{\rho_0, \ldots, \rho_n\}$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre n si on a les relations asymptotiques suivantes

$$\mathrm{Sp}\,\rho_l a(x)\,b(y) \xrightarrow[x-y\to\infty]{} \sum_{m=0}^{l} \mathrm{Sp}\,\rho_m a(x)\cdot\mathrm{Sp}\,\rho_{l-m} b(y), \quad l = 0, 1, \ldots, n.$$

Notons qu'une telle situation apparaît chaque fois qu'on développe l'opérateur statistique $\rho = \rho(\lambda)$, qui dépend du paramètre λ et satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, en série suivant les puissances de λ:

$$\rho(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_n, \quad \rho_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \rho(\lambda)}{\partial\lambda^n}\Big|_{\lambda=0}.$$

L'ensemble des n premiers termes de ce développement $\{\rho_0, \ldots, \rho_n\}$ satisfait alors au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre n.

Pour vérifier (4.3.27) remarquons que, l'opérateur $e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}$ satisfaisant au principe d'affaiblissement des corrélations, l'ensemble des opérateurs $\sum_{l=0}^{m} \tau^l \sigma_l^{(m)}\{\rho\}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ satisfait en vertu de (4.3.2) au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre n pour τ arbitraire. Par conséquent l'ensemble des opérateurs $\sigma_0^{(m)}\{\rho\}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ satisfait également au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre n en accord avec la formule (4.3.27).

En supposant, dans (4.3.3), que l'opérateur λ dépend d'un certain paramètre

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho(\lambda)\} = \rho^{(0)}(\mathrm{Sp}\,\rho(\lambda)\,\hat{\gamma}),$$

on obtient en dérivant cette relation par rapport à λ et en posant ensuite $\lambda = 0$,

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho_1\} = \frac{\partial \rho^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha}\bigg|_{\gamma = \mathrm{Sp}\,\rho_0 \hat{\gamma}} \mathrm{Sp}\,\rho_1 \hat{\gamma}_\alpha.$$

Cette formule est vraie dans le cas où l'ensemble des opérateurs $\{\rho_0, \rho_1\}$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations du premier ordre. En utilisant cette formule et en remarquant qu'en vertu de (4.3.27) l'ensemble des opérateurs $\{\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \sigma_0^{(0)}\{\rho\}\}$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations du premier ordre, on obtient la formule (4.3.26) (vu que $\mathrm{Sp}\sigma_0^{(0)}\{\rho\}\hat{\gamma} = \mathrm{Sp}\rho\hat{\gamma}$). Donc

$$\sigma_0^{(1)}\{\rho\} = \sigma_0^{(1)}(\gamma) + \frac{\partial \sigma_0^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma}.$$

Ainsi, aux termes quadratiques par rapport à V près, on a

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho\} + \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \approx \sigma_0^{(0)}(\gamma + \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\hat{\gamma}) + \sigma_0^{(1)}(\gamma),$$

où $\gamma = \mathrm{Sp}\rho\hat{\gamma}$. Cette relation, aux termes quadratiques par rapport à V près, coïncide avec la relation (4.3.25), que nous voulons démontrer (de plus $\gamma(\rho) = \mathrm{Sp}\sigma_0^{(0)}\{\rho\}\hat{\gamma} + \mathrm{Sp}\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\hat{\gamma}$).

Avant de passer à la démonstration générale de la relation (4.3.25), nous allons montrer que

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(n)}(\gamma)\hat{\gamma}_\alpha = 0, \quad \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(m)}\{\rho\}\}\hat{\gamma}_\alpha = \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(m)}\{\rho\}\hat{\gamma}_\alpha. \tag{4.3.28}$$

La première de ces formules découle de la relation

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma_0^{(n)}(\gamma)e^{i\mathscr{H}_0\tau} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

qui, à son tour, découle de (4.3.20). En effet, comme $[\mathscr{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = 0$, on a $\mathrm{Sp}\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma_0^{(n)}(\gamma)e^{i\mathscr{H}_0\tau}\hat{\gamma}_\alpha = \mathrm{Sp}\sigma_0^{(n)}(\gamma)\hat{\gamma}_\alpha$ et on obtient la première des formules (4.3.28). La seconde formule découle de la première si l'on tient compte de ce que les opérateurs $\{\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \ldots, \sigma_0^{(n)}\{\rho\}\}$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre m. A partir de (4.3.23) et (4.3.28), on obtient la relation suivante

$$\sum_{n=1}^{m-1} \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(m-n)}\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\}\hat{\gamma}_\alpha = 0, \quad m = 2, 3, \ldots \tag{4.3.29}$$

Nous allons maintenant démontrer la relation générale (4.3.25). Introduisons la désignation

$$\varkappa_0\{\rho\} = \sigma_0\{\sigma_0^{(0)}\{\rho\}\}.$$

La formule (4.3.23) peut alors s'écrire comme suit

$$\sigma_0\{\rho\} = \varkappa_0\{\rho\} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\}. \tag{4.3.30}$$

Il est évident que si ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, on a

$$\varkappa_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma), \quad \gamma = \mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma} \tag{4.3.31}$$

(on a tenu compte de la formule (4.3.3)). Supposant l'opérateur $\varkappa_0(\rho)$ donné, nous allons chercher la solution de l'équation fonctionnelle (4.3.30) sous la forme

$$\sigma_0\{\rho\} = \varkappa_0\{\rho\} + \varkappa_1\{\rho\} + \varkappa_2\{\rho\} + \ldots, \tag{4.3.32}$$

où $\varkappa_n \sim V^n$ (pour $\varkappa_0 \{\rho\}$ donné). Il est facile de voir que

$$\varkappa_1 \{\rho\} = \varkappa_0 \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varkappa_n \{\rho\} = \varkappa_{n-1} \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\} + \ldots + \varkappa_0 \{\sigma_0^{(n)} \{\rho\}\}, \tag{4.3.33}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ainsi, tous les $\varkappa_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) s'expriment en fonction de $\varkappa_0 \{\rho\}$.

Nous allons montrer que

$$\sum_{s=1}^{n} \varkappa_s \{\sigma_0^{(n+1-s)} \{\rho\}\} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.3.34}$$

et par conséquent

$$\varkappa_n \{\rho\} = \varkappa_0 \{\sigma_0^{(n)} \{\rho\}\}. \tag{4.3.35}$$

Nous allons tout d'abord vérifier la formule $\varkappa_1 \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\} = 0$.

Remarquant que $\varkappa_1 \{\rho\} = \varkappa_0 \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\}$ et vu que les opérateurs $\sigma_0^{(0)} \{\rho\}$, $\sigma_0^{(1)} \{\rho\}$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations du premier ordre (si ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations), on a en vertu de (4.3.31)

$$\varkappa_1 \{\rho\} = \frac{\partial \sigma_0 (\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)} \{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \operatorname{Sp} \rho \hat{\gamma}.$$

De même, il est facile de montrer que

$$\varkappa_1 \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\} = \frac{\partial^2 \sigma_0 (\gamma)}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} \operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)} \{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha \cdot \operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)} (\gamma) \hat{\gamma}_\beta + \frac{\partial \sigma_0 (\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)} \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\} \hat{\gamma}_\alpha .$$

Enfin, en utilisant (4.3.28) et (4.3.29) pour $m = 2$, on arrive à la formule $\varkappa_1 \{\sigma_0^{(1)} \{\rho\}\} = 0$.

La relation générale (4.3.34) pour n quelconque peut être démontrée par récurrence. Supposons que la relation (4.3.34) est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, k$. En vertu de (4.3.33) on a alors

$$\varkappa_n \{\rho\} = \varkappa_0 \{\sigma_0^{(n)} \{\rho\}\}, \quad n = 1, 2, \ldots, k+1. \tag{4.3.36}$$

Il nous faut vérifier que

$$\sum_{s=1}^{k+1} \varkappa_s \{\sigma_0^{(k+2-s)} \{\rho\}\} = 0.$$

Conformément à (4.3.36) on a

$$\sum_{s=1}^{k+1} \varkappa_s \{\sigma_0^{(k+2-s)} \{\rho\}\} = \varkappa_0 \Big\{ \sum_{s=1}^{k+1} \sigma_0^{(s)} \{\sigma_0^{(k+2-s)} \{\rho\}\Big\}.$$

Si ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, en vertu de (4.3.24), on a

$$\sigma_0^{(k+2)'} \{\rho\} = \sigma_0^{(k+2)} (\gamma) + \sum_{s=1}^{k+1} \sigma_0^{(s)} \{\sigma_0^{(k+2-s)} \{\rho\}\} + \sigma_0^{(0)} \{\sigma_0^{(k+2)} \{\rho\}\},$$
$$\gamma = \operatorname{Sp} \rho \hat{\gamma}.$$

C'est pourquoi

$$\sum_{s=1}^{k+1} \varkappa_s \{\sigma_0^{(k+2-s)}\{\rho\}\} = \varkappa_0 \{\sigma_0^{(k+2)}\{\rho\} - \sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(k+2)}\{\rho\}\}\} - \varkappa_0 \{\sigma_0^{(k+2)}(\gamma)\},$$

$$\gamma = \mathrm{Sp}\, \rho \hat{\gamma}.$$

Remarquons maintenant que $\varkappa_0 \{\sigma_0^{(k+2)}(\gamma)\} = 0$. (Ce qui découle de (4.3.31), (4.3.28) et de ce que les opérateurs $\sigma_0^{(0)}(\gamma), \ldots, \sigma_0^{(k+2)}(\gamma)$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre $(k+2)$.) De plus $\varkappa_0 \{\sigma_0^{(k+2)}\{\rho\}\} = \varkappa_0\{\sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(k+2)}\{\rho\}\}\}$. (Ceci découle de (4.3.31), (4.3.28) et de ce que les opérateurs $\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \ldots, \sigma_0^{(k+2)}\{\rho\}$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre $(k+2)$). La formule (4.3.34) se trouve ainsi démontrée.

Compte tenu de (4.3.35), on peut écrire la formule (4.3.32) sous la forme

$$\sigma_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma) + \sum_{s=1}^{\infty} \varkappa_0 \{\sigma_0^{(s)}\{\rho\}\}, \qquad \gamma = \mathrm{Sp}\, \rho\hat{\gamma} \tag{4.3.37}$$

(ρ satisfait ici au principe d'affaiblissement des corrélations). En vertu de la formule (4.3.31) les grandeurs $\varkappa_0 \{\sigma_0^{(s)}\{\rho\}\}$ peuvent s'exprimer en fonction de $\sigma_0(\gamma)$. En effet, supposons que l'opérateur $\rho(\lambda)$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations. En vertu de (4.3.31), on a alors

$$\varkappa_0 \{\rho(\lambda)\} = \sigma_0(\gamma(\lambda)), \quad \gamma(\lambda) = \mathrm{Sp}\, \rho(\lambda)\hat{\gamma}.$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n \sigma_0(\gamma)}{\partial\lambda^n} = \sum_{n_1+2n_2+\ldots=n} \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots}\sigma_0(\gamma)}{\partial\gamma\ldots\partial\gamma}\left(\frac{1}{1!}\mathrm{Sp}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\hat{\gamma}\right)^{n_1}\ldots$$
$$\ldots\left(\frac{1}{k!}\mathrm{Sp}\frac{\partial^k\rho}{\partial\lambda^k}\hat{\gamma}\right)^{n_k}\ldots\frac{1}{n_1!\ldots n_k!\ldots},$$

où la sommation s'étend à tous les n_i éventuels qui satisfont à la relation $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots = n$. Comme les opérateurs $\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \ldots, \sigma_0^{(n)}\{\rho\}$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations d'ordre n, on a

$$\varkappa_0 \{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\} =$$
$$= \sum_{n_1+2n_2+\ldots=n} \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots}\sigma_0(\gamma)}{\partial\gamma\ldots\partial\gamma}(\gamma^1)^{n_1}\ldots(\gamma^k)^{n_k}\ldots(n_1!\ldots n_k!\ldots)^{-1},$$
$$\gamma^k = \mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(k)}\{\rho\}\,\hat{\gamma}. \tag{4.3.38}$$

C'est pourquoi, en vertu de (4.3.37), on a

$$\sigma_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_1+2n_2+\ldots=n}\frac{1}{(n_1+n_2+\ldots)!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots}\sigma_0(\gamma)}{\partial\gamma\ldots\partial\gamma}(\gamma_1)^{n_1}\ldots(\gamma^k)^{n_k}\ldots\frac{(n_1+n_2+\ldots)!}{n_1!\ldots n_k!\ldots}$$

et par conséquent

$$\sigma_0\{\rho\}=\sigma_0(\gamma+\gamma^1+\gamma^2+\ldots)=\sigma_0(\mathrm{Sp}\,\sigma_0\,\{\rho\}\,\hat{\gamma})$$

(nous avons tenu compte de la formule (4.3.38)). Nous avons montré ainsi que si l'opérateur statistique ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations, on peut exprimer $\sigma_0\,\{\rho\}$ en fonction de $\sigma_0\,(\gamma)$ où $\gamma = \gamma\,(\rho)$ sont des fonctionnelles de ρ.

4.3.3. Sommation des termes séculaires et opérateur statistique grossier. Comme nous l'avons déjà noté, l'équation (4.3.12) n'est pas une équation fermée pour la définition de $\sigma_0\,(\gamma)$ car elle contient l'opérateur $\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)]\}$. Cependant on peut exprimer cet opérateur en fonction de $\sigma_0\,(\gamma)$ et obtenir par là même une équation intégrale fermée pour la définition de l'opérateur $\sigma_0\,(\gamma)$. Notons à cet effet que les opérateurs $\sigma_0^{(0)}\,(\gamma)$, $i\,[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)]$ satisfont au principe d'affaiblissement des corrélations du premier ordre $\left(\text{ce qui découle de } i\,[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)] = \right.$ $\left. = \frac{\partial}{\partial\lambda}\, e^{i\lambda V}\sigma_0^{(0)}\,(\gamma)\, e^{-i\lambda V}\Big|_{\lambda=0}\right)$. C'est pourquoi, en vertu du résultat essentiel du paragraphe précédent, à savoir de (4.3.25), on a

$$\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)]\}=\frac{\partial\sigma_0\,(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0\,\{[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)]\}\,\hat{\gamma}_\alpha.$$

Mais conformément à (4.3.29) on a

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0\,\{[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}\,\hat{\gamma}_\alpha=\mathrm{Sp}\,[V,\ \sigma_0\,\{\sigma_0^{(0)}\,(\gamma)\}]\,\hat{\gamma}_\alpha,$$

(nous avons tenu compte de $[V,\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]=[\mathscr{H},\ \sigma_0^{(0)}(\gamma)]$ et de $[\hat{\gamma}_\alpha,\ V]=$ $=[\hat{\gamma}_\alpha,\ \mathscr{H}]$), par conséquent

$$\sigma_0\{[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)]\}=\frac{\partial\sigma_0\,(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0\,(\gamma)\,[\hat{\gamma}_\alpha,\ V].$$

On obtient ainsi l'équation intégrale fermée suivante pour la définition de $\sigma_0\,(\gamma)$:

$$\sigma_0\,(\gamma)=\sigma_0^{(0)}\,(\gamma)-i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}\left([V,\ \sigma_0\,(\gamma)]-\frac{\partial\sigma_0\,(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0\,(\gamma)\,[\hat{\gamma}_\alpha,\ V]\right)e^{-i\mathscr{H}_0\tau}. \tag{4.3.39}$$

En résolvant cette équation par la méthode des itérations, on trouve les opérateurs asymptotiques $\sigma_0^{(n)}\,(\gamma)$. Puis, en utilisant le résultat essentiel du paragraphe précédent (4.3.25), on trouve les opérateurs asymptotiques $\sigma_0^{(n)}\,\{\rho\} =$ $= (\sigma_0(\gamma\,(\rho)))^{(n)}$. La relation entre γ et ρ peut être obtenue par la théorie des perturbations suivant V à partir de la relation (4.3.21). A titre d'exemple nous allons donner l'expression de l'opérateur $\sigma^{(1)}\,\{\rho\}$

$$\sigma_0^{(1)}\,\{\rho\}=\sigma_0^{(1)}\,(\gamma)+\frac{\partial\sigma_0^{(0)}\,(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(1)}\,\{\rho\}\,\hat{\gamma}_\alpha,\qquad \gamma=\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\gamma},$$

où

$$\sigma_0^{(1)}(\gamma)=-i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}\,[V,\ \sigma_0^{(0)}\,(\gamma)]\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau},$$

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_0^{(1)}\,\{\rho\}\,\hat{\gamma}_\alpha=-i\int_{0}^{\infty} d\tau\ \mathrm{Sp}\,\rho\,[\hat{\gamma}_\alpha,\ V]$$

(on suppose que dans ces formules l'opérateur ρ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations).

On peut maintenant voir comment évolue l'état du système pour $\tau \gg \tau_0$. Dans ce domaine asymptotique l'opérateur statistique est déterminé par les termes principaux (4.3.2) dans le développement de $e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}$ en série suivant les puissances de V

$$e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau\gg\tau_0]{} \sigma_\tau \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} \tau^n \sigma_n^{(m)}\{\rho\},$$

et le problème revient ainsi à la sommation des termes séculaires $\tau^n\sigma_n^{(m)}\{\rho\}$ apparaissant lors de l'application de la théorie des perturbations *).

En utilisant (4.3.5), on a

$$\sigma_\tau = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} \{e^{-i\mathcal{H}\tau}\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\, e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{m-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\mathcal{H}\tau}\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\, e^{i\mathcal{H}\tau},$$

ou

$$\sigma_\tau = \sigma_0\{e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}$$

(nous avons utilisé la définition de l'opérateur générateur $\sigma_0\{\rho\}$ (4.3.7) et la formule (4.3.9)). En vertu de (4.3.25) on a

$$\sigma_\tau = \sigma_0(\gamma(\tau;\rho)), \tag{4.3.40}$$

où $\gamma(\tau;\rho) = \mathrm{Sp}\,\sigma_0\{e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}\hat{\gamma}$. Les grandeurs $\gamma(\tau;\rho)$ sont données par la formule (4.3.21)

$$\gamma(\tau;\rho) = \mathrm{Sp}\, e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau} - i\int_\tau^\infty d\tau'\, \mathrm{Sp}\, e^{-i\mathcal{H}\tau'}(\rho - \sigma_0\{\rho\})\, e^{i\mathcal{H}\tau'}[\hat{\gamma}, V].$$

En dérivant cette expression par rapport à τ, on obtient une équation pour les paramètres $\gamma(\tau;\rho) \equiv \gamma(\tau)$

$$\dot{\gamma}(\tau) = \mathcal{L}(\gamma(\tau)) = -i\mathrm{Sp}\,\sigma_0(\gamma(\tau))[\hat{\gamma}, V]. \tag{4.3.41}$$

En comparant les résultats obtenus ici avec ceux du § 4.2, on voit que l'opérateur générateur $\sigma_0(\gamma)$ coïncide avec l'opérateur statistique grossier. Les variations des paramètres γ dans le temps, comme on pouvait s'y attendre, sont données par l'équation (4.2.4).

Nous avons montré comment apparaît la dépendance fonctionnelle de l'opérateur statistique grossier du paramètre dans le cas des systèmes spatialement homogènes. D'une manière analogue, on peut également envisager le cas des systèmes spatialement non homogènes [90, 89] lorsque les termes séculaires apparaissent lors de l'élaboration de la théorie des perturbations par rapport aux gradients spatiaux. Enfin on peut envisager le cas général où les termes séculaires apparaissent lorsqu'on utilise la théorie des perturbations, tant par rapport à une interaction faible que par rapport aux gradients spatiaux [98]. On obtient ainsi les relations fondamentales (4.2.18), (4.2.48) ainsi que les relations (4.2.29), (4.2.30), (4.2.55), (4.2.57) qui décrivent les processus de relaxation.

Notons pour conclure ce paragraphe que les divergences (termes séculaires) que nous avons éliminées étaient liées au principe d'affaiblissement des corrélations et non à une structure concrète du hamiltonien de l'interaction. C'est

*) La méthode de la sommation des termes séculaires a été utilisée pour la première fois par Van Hove [116] et Prigogine [97] pour trouver la « master equation ».

pourquoi il faut avoir en vue que lors de l'application des méthodes de la théorie des perturbations aux équations (4.2.11), (4.2.55) peuvent apparaître des divergences supplémentaires liées à une structure concrète du hamiltonien de l'interaction (comme, par exemple, dans le cas de l'interaction coulombienne dans un système de particules chargées, voir le paragraphe 1.5.2). Pour éviter ces divergences, il y a lieu d'utiliser une des modifications de la théorie des perturbations comme pour les équations (4.2.11). (4.2.55).

§ 4.4. Comportement asymptotique des fonctions de Green dans le domaine des basses fréquences

4.4.1. Linéarisation des équations pour l'opérateur statistique. Dans le paragraphe 4.2.2 nous avons obtenu des équations pour l'opérateur statistique grossier d'un système faiblement non homogène. Ce système peut en principe, bien que les hétérogénéités soient petites, se trouver tant au voisinage qu'au loin de l'état d'équilibre statistique. Dans le présent paragraphe, nous allons envisager le cas où les écarts de l'équilibre ne sont pas grands. Pour plus de simplicité nous allons supposer que l'interaction supplémentaire V est absente, de sorte que le système est décrit par les équations (4.2.29), (4.2.30).

En prenant pour fonctions indépendantes au lieu des densités $\zeta_\alpha(x)$ les fonctions $Y_\alpha(x)$ et en introduisant la désignation $\sigma_0(Y(x')) \equiv \sigma_0(\zeta(x'))$, on peut écrire l'équation (4.2.29) comme suit

$$\sigma_0(Y(x')) = w(Y(x')) - \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau} \Big\{ i[\mathscr{H}_0, w(Y(x'))] - \\ - \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(Y(x'))}{\delta Y_\alpha(x)} S_\alpha(x; Y(x')) \Big\} e^{-i\mathscr{H}_0\tau}, \quad (4.4.1)$$

où la fonctionnelle $S_\alpha(x; Y(x'))$ est déterminée à partir de l'équation

$$\int d^3x \frac{\delta\sigma_0(Y(x'))}{\delta Y_\alpha(x)} S_\alpha(x; Y(x')) = \\ = \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(Y(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{Sp} \sigma_0(Y(x')) \hat{\zeta}_{\alpha k}(x).$$

En remarquant que

$$\frac{\delta\sigma_0(Y(x'))}{\delta Y_\alpha(x)} = \int d^3x'' \frac{\delta\sigma_0(Y(x'))}{\delta\zeta_\beta(x'')} \frac{\delta \operatorname{Sp} \sigma_0(Y(x'))\hat{\zeta}_\beta(x'')}{\delta Y_\alpha(x)},$$

on obtient

$$\int d^3x'' \frac{\delta \operatorname{Sp} \sigma_0(Y(x'))\hat{\zeta}_\alpha(x)}{\delta Y_\beta(x'')} S_\beta(x''; Y(x')) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{Sp} \sigma_0(Y(x'))\hat{\zeta}_{\alpha k}(x). \quad (4.4.2)$$

En posant $Y_\alpha(x) = Y_\alpha + \delta Y_\alpha(x)$, où Y_α sont des forces thermodynamiques qui ne dépendent pas des coordonnées et $\delta Y_\alpha(x)$ des compléments petits (variant lentement avec x), développons $w(Y(x'))$ en série suivant les puissances de $\delta Y_\alpha(x)$:

$$w(Y(x')) = w + \delta w + \ldots, \quad w = w(Y), \quad \delta w = \int d^3k \delta Y_\alpha(k) w_\alpha(k), \tag{4.4.3}$$

où $\delta Y_\alpha(k) = (2\pi)^{-3} \int d^3x \delta Y_\alpha(x) e^{-ikx}$ sont les composantes de Fourier de $\delta Y_\alpha(x)$ et

$$w_\alpha(k) = -w \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{ikx} (\zeta_\alpha(x, \lambda) - \langle \zeta_\alpha \rangle)$$

(nous avons ici utilisé les désignations $a(x, \lambda) = w^{-\lambda} a(x) w^\lambda$, $\langle a \rangle = \mathrm{Sp}\, wa(x)$).

En vertu de (4.4.1), au développement de $w(Y(x'))$ correspond le développement de $\sigma_0(Y(x'))$:

$$\sigma_0(Y(x')) = w + \delta\sigma_0(Y(x')) + \ldots, \quad \delta\sigma_0(Y(x')) = \\ = \int d^3k \delta Y_\alpha(k) \sigma_\alpha(k) \tag{4.4.4}$$

($\sigma_\alpha(k)$ sont des opérateurs inconnus). Pour trouver ces opérateurs, il y a lieu d'utiliser l'équation intégrale (4.4.1). A cet effet, nous allons trouver la dérivée fonctionnelle $\delta\sigma_0(Y(x'))/\delta Y_\alpha(x)$. Remarquant que

$$\delta\sigma_0(Y(x')) = (2\pi)^{-3} \int d^3x \delta Y_\alpha(x) \int d^3k \sigma_\alpha(k) e^{-ikx},$$

on a

$$\frac{\delta\sigma_0(Y(x'))}{\delta Y_\alpha(x)} = (2\pi)^{-3} \int d^3k e^{-ikx} \sigma_\alpha(k).$$

En substituant cette expression dans (4.4.2) et en introduisant les composantes de Fourier des fonctions $S_\alpha(x; Y(x'))$

$$(2\pi)^{-3} \int d^3x e^{-ikx} S_\alpha(x; Y(x')) = i\delta Y_\beta(k) T_{\beta\alpha}(k), \tag{4.4.5}$$

on obtient la relation suivante reliant la matrice $T_{\beta\alpha}(k)$ et les opérateurs $\sigma_\alpha(k)$:

$$iT_{\beta\alpha}(k)\, \mathrm{Sp}\, \sigma_\alpha(k) \hat{\zeta}_\gamma(x) = \frac{\partial}{\partial x_l} \mathrm{Sp}\, \sigma_\beta(k) \hat{\zeta}_{\gamma l}(x). \tag{4.4.6}$$

Nous allons montrer que cette relation peut s'écrire comme

$$T_{\beta\alpha}(k)\, \mathrm{Sp}\, \sigma_\alpha(k) \hat{\zeta}_\gamma(0) = k_l\, \mathrm{Sp}\, \sigma_\beta(k) \hat{\zeta}_{\gamma l}(0). \tag{4.4.7}$$

Remarquons à cet effet que

$$e^{iPx}\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})\,e^{-iPx}=e^{ikx}\sigma_\alpha(\boldsymbol{k}), \tag{4.4.8}$$

où $\boldsymbol{P}$ est l'opérateur de l'impulsion du système. En effet cette équation peut immédiatement être obtenue à partir de (4.4.4) si l'on tient compte de ce qu'en vertu de (4.2.33), on a

$$e^{iPx}\delta\sigma_0(Y(\boldsymbol{x}'))\,e^{-iPx}=\delta\sigma_0(Y(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x})).$$

Remarquant que

$$\hat{\zeta}_\alpha(\boldsymbol{x})=e^{-iPx}\hat{\zeta}_\alpha(0)\,e^{iPx},\qquad \hat{\zeta}_{\alpha l}(\boldsymbol{x})=e^{-iPx}\hat{\zeta}_{\alpha l}(0)\,e^{iPx}$$

et en utilisant (4.4.8), on obtient en vertu de (4.4.6) la relation (4.4.7).

En substituant (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) dans l'équation intégrale (4.4.1), on trouve l'équation intégrale suivante pour déterminer les opérateurs $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$ [89]:

$$\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})=w_\alpha(\boldsymbol{k})-$$
$$-\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}\{i[\mathcal{H}_0,w_\alpha(\boldsymbol{k})]-iT_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\sigma_\beta(\boldsymbol{k})\}\,e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{4.4.9}$$

Ces équations de pair avec les équations (4.4.7) permettent de trouver l'opérateur $\delta\sigma_0$ en approximation linéaire par rapport à δY_α.

Jusqu'à présent, nous avons envisagé δY_α comme des fonctions indépendantes. Cependant, si la valeur initiale de l'opérateur statistique ρ est fixée, les grandeurs $\zeta_\alpha(\boldsymbol{x},0;\rho)$ en vertu de (4.2.30), seront des fonctionnelles bien déterminées de ρ, par conséquent, les grandeurs δY_α le seront aussi. Nous allons montrer maintenant comment trouver les variations des forces thermodynamiques δY_α en fonction de ρ, $\delta Y_\alpha(\boldsymbol{x})=\delta Y_\alpha(\boldsymbol{x};\rho)$.

Comme l'opérateur ρ doit satisfaire au principe d'affaiblissement des corrélations, en vertu de (4.2.44) il peut s'écrire comme

$$\rho=\exp\left\{\Omega-Y_a\int d^3x\hat{\zeta}_\alpha(\boldsymbol{x})-\int d^3xb(\boldsymbol{x})\,a(\boldsymbol{x})\right\},$$

où $a(\boldsymbol{x})$ est un opérateur quasi local arbitraire invariant par rapport à la translation et $b(\boldsymbol{x})$ une fonction c-numérique arbitraire. Pour $b(\boldsymbol{x})=0$, cette expression devient $w(Y)$. Ce sont les états voisins de l'état décrit par l'opérateur statistique w qui nous intéressent, c'est pourquoi nous allons supposer que la fonction $b(\boldsymbol{x})$ est petite et écrire ρ sous la forme

$$\rho=w+\delta\rho+\ldots,$$
$$\delta\rho=\int d^3kb(\boldsymbol{k})\,\rho(\boldsymbol{k}),\quad b(\boldsymbol{k})=(2\pi)^{-3}\int d^3xe^{-ikx}b(\boldsymbol{x}), \tag{4.4.10}$$
$$\rho(\boldsymbol{k})=-w\int_0^1 d\lambda\int d^3xe^{ikx}(a(\boldsymbol{x},\lambda)-\langle a\rangle).$$

Comme $\delta Y_\alpha(k)$ s'annule avec $b(k)$, on peut écrire $\delta Y_\alpha(k)$ comme

$$\delta Y_\alpha(\boldsymbol{k};\ \rho) = b(\boldsymbol{k})\, T_\alpha(\boldsymbol{k};\ a),$$

où les grandeurs $T_\alpha(\boldsymbol{k};\ a)$ ne dépendent pas de $b(\boldsymbol{k})$ et sont déterminées par l'opérateur $a(\boldsymbol{x})$. En substituant dans (4.4.4), on obtient

$$\sigma_0\{\rho\} \equiv \sigma_0(Y(\boldsymbol{x}';\ \rho)) = w + \int d^3k\, b(\boldsymbol{k})\, T_\alpha(\boldsymbol{k};\ a)\, \sigma_\alpha(\boldsymbol{k}) + \ldots \quad (4.4.11)$$

Pour trouver $T_\alpha(\boldsymbol{k};\ a)$ en fonction de l'opérateur a, nous allons nous référer à l'équation de « mémoire » (4.2.30):

$$\operatorname{Sp}\sigma_0\{\rho\}\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \operatorname{Sp}\rho\hat{\zeta}_\alpha(0) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau\, \operatorname{Sp} e^{i\mathscr{H}_0\tau}[P_k,\ \rho - \sigma_0\{\rho\}]\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\hat{\zeta}_{\alpha k}(0).$$

En y substituant (4.4.10), (4.4.11), on trouve

$$T_\beta(\boldsymbol{k};\ a)\operatorname{Sp}\sigma_\beta(\boldsymbol{k})\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \operatorname{Sp}\rho(\boldsymbol{k})\,\hat{\zeta}_\alpha(0) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau\, \operatorname{Sp} e^{i\mathscr{H}_0\tau}[P_k,\ \rho(\boldsymbol{k}) - T_\beta(\boldsymbol{k};\ a)\,\sigma_\beta(\boldsymbol{k})]\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\hat{\zeta}_{\alpha k}(0),$$

d'où en utilisant (4.4.8), on trouve finalement

$$T_\beta(\boldsymbol{k};\ a)\operatorname{Sp}\sigma_\beta(\boldsymbol{k})\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \operatorname{Sp}\rho(\boldsymbol{k})\,\hat{\zeta}_\alpha(0) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau\, \operatorname{Sp} e^{i\mathscr{H}_0\tau}(\rho(\boldsymbol{k}) - T_\beta(\boldsymbol{k};\ a)\,\sigma_\beta(\boldsymbol{k}))\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\hat{\zeta}_{\alpha l}(0)\, k_l. \quad (4.4.12)$$

Connaissant les opérateurs $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$ on peut à l'aide de cette équation trouver les grandeurs $T_\alpha(\boldsymbol{k};\ a)$ et par conséquent $\delta\sigma_0\{\rho\}$ en approximation linéaire par rapport à $b(\boldsymbol{k})$.

La fonction $b(\boldsymbol{x})$ doit varier lentement avec $\boldsymbol{x}$. C'est pourquoi les grandeurs k_l dans les équations (4.4.9), (4.4.12) seront petites et on peut chercher la solution des équations (4.4.9), (4.4.12) comme un développement en série suivant les puissances de k_l (il est facile de réaliser un tel développement, car les termes intégraux dans (4.4.9), (4.4.12) contiennent $\boldsymbol{k}$).

A partir des équations (4.4.9), pour les opérateurs $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$, on obtient

$$e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})\, e^{i\mathscr{H}_0\tau} = e^{-i\mathscr{H}_0\tau}w_\alpha(\boldsymbol{k})\, e^{i\mathscr{H}_0\tau} - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{i\mathscr{H}_0\tau'}\{i[\mathscr{H}_0,\ w_\alpha(\boldsymbol{k})] - iT_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\,\sigma_\beta(\boldsymbol{k})\}\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau'},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial\tau} e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})\, e^{i\mathscr{H}_0\tau} = iT_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\sigma_\beta(\boldsymbol{k})\, e^{i\mathscr{H}_0\tau},$$

et, par conséquent,

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_\alpha(k)\,e^{i\mathcal{H}_0\tau}=(e^{-i\tau T(k)})_{\alpha\beta}\,\sigma_\beta(k). \qquad (4.4.13)$$

Remarquons qu'en vertu de (4.4.8), on a également la relation

$$e^{iPx}\sigma_\alpha(k)\,e^{-iPx}=e^{ik\cdot x}\sigma_\alpha(k).$$

Comme nous allons le montrer, les valeurs propres de la matrice $T_{\alpha\beta}(k)$ déterminent le spectre « hydrodynamique » des oscillations d'un système physique, c'est-à-dire les fréquences et les amortissements des oscillations dans le domaine des petits vecteurs d'onde k.

Remarquons enfin qu'à partir des formules (4.2.18), (4.4.11), (4.4.13) on obtient la relation [89]:

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\rho(k)\,e^{i\mathcal{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to\infty]{} T_\alpha(k;\ a)\,(e^{-i\tau T(k)})_{\alpha\beta}\,\sigma_\beta(k), \qquad (4.4.14)$$

où

$$\rho(k)=-w\int_0^1 d\lambda\int d^3x e^{ikx}(a(x,\ \lambda)-\langle a\rangle).$$

Comme le montre la démonstration, dans cette formule asymptotique, la grandeur τ doit être bien plus grande que le temps de chaotisation τ_0, c'est-à-dire le temps de l'établissement de la distribution locale $w(Y(x'))$. De plus, le vecteur d'onde k, égal en ordre de grandeur à a_m^{-1} (a_m étant les grandeurs caractéristiques pour lesquelles la fonction $b(x)$ varie) doit être petit par rapport à l^{-1}, où l est la longueur du libre parcours moyen des particules du système, $k\ll l^{-1}$ (pour les gaz $l\sim\bar{v}\tau_0$, $\bar{v}$ étant la vitesse moyenne des particules; pour les liquides $l\sim a$, où a est la distance interatomique moyenne).

Il y a lieu de noter que la relation (4.4.14), tout comme les formules générales (4.2.29), (4.2.30), concerne les systèmes non dégénérés, c'est-à-dire les systèmes dont l'état d'équilibre est donné par des valeurs moyennes habituelles et non par des valeurs quasi moyennes.

4.4.2. Comportement asymptotique des fonctions de Green dans le domaine des fréquences basses et des vecteurs d'onde petits. Dans ce paragraphe nous allons montrer comment à partir de (4.4.14) on peut obtenir la formule asymptotique des fonctions de Green dans le domaine des fréquences basses et des vecteurs d'onde petits [89].

La fonction de Green retardée $G_{ij}^{(+)}(x,\ t)$ des grandeurs $\xi_i(x,\ t)$ et $\xi_j(0)$ en vertu de (4.1.12) est déterminée par la formule

$$G_{ij}^{(+)}(x,\ t)=-i\theta(t)\operatorname{Sp}[w,\ \xi_i(x,\ t)]\,\xi_j(0),$$

où w est l'opérateur statistique de Gibbs généralisé

$$w = \exp\{\Omega - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha\}, \quad \hat{\gamma}_\alpha = \int d^3x \hat{\zeta}_\alpha(x),$$

et les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ correspondent à différentes intégrales additives du mouvement. Nous identifierons les trois premiers de ces opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ au hamiltonien du système $\mathscr{H}_0$, à l'opérateur de l'impulsion $\boldsymbol{P}$ et à l'opérateur du nombre de particules N, $\gamma_0 \equiv \mathscr{H}_0$, $\gamma_{1,2,3} \equiv P_{1,2,3}$, $\gamma_4 \equiv N$. Nous écrirons les grandeurs Y_0, $\boldsymbol{Y}$, Y_4 comme $Y_0 = \beta$, $\boldsymbol{Y} = -\beta \boldsymbol{u}$, $Y_4 = -\beta\mu$, où β est l'inverse de la température, μ le potentiel chimique et $\boldsymbol{u}$ la vitesse du système en entier. Nous allons supposer que le hamiltonien $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0$ qui détermine les opérateurs de Heisenberg $\xi_l(x, t)$ transforme, par suite de l'évolution du système un état initial quelconque ρ en un état d'équilibre w.

Remarquons maintenant que

$$[w, \xi_l(x, t)] = -w \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} w^{-\lambda} \xi_l(x, t) w^\lambda$$

et, par conséquent,

$$[w, \xi_l(x, t)] = -w \int_0^1 d\lambda Y_\alpha [\hat{\gamma}_\alpha, \xi_l(x, t; \lambda)].$$

Compte tenu de ce que

$$[\boldsymbol{P}, \xi_l(x, t)] = i\nabla \xi_l(x, t), \quad [\mathscr{H}, \xi_l(x, t)] = -i\frac{\partial \xi_l(x, t)}{\partial t}$$

et en supposant pour plus de simplicité que $\xi_l(x)$ commute avec tous les autres opérateurs γ_α, on obtient :

$$[w, \xi_l(x, t)] = i\beta\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla\right) w \int_0^1 d\lambda (\xi_l(x, t; \lambda) - \langle \xi_l \rangle).$$

D'où

$$-i\theta(t)[w, \xi_l(x, t)] = \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla\right)\theta(t) w \int_0^1 d\lambda (\xi_l(x, t; \lambda) - \langle \xi_l \rangle) +$$

$$+ \beta\delta(t) w \int_0^1 d\lambda (\xi_l(x; \lambda) - \langle \xi_l \rangle).$$

C'est pourquoi en vertu de la définition des fonctions de Green on a

$$G_{ij}^{(+)}(x,\ t)=\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\nabla\right)\theta(t)\,\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\,(\xi_i(x,\ t;\ \lambda)-\langle\xi_i\rangle)\,\xi_j(0)-$$

$$-\beta\delta(t)\,\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\,(\xi_i(x,\ \lambda)-\langle\xi_i\rangle)\,\xi_j(0).$$

En passant aux composantes de Fourier des fonctions de Green $G_{ij}^{(+)}(k,\ \omega)$, on obtient

$$G_{ij}^{(+)}(k,\ \omega)=$$

$$=-i\beta(\omega-ku)\int_0^\infty dt e^{i\omega t}\int d^3x e^{-ikx}\,\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\,(\xi_i(x,\ t;\ \lambda)-$$

$$-\langle\xi_i\rangle)\,\xi_j(0)-\beta\int d^3x e^{-ikx}\,\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\,(\xi_i(x,\ \lambda)-\langle\xi_i\rangle)\,\xi_j(0). \quad (4.4.15)$$

Pour trouver l'expression asymptotique de $G_{ij}^{(+)}(k,\ \omega)$ pour $\omega\to 0$, il y a lieu d'étudier le comportement pour des t grands de l'expression sous le signe de l'intégrale dans le premier terme. A cet effet nous allons utiliser la formule (4.4.10) pour $\rho(k)$ (où au lieu des opérateurs $a(x)$ on trouve les opérateurs $\xi_j(x)$) et la relation asymptotique (4.4.14). Ces formules montrent que

$$-w\int_0^1 d\lambda\int d^3x e^{-ikx}(\xi_j(x,\ t;\ \lambda)-\langle\xi_j\rangle)\xrightarrow[t\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} T_\alpha(k;\ \xi_j)\,(e^{-itT(k)})_{\alpha\beta}\,\sigma_\beta(k),$$

où $\sigma_\beta(k)$, $T_{\alpha\beta}(k)$, $T_\alpha(k;\ \xi_j)$ sont donnés par les équations (4.4.9), (4.4.7), (4.4.12). On a donc

$$-\int d^3x e^{ikx}\,\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\,(\xi_i(x,\ t;\ \lambda)-\langle\xi_i\rangle)\,\xi_j(0)\xrightarrow[t\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} T_\alpha(k;\ \xi_j)\,(e^{-itT(k)})_{\alpha\beta}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(k)\,\xi_i(0). \quad (4.4.16)$$

Dans la formule (4.4.15), le terme contenant l'intégrale sur le temps peut de toute évidence s'écrire sous la forme

$$-i\beta(\omega-ku)\int_0^\infty dt e^{i\omega t}\left\{\int d^3x e^{-ikx}\,\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\,(\xi_i(x,\ t;\ \lambda)-\right.$$

$$-\langle\xi_l\rangle)\,\xi_j(0)-T_\alpha(k;\ \xi_j)\,(e^{-itT(k)})_{\alpha\beta}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(k)\,\xi_l(0)\Big\}-$$

$$-i\beta(\omega-ku)\int_0^\infty dt e^{i\omega t}T_\alpha(k;\ \xi_j)\,(e^{-itT(k)})_{\alpha\beta}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(k)\,\xi_l(0).$$

En vertu de (4.4.16), le premier terme est régulier dans le domaine des ω et k petits. Dans le second terme, en intégrant par rapport à t, on peut écrire finalement la fonction de Green $G_{lj}^{(+)}(k,\ \omega)$ comme

$$G_{lj}^{(+)}(k,\ \omega)=G_{lj}^{0}(k)+G_{lj}^{p}(k,\ \omega)+G'_{lj}(k,\ \omega), \qquad (4.4.17)$$

où

$$G_{lj}^{0}(k)=-\beta\,\mathrm{Sp}\int_0^1 d\lambda\int d^3x e^{ikx}\,(\xi_j(x,\ \lambda)-\langle\xi_j\rangle)\,\xi_l(0),$$

$$G_{lj}^{p}(k,\ \omega)=-\beta(\omega-ku)\,T_\alpha(k;\ \xi_j)\,(\omega-T(k)+i0)_{\alpha\beta}^{-1}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(k)\,\xi_l(0),$$

$$G'_{lj}(k,\ \omega)=-i\beta(\omega-ku)\int_0^\infty dt e^{i\omega t}\Big\{\mathrm{Sp}\,w\int_0^1 d\lambda\int d^3x e^{ikx}\,(\xi_l(x,t;\lambda)-$$

$$-\langle\xi_l\rangle)\,\xi_j(0)-T_\alpha(k;\ \xi_j)\,(e^{-itT(k)})_{\alpha\beta}\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(k)\,\xi_l(0)\Big\}.$$

Le terme $G_{lj}^{p}(k,\ \omega)$ contient les pôles de la fonction de Green $G_{lj}^{(+)}(k,\ \omega)$; le terme $G'_{lj}(k,\ \omega)$ est régulier dans le domaine des ω et k petits, et enfin le terme $G_{lj}^{0}(k)$ est une fonction seulement de k et ne dépend pas de ω.

Nous allons montrer que les valeurs limites de la fonction de Green $G_{lj}^{(+)}(k,\ \omega)$ dépendent de l'ordre dans lequel on réalise les passages à la limite $\omega\to 0$ et $k\to 0$ (on pose $u=0$), c'est-à-dire

$$\lim_{k\to 0}G_{lj}^{(+)}(k,\ 0)\neq\lim_{\omega\to 0}G_{lj}^{(+)}(0,\ \omega).$$

Il est facile de voir à partir de la formule générale (4.4.17) que

$$\lim_{k\to 0}G_{lj}^{(+)}(k,\ 0)=G_{lj}^{0}(0)=-\beta\,\mathrm{Sp}\int_0^1 d\lambda\int d^3x\,(\xi_j(x,\ \lambda)-\langle\xi_j\rangle)\,\xi_l(0). \qquad (4.4.18)$$

Nous allons maintenant trouver la valeur limite de la fonction $G_{lj}^{(+)}(0,\ \omega)$ pour $\omega\to 0$. Il s'ensuit des formules (4.4.3), (4.4.7), (4.4.9), (4.4.12) :

$$\sigma_\alpha(0)=w_\alpha(0)=-w\int_0^1 d\lambda\int d^3x\,(\zeta_\alpha(x,\ \lambda)-\langle\zeta_\alpha\rangle)=\frac{\partial w}{\partial Y_\alpha},$$
$$T_{\alpha\beta}(0)=0,\quad T_\alpha(0;\ \xi_j)=\frac{\partial\langle\xi_j\rangle}{\partial\zeta_\alpha}. \qquad (4.4.19)$$

Ceci compte tenu de ce que

$$\frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_\beta} = -\operatorname{Sp} w \int_0^1 d\lambda \int d^3x \left(\xi_j(x, \lambda) - \langle \xi_j \rangle\right) \hat{\zeta}_\beta^{(0)}, \quad \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\beta} = \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial Y_\alpha}.$$

En substituant (4.4.19) dans (4.4.17), on obtient pour $\omega \to 0$ la formule asymptotique suivante

$$G_{ij}^{(+)}(0, \omega) \xrightarrow[\omega \to 0]{} G_{ij}^{(0)}(0) - \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_\alpha} - i\omega (\xi_i; \xi_j), \qquad (4.4.20)$$

où

$$(\xi_i; \xi_j) = \beta \int_0^\infty d\tau \int d^3x \int_0^1 d\lambda \operatorname{Sp} w \left(\xi_i'(x, \tau; \lambda) - \langle \xi_i' \rangle\right) \xi_j(0),$$

$$\xi_i'(x) = \xi_i(x) - \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial \zeta_\alpha} \hat{\zeta}_\alpha(x);$$

d'où

$$\lim_{\omega \to 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = G_{ij}^{0}(0) - \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_\alpha}. \qquad (4.4.21)$$

(Il est également facile d'obtenir cette formule directement à partir des relations ergodiques (4.2.1).)

On voit ainsi que les valeurs limites de la fonction de Green $G_{ij}^{(+)}(k, \omega)$ (4.4.18) et (4.4.21) ne coïncident pas, de plus

$$\lim_{k \to 0} G_{ij}^{(+)}(k, 0) - \lim_{\omega \to 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_\alpha} \qquad (4.4.22)$$

Les grandeurs $(\xi_i; \xi_j)$ jouent ultérieurement un rôle important, car elles permettent d'exprimer différents coefficients cinétiques. En vertu de (4.4.20), (4.4.21) on peut exprimer ces grandeurs en fonction de la fonction de Green retardée $G_{ij}^{(+)}(k, \omega)$

$$(\xi_i; \xi_j) = i \left. \frac{\partial G_{ij}^{(+)}(0, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega \to 0}. \qquad (4.4.23)$$

La différence des valeurs limites des fonctions de Green donnée par la formule (4.4.22) peut s'écrire sous forme symétrique

$$\lim_{k \to 0} G_{ij}^{(+)}(k, 0) - \lim_{\omega \to 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_\beta}, \qquad (4.4.24)$$

où $s = s(\zeta)$ est la densité d'entropie dans l'état d'équilibre statistique

$$s(\zeta) = -\mathcal{V}^{-1} \operatorname{Sp} w \ln w = -\Omega/\mathcal{V} + Y_\alpha \zeta_\alpha$$

considérée comme une fonction des paramètres ζ_α. Pour vérifier cette formule remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{\Omega}{\mathcal{V}}=\zeta_\alpha .$$

C'est pourquoi

$$\partial s/\partial\zeta_\alpha = Y_\alpha ,$$

d'où la formule (4.4.24).

En vertu de (4.1.7) la grandeur $\lim\limits_{\omega\to 0} G_{ij}^{(+)}(0,\ \omega)$ donne la réponse du système à un champ homogène lentement variable $F_j(x,\ t)\equiv$ $\equiv F_j(t)$ (le hamiltonien de l'interaction du système avec le champ est $\int d^3x F_j(t)\ \xi_j(x)$) :

$$\xi_i(t)-\langle\xi_i\rangle=\lim_{\omega\to 0} G_{ij}^{(+)}(0,\ \omega)\ F_j(t). \qquad (4.4.25)$$

C'est pourquoi la grandeur $\lim\limits_{\omega\to 0} G_{ij}^{(+)}(0,\ \omega)$ est appelée *susceptibilité adiabatique généralisée du système.*

En utilisant (4.4.24), on récrit la formule (4.4.21) sous la forme

$$\lim_{\omega\to 0} G_{ij}^{(+)}(0,\ \omega)=G_{ij}^{0}(0)-\beta\frac{\partial\langle\xi_i\rangle}{\partial Y_\alpha}\frac{\partial^2 s}{\partial\zeta_\alpha\,\partial\zeta_\beta}\frac{\partial\langle\xi_j\rangle}{\partial Y_\beta}. \qquad (4.4.26)$$

Pour élucider le sens physique de cette relation, remarquons que lors d'une variation lente du champ extérieur homogène, on peut supposer que le système se trouve à l'état d'équilibre correspondant à la valeur instantanée du champ $F_j(t)$. L'opérateur statistique de cet état est déterminé par l'expression suivante

$$w_F=\exp\left\{\Omega_F-Y_\alpha(F)\,\hat{\gamma}_\alpha-Y_0(F)\,F_j(t)\int d^3x\,\xi_j(x)\right\}, \qquad (4.4.27)$$

où les forces thermodynamiques $Y_\alpha(F)$ dépendent également de la valeur instantanée du champ extérieur et sont déterminées à partir de la condition que l'entropie du système est indépendante du temps, à savoir

$$s_F = -\mathrm{Sp}\ w_F \ln w_F ,$$

et que les valeurs moyennes de tous les opérateurs γ_α à l'exception de l'opérateur d'énergie sont indépendantes du temps. La dernière condition découle de ce que ces opérateurs commutent avec le hamiltonien total du système, y compris le hamiltonien de l'interaction $F_j(t)\int d^3x\,\xi_j(x)$ du système avec le champ extérieur.

Ainsi nous avons les conditions suivantes pour trouver la dépendance des forces thermodynamiques du champ

$$\frac{\partial s_F}{\partial t}=\frac{\partial s_F}{\partial F_j}\frac{\partial F_j}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Sp} w_F\hat{\zeta}_\alpha=\frac{\partial F_j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial F_j}\operatorname{Sp} w_F\hat{\zeta}_\alpha=0, \qquad \alpha\neq 0,$$

ou

$$\frac{\partial s_F}{\partial F_j}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial F_j}\operatorname{Sp} w_F\hat{\zeta}_\alpha=0, \quad \alpha\neq 0. \tag{4.4.28}$$

Nous allons trouver maintenant à l'aide de l'opérateur statistique w_F les grandeurs $\xi_i(t)\equiv \operatorname{Sp} w_F\xi_i$ en approximation linéaire par rapport à F_j

$$\xi_i(t)=\operatorname{Sp} w\xi_i+\left(\frac{\partial}{\partial F_j}\operatorname{Sp} w_F\hat{\xi}_i\right)_{F=0}F_j(t),$$

où w est l'opérateur statistique (4.4.27) pour $F_j=0$. Si le champ homogène varie lentement, on a la formule (4.4.25). C'est pourquoi on doit avoir l'égalité suivante

$$\lim_{\omega\to 0} G_{ij}^{(+)}(0,\omega)=\left(\frac{\partial}{\partial F_j}\operatorname{Sp} w_F\hat{\xi}_i\right)_{F=0}. \tag{4.4.29}$$

On peut voir que cette relation coïncide exactement avec la formule (4.4.26). A cet effet, calculons les dérivées $(\partial Y_\alpha/\partial F_j)_{F=0}$. Remarquant que

$$s_F=-\mathscr{V}^{-1}\Omega_F+Y_\alpha(F)\,\zeta_\alpha(F)+Y_0(F)\,F_j\langle\xi_j\rangle_F,$$

et utilisant les formules

$$\frac{\partial}{\partial Y_\alpha(F)}\frac{\Omega_F}{\mathscr{V}}=\zeta_\alpha(F), \quad \alpha\neq 0, \qquad \frac{\partial}{\partial Y_0(F)}\frac{\Omega_F}{\mathscr{V}}=\zeta_0(F)+F_j\langle\xi_j\rangle_F,$$

$$\frac{\partial}{\partial F_j}\frac{\Omega_F}{\mathscr{V}}=Y_0(F)\langle\xi_j\rangle_F,$$

où

$$\langle\xi_j\rangle_F=\operatorname{Sp} w_F\hat{\xi}_j, \qquad \zeta_\alpha(F)=\operatorname{Sp} w_F\hat{\zeta}_\alpha,$$

on peut écrire la condition (4.4.28) comme suit

$$Y_\alpha(F)\frac{\partial\zeta_\alpha(F)}{\partial F_j}+Y_0(F)\,F_i\frac{\partial\langle\xi_i\rangle_F}{\partial F_j}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial F_j}\frac{\partial}{\partial Y_\alpha(F)}\frac{\Omega_F}{\mathscr{V}}=0, \quad \alpha\neq 0.$$

Posant ici $F_j=0$, on trouve

$$Y_\alpha\left\{\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\beta}\left(\frac{\partial Y_\beta}{\partial F_j}\right)_{F=0}+Y_0\frac{\partial\langle\xi_j\rangle}{\partial Y_\alpha}\right\}=0,$$

$$\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\beta}\left(\frac{\partial Y_\beta}{\partial F_j}\right)_{F=0}+Y_0\frac{\partial\langle\xi_j\rangle}{\partial Y_\alpha}=0, \quad \alpha\neq 0,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial Y_\alpha}{\partial F_j}\right)_{F=0}=-\beta\,\frac{\partial\langle\xi_j\rangle}{\partial\zeta_\alpha}.$$

15–0393

En utilisant cette relation, on a

$$\left(\frac{\partial w_F}{\partial F_j}\right)_{F=0} = -\beta w \int_0^1 d\lambda \int d^3x\,(\xi_j(x,\ \lambda) - \langle \xi_j \rangle) - \\ -\beta \frac{\partial w}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_\alpha}. \qquad (4.4.30)$$

En substituant cette formule dans (4.4.29), on obtient la relation (4.4.26).

On remarque que le terme G^0_{ij} (0) dans la formule (4.4.26) correspond au premier terme dans la formule (4.4.30) et, par conséquent, la grandeur G^0_{ij} (0) est la susceptibilité généralisée pour des forces thermodynamiques constantes. D'un autre côté, conformément à (4.4.18) la grandeur G^0_{ij} (0) est la valeur limite de la fonction $G^{(+)}_{ij}$ $(\boldsymbol{k},\ 0)$ pour $\boldsymbol{k} \to 0$. C'est pourquoi le comportement de la fonction de Green pour des $\boldsymbol{k}$ petits (et $\omega = 0$) est déterminé par les susceptibilités généralisées pour des forces thermodynamiques constantes. Ceci est lié à ce que le cas envisagé correspond aux perturbations $F_i(\boldsymbol{x},\ t) \equiv F_i(\boldsymbol{x})$ localisées dans un domaine restreint de l'espace, c'est-à-dire $F_i(\boldsymbol{x}) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$. La composante de Fourier $F_i(\boldsymbol{k})\,\delta(\omega)$ n'aura alors pas de singularité en forme de delta par rapport à $\boldsymbol{k}$ et, par conséquent, les perturbations ne pourront pas changer les forces thermodynamiques, à la différence de ce qui se passe pour $\boldsymbol{k} = 0$ et $\omega \to 0$.

Nous allons enfin considérer le comportement de la fonction de Green au voisinage des pôles donnés par l'équation

$$\det(\omega - T(\boldsymbol{k})) = 0 \qquad (4.4.31)$$

(le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$, comme nous l'avons déjà noté est petit, $kl \ll 1$, où l est la longueur du libre parcours moyen des particules). Les formules (4.4.17) se simplifient notablement si pour les opérateurs ξ_i on prend les opérateurs des densités ζ_α, correspondant aux intégrales additives du mouvement γ_α. Dans ce cas, la fonction de Green de ces opérateurs $G^{(+)}_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ s'annule pour $\boldsymbol{k} = 0$, $G^{(+)}_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(0,\ \omega) = 0$. En effet, posons $\boldsymbol{k} = 0$ dans la formule (4.4.17) et substituons au lieu des opérateurs $\xi_i(\boldsymbol{x})$ les opérateurs $\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})$. En utilisant les formules (4.4.19) on a alors

$$G^0_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(0) = -G^p_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(0,\ \omega) = \beta \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\rho}, \qquad G'_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(0,\ \omega) = 0,$$

d'où l'égalité $G^{(+)}_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(0,\ \omega) = 0$.

Pour ω et $\boldsymbol{k}$ petits au voisinage des pôles de la fonction de Green la somme des termes $G^0_{\zeta_\alpha \zeta_\rho} + G^p_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}$ est essentielle pour cette

fonction. En ne conservant que les termes principaux, on a

$$G^{(+)}_{\zeta_\alpha \zeta_\rho}(\boldsymbol{k}, \omega) \approx -\beta \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\delta} \left(\frac{T(k)}{\omega - T(k) + i0} \right)_{\delta\rho} \qquad (4.4.32)$$

(dans cette formule asymptotique, nous avons omis les termes disparaissant pour $\boldsymbol{k} \to 0$, $\omega \to 0$).

Aux pôles (4.4.31) des fonctions de Green correspondent une ou plusieurs relations entre les fréquences et le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Ces relations donnent les fréquences et les décréments d'amortissement des oscillations faiblement amorties susceptibles de se propager dans le système envisagé. C'est à cause de ces oscillations qu'il est impossible de permuter les passages à la limite $\omega \to 0$, $\boldsymbol{k} \to 0$ (4.4.22).

Remarquons que les formules asymptotiques que nous avons obtenues ne sont vraies que pour les systèmes normaux, c'est-à-dire pour les systèmes dans lesquels il n'y a pas de perturbation spontanée de la symétrie. Par contre, si la symétrie est spontanément perturbée, des branches d'oscillations basse fréquence supplémentaires apparaissent (voir § 5.4).

CHAPITRE 5

ÉQUATIONS CINÉTIQUES POUR LES SYSTÈMES QUANTIQUES

§ 5.1. Equations cinétiques dans le cas d'une interaction faible

5.1.1. Etape cinétique de l'évolution. Dans le § 4.2 nous avons montré que si un système hors d'équilibre est le siège de processus tant rapides que lents auxquels correspondent des temps de relaxation différant notablement les uns des autres, on peut donner un description abrégée des états hors d'équilibre. Dans ce cas, pour décrire les états hors d'équilibre, on peut introduire un certain ensemble de certains paramètres (que nous avons désignés par γ_α pour les systèmes homogènes et par $\zeta_\alpha(x)$ pour les systèmes non homogènes) qui varient lentement dans le temps. La vitesse de variation de ces paramètres est déterminée soit par une interaction faible, soit par des gradients petits, soit par les deux facteurs ensemble. La structure des opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ et $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ correspondant aux paramètres γ_α et $\zeta_\alpha(x)$ est déterminée par le hamiltonien $\mathscr{H}_0$ seulement.

Si après avoir décomposé le hamiltonien du système en $\mathscr{H}_0$ et V on n'obtient pas une hiérarchie des temps de relaxation dans un système spatialement homogène, il n'est pas question d'une description simplifiée. Dans ce cas, on peut seulement parler de l'établissement de l'état d'équilibre sans étapes intermédiaires, de plus ce processus peut être décrit à l'aide seulement des équations du mouvement pour l'opérateur statistique exact $\rho(t)$.

Dans ce chapitre, nous supposerons que le hamiltonien principal $\mathscr{H}_0$ coïncide avec le hamiltonien de l'énergie cinétique des particules

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2m}\int d^3x \nabla\psi^+(x)\,\nabla\psi(x) = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p,$$

ou avec le hamiltonien des quasi-particules libres

$$\mathscr{H}_0 = \sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i \tag{5.1.1}$$

(a_i, a_i^+ sont les opérateurs d'annihilation et de création d'une quasi-particule de nombres quantiques i et d'énergie ε_i; les opérateurs $\psi(x)$, a_p ont le même sens que dans le chapitre 2).

Le hamiltonien total du système $\mathscr{H}$ se compose du hamiltonien $\mathscr{H}_0$ et du hamiltonien de l'interaction V que nous supposerons avoir la structure suivante

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x_1 \, d^3x_2 \psi^+(x_1) \psi^+(x_2) V(x_1 - x_2) \psi(x_2) \psi(x_1)$$

pour les particules et la structure

$$V = \frac{1}{4\mathscr{V}} \sum_{1234} \Phi(12;\ 34) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \tag{5.1.2}$$

pour les quasi-particules, où Φ (12 ; 34) est l'amplitude de l'interaction des quasi-particules dans les états $1 \equiv i_1$, $2 \equiv i_2$, etc. (dans l'expression du hamiltonien de l'interaction des quasi-particules pour plus de simplicité nous n'avons pas introduit les termes décrivant les interactions ternaires, quaternaires et plus complexes des quasi-particules).

Pour une interaction suffisamment faible V (ou pour une densité de particules suffisamment faible) on voit apparaître l'étape cinétique de l'évolution où l'état du système peut être décrit par une fonction de distribution à une particule, jouant le rôle des paramètres $\zeta_\alpha(x)$ introduits dans 4.2.2. Pour s'en rendre compte, en vertu de 4.2.1, 4.2.3 on doit envisager l'expression asymptotique dans le domaine des temps grands de l'opérateur statistique $\exp(-i\mathscr{H}_0 t)\, \rho \exp(i\mathscr{H}_0 t)$ (ρ étant l'état initial de l'opérateur statistique correspondant à un état spatialement homogène).

Nous envisagerons l'ensemble des fonctions de distribution à particules multiples et tiendrons compte simplement du principe d'affaiblissement des corrélations en introduisant la fonctionnelle génératrice $\mathscr{F}_t(u, u^*)$ pour l'opérateur statistique $\exp(-i\mathscr{H}_0 t) \times \times \rho \exp(i\mathscr{H}_0 t)$

$$\mathscr{F}_t(u,\ u^*) = \operatorname{Sp} e^{-i\mathscr{H}_0 t} \rho e^{i\mathscr{H}_0 t} e^{\sum_1 u_1^* a_1^+} e^{\sum_1 u_1 a_1}.$$

Remarquant que

$$e^{i\mathscr{H}_0 t} a_1 e^{-i\mathscr{H}_0 t} = e^{-i\varepsilon_1 t} a_1,$$

et en effectuant une permutation cyclique des opérateurs sous le signe de la trace, on a

$$\mathscr{F}_t(u,\ u^*) = \operatorname{Sp} \rho \exp\Big(\sum_1 u_1^* e^{i\varepsilon_1 t} a_1^+\Big) \exp\Big(\sum_1 u_1 e^{-i\varepsilon_1 t} a_1\Big),$$

d'où

$$\mathscr{F}_t(u,\ u^*) = \mathscr{F}_0(ue^{-i\varepsilon t},\ u^* e^{i\varepsilon t}),$$

où $\mathscr{F}_0(u, u^*)$ est la valeur initiale de la fonctionnelle $\mathscr{F}_t(u, u^*)$.

Rappelons que la fonctionnelle corrélationnelle $G_t(u, u^*)$ est liée à la fonctionnelle $\mathcal{F}_t(u, u^*)$ par la relation (2.4.10)

$$G_t(u, u^*) = \ln \mathcal{F}_t(u, u^*).$$

C'est pourquoi on a

$$G_t(u, u^*) = G_0(ue^{-i\varepsilon t}, u^* e^{i\varepsilon t}).$$

D'un autre côté, la fonctionnelle corrélationnelle $G_0(u, u^*)$ peut s'exprimer en fonction des fonctions de corrélation initiales

$$G_0(u, u^*) = \sum_{11'} f_{1,1'} u_{1'}^* u_1 + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1\ldots n} \sum_{1'\ldots n'} g_{1,\ldots,n;1',\ldots,n'} u_{1'}^* \ldots u_{n'}^* u_1 \ldots u_n,$$

où $f_{1,1'}$ est la matrice initiale de densité à une particule

$$f_{1,1'} = \operatorname{Sp} \rho a_{1'}^* a_1$$

et $g_{1,\ldots,n;1',\ldots,n'}$ sont les fonctions corrélationnelles initiales La fonctionnelle corrélationnelle $G_t(u, u^*)$ est ainsi donnée par la formule suivante

$$G_t(u, u^*) = \sum_{11'} f_{1,1'} u_{1'}^* u_1 e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1\ldots n} \sum_{1'\ldots n'} (g_{1,\ldots,n;1',\ldots,n'} u_{1'}^* \ldots u_{n'}^* u_1 \ldots \\ \ldots u_n \exp it(\varepsilon_{1'} + \ldots + \varepsilon_{n'} - \varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_n). \quad (5.1.3)$$

Nous allons montrer que pour $t \to \infty$ le second terme dans cette formule tend vers zéro, c'est pourquoi

$$G_t(u, u^*) \xrightarrow[t\to\infty]{} \sum_{11'} f_{1,1'} u_{1'}^* u_1 e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)}. \quad (5.1.4)$$

A cet effet remarquons que, dans le cas envisagé, lorsque l'état initial est spatialement homogène, $f_{1,1'}$ est proportionnel à $\delta_{p_1, p_1'}$, c'est-à-dire

$$f_{1,1'} = \delta_{p_1, p_1'} f_{\sigma_1, \sigma_1'}(p_1),$$

où σ est l'ensemble des nombres quantiques qui ne contiennent pas l'impulsion (par exemple, ce peuvent être des variables spinorielles, des nombres quantiques discrets caractérisant le mouvement transversal des électrons dans le champ magnétique, etc.). Pour ce qui est des fonctions de corrélation, en vertu du principe d'affaiblissement des corrélations exprimé par (2.4.14), elles ne contiennent qu'une seule singularité sous la forme de δ: $\delta_{p_1+\ldots+p_n, p_1'+\ldots+p_n'}$. Par conséquent, les intégrales apparaissant lors du passage à la

limite thermodynamique dans le second terme de (5.1.3), tendent vers zéro pour $t \to \infty$, alors que les grandeurs

$$\mathcal{I}_t \equiv \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3p f_{\sigma,\sigma'}(p) u^*_{\sigma' p} u_{\sigma p} \exp it(\varepsilon_{\sigma'}(p) - \varepsilon_\sigma(p))$$

sont, dans le cas général, différentes de zéro pour $t \to \infty$. En effet si, par exemple, $\varepsilon_\sigma(p)$ est la somme de deux termes, dont l'un ne dépend que de p, et l'autre que de σ, $\varepsilon_\sigma(p) = \varepsilon(p) + \varepsilon_\sigma$, l'intégrale sera, dans le cas général, une certaine fonction oscillatoire du temps. Par contre, si $\varepsilon_\sigma(p)$ ne peut être décomposé en une somme de tels termes, alors, pour $t \to \infty$, l'intégrale $\mathcal{I}_t$ tendra vers la valeur

$$\mathcal{I} = \sum_{\sigma} \int d^3p f_{\sigma,\sigma}(p) u^*_{\sigma p} u_{\sigma p}.$$

La formule (5.1.4) contient de toute évidence ces deux éventualités si l'on suppose que dans le second cas la grandeur $f_{1,1'}$ ne contient que les termes diagonaux, c'est-à-dire $f_{1,1'} = f_1 \delta_{1,1'}$.

Ainsi

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) \xrightarrow[t\to\infty]{} \exp\left\{\sum_{11'} f_{1,1'} u^*_{1'} u_1 e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)}\right\}. \tag{5.1.5}$$

Rappelant (voir (3.1.21)) que la fonctionnelle $\exp \sum_{11'} f_{1,1'} u^*_{1'} u_1$ correspond à l'opérateur statistique d'un gaz parfait hors d'équilibre (3.1.3), on peut récrire la formule (5.1.5) sous la forme

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) \xrightarrow[t\to\infty]{} \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} f_{1,1'}) e^{\sum_1 u^*_1 a^+_1} e^{\sum_1 u_1 a_1},$$

d'où [86, 87]

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \rho^{(0)}(e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} f_{1',1}), \tag{5.1.6}$$

où $f_{1,1'} = \operatorname{Sp} \rho a^+_{1'} a_1$ et

$$\rho^{(0)}(f) = \exp\left\{\Omega - \sum_{ii'} Y_{i,i'} a^+_i a_{i'}\right\},$$

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) a^+_{1'} a_1 = f_{1,1'}, \quad \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) = 1.$$

Cette relation, qui est une relation ergodique pour le hamiltonien $\mathcal{H}_0$, est asymptotiquement vraie pour $t \gg \tau_0$, où τ_0 est le temps de chaotisation, égal en ordre de grandeur à $\tau_0 \sim r_c/\bar{v}$ ($\bar{v}$ étant la vitesse moyenne des particules et r_c le rayon de corrélation, qui détermine les distances pour lesquelles les fonctions de corrélations disparaissent).

Ainsi, on voit que si $\mathcal{H}_0$ est l'opérateur de l'énergie cinétique, les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ coïncideront avec les opérateurs $a^+_{p\sigma} a_{p\sigma'}$. Les

opérateurs $\hat{f}_p(x)$ joueront le rôle des opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ (qui sont les opérateurs des densités de grandeurs $\hat{\gamma}_\alpha$)

$$\hat{f}_p(x) \int d^3x' e^{-ipx'} \psi^+ \left(x - \frac{x'}{2}\right) \psi\left(x + \frac{x'}{2}\right), \qquad (5.1.7)$$

qui correspondent à la fonction de distribution de Wigner. En effet, remarquant que

$$\psi(x) = \mathcal{V}^{-1/2} \sum_p a_p e^{ipx},$$

on a

$$a_p^+ a_p = \int d^3x \hat{f}_p(x).$$

(Ici et plus loin dans ce paragraphe nous omettons l'indice discret σ.)

Nous allons maintenant trouver les opérateurs des densités de flux, correspondant à l'opérateur $\hat{f}_p(x)$. A cet effet nous allons calculer le commutateur $[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)]$. Comme

$$i[\mathcal{H}_0, \psi(x)] = \frac{i}{2m} \Delta\psi(x),$$

on a

$$i[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)] = \frac{i}{m} \int d^3x' e^{-ipx'} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x'_k} \psi^+ \left(x - \frac{x'}{2}\right) \psi\left(x + \frac{x'}{2}\right).$$

En intégrant par parties, on a

$$i[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)] = -\frac{p_k}{m} \frac{\partial \hat{f}_p(x)}{\partial x_k}. \qquad (5.1.8)$$

Compte tenu de la relation (4.2.20) on voit que les opérateurs

$$\hat{f}_{p,k}(x) = \frac{p_k}{m} \hat{f}_p(x) \qquad (5.1.9)$$

jouent maintenant le rôle des opérateurs des densités de flux. Remarquons qu'à partir de (5.1.8) on a la relation *)

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{f}_p(x) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = \hat{f}_p\left(x - \frac{p}{m}\tau\right). \qquad (5.1.10)$$

On voit que les opérateurs des flux $\hat{f}_{p,k}(x)$ à un facteur c-numérique p_k/m près coïncident avec les opérateurs des densités $\hat{f}_p(x)$. Ceci permet de simplifier l'équation intégrale (4.2.55) qui, pour le $\mathcal{H}_0$ choisi, décrit l'étape cinétique de l'évolution.

---

*) Pour vérifier que (5.1.10) est vrai, il faut tenir compte de ce que

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{f}_p(x) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = \hat{f}_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} [\mathcal{H}_0, [\ldots, [\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)] \ldots]] \tau^n.$$

L'équation (4.2.55) contient l'opérateur statistique d'équilibre local w qui dans le cas envisagé s'écrit sous la forme

$$w(Y_{p}(x')) = \exp\left\{\Omega - \sum_{p'} \int d^3x' \ _{p'}(x')\, \hat{f}_{p'}(x'\right\}. \quad (5.1.11)$$

En utilisant la formule (5.1.10), on a

$$e^{i\mathscr{H}_0\tau} w(Y_{p'}(x'))\, e^{-i\mathscr{H}_0\tau} = w\left(Y_{p'}\left(x' + \frac{p'}{m}\tau\right)\right). \quad (5.1.12)$$

Nous allons maintenant montrer que la relation (4.2.49) reliant les forces thermodynamiques $Y_p(x)$ et la fonction de distribution de Wigner $f_p(x)$

$$\operatorname{Sp} \sigma(f)\, \hat{f}_p(x) = f_p(x), \quad (5.1.13)$$

dans le cas envisagé peut être transformée comme suit :

$$\operatorname{Sp} w(Y_p(x'))\, \hat{f}_p(x) = f_p(x). \quad (5.1.14)$$

A cet effet nous allons écrire l'équation intégrale (4.2.55) pour l'opérateur statistique grossier $\sigma(f(x'))$:

$$\sigma(f) = w(Y) - \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}\Big\{ i[\mathscr{H}_0, w(Y)] + $$
$$ + i[V, \sigma(f)] + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta f_p(x)} L_p(x; f)\Big\} e^{-i\mathscr{H}_0\tau}, \quad (5.1.15)$$

où

$$L_p(x, f) = -\frac{p_k}{m}\frac{\partial f_p(x)}{\partial x_k} + i \operatorname{Sp}\sigma(f)[V, \hat{f}_p(x)].$$

En multipliant cette équation par $\hat{f}_p(x)$ et en prenant la trace, on obtient à partir de (5.1.8), (5.1.13)

$$f_p(x) - \operatorname{Sp} w(Y)\, \hat{f}_p(x) =$$
$$= \frac{p_k}{m} \int_{-\infty}^{0} d\tau \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ f_p\left(x + \frac{p}{m}\tau\right) - \operatorname{Sp} w(Y)\, \hat{f}_p\left(x + \frac{p}{m}\tau\right)\right\}. \quad (5.1.16)$$

En égalant les termes du même ordre par rapport aux gradients dans les deux membres de cette égalité, on obtient finalement la formule (5.1.14). (Cette formule garantit l'absence dans (5.1.16) de termes séculaires de la théorie des perturbations par rapport aux gradients.) La formule (5.1.14) donne $Y_p(x)$ et par là même $w(Y)$ en tant que fonctionnelle de $f_p(x)$, $w(Y(x')) \equiv w(f_{p'}(x')) =$

$= \rho^{(0)}(f_{p'}(x'))$. Nous allons montrer maintenant que l'équation intégrale (5.1.15) peut être transformée comme suit

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\mathcal{H}_0\tau} \Big\{ [V, \sigma(f)] + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta f_p(x)} \operatorname{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(x)] \Big\}_{f_p(x) \to f_p\left(x - \frac{p}{m}\tau\right)} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{5.1.17}$$

Remarquons à cet effet qu'à partir de (5.1.12), (5.1.14) on a la relation

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} w(f_{p'}(x')) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = w\left(f_{p'}\left(x' + \frac{p'}{m}\tau\right)\right).$$

En dérivant cette relation par rapport à τ et en posant $\tau = 0$, on trouve

$$i[\mathcal{H}_0, w(f)] = i[\mathcal{D}, w(f)],$$

où $\mathcal{D}$ est un opérateur fonctionnel donné par la formule

$$\mathcal{D} = -i \sum_p \int d^3x \frac{p_k}{m} \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_k} \frac{\delta}{\partial f_p(x)}.$$

En utilisant cette formule, nous allons écrire l'équation intégrale (5.1.15) sous la forme

$$\sigma(f) = w(f) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\mathcal{H}_0\tau} \Big\{ [V, \sigma(f)] - [\mathcal{D}, \sigma(f) - w(f)] + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta f_p(x)} \operatorname{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(x)] \Big\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{5.1.18}$$

Remarquons maintenant que si un certain opérateur B a la structure

$$B = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\tau(H+U)} A e^{-i\tau(H+U)}, \tag{5.1.18'}$$

où H, U et A sont des opérateurs, on a alors en vertu de (4.3.18)

$$B = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\tau H} \{A - i[U, B]\} e^{-i\tau H}. \tag{5.1.18''}$$

En posant ici

$$H = \mathcal{H}_0 - \mathcal{D}, \quad U = \mathcal{D},$$

$$A = [V, \sigma(f)] - [\mathcal{D}, \sigma(f) - w(f)] + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta f_p(x)} \operatorname{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(x)],$$

on obtient en utilisant l'équation (5.1.18)

$$\sigma(f) = w(f) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\tau(\mathcal{H}_0 - \mathcal{Z})} \Big\{ [V, \sigma(f)] +$$
$$+ \sum_{p} \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta f_p(x)} \operatorname{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(x)] \Big\} e^{-i\tau(\mathcal{H}_0 - \mathcal{Z})}.$$

Puis compte tenu de ce que

$$e^{-i\tau\mathcal{Z}} Q(f) e^{i\tau\mathcal{Z}} = Q(f)\big|_{f_p(x) \to f_p\left(x - \frac{p}{m}\tau\right)}, \quad w(f) = \rho^{(0)}(f),$$

où $Q(f)$ est une fonctionnelle arbitraire de $f_p(x)$, on obtient l'équation (5.1.17).

Remarquons que cette équation qui se rapporte aux états non homogènes coïncide du point de vue formel avec l'équation (4.2.11) pour le cas homogène ; il suffit pour cela de tenir compte de ce que

$$f_p\left(x - \frac{p}{m}\tau\right) = e^{ia\tau} f_p(x),$$

où

$$a = i \frac{p_k}{m} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

En d'autres termes, dans le cas non homogène on peut également utiliser l'équation intégrale (4.2.11) si pour les paramètres γ_α on prend la fonction de distribution de Wigner ou la matrice de densité à une particule $f_{p,p'} = \operatorname{Sp} \rho a_{p'}^{+} a_p$ qui est liée d'une manière univoque à cette fonction (dans ce dernier cas la grandeur $i(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})$ joue le rôle de $a_{\alpha\beta}$).

5.1.2. Equations cinétiques pour les gaz de bosons et de fermions en seconde approximation de la théorie des perturbations. Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la matrice de densité à une particule à laquelle correspondent les opérateurs $\hat{f}_{i,i'} = a_{i'}^{+} a_i$, où i est l'ensemble des nombres quantiques caractérisant l'état individuel d'une particule, joue le rôle de paramètres γ_α qui décrivent l'état hors d'équilibre d'un système des particules à interaction faible. Comme nous l'avons vu, cette description apparaît pour $t \gg \tau_0$.

Il s'agit maintenant d'établir la loi qui régit les variations dans le temps de la matrice de densité à une particule $f_{i,i'}$ [16]. A cet effet, nous allons faire appel à l'équation (4.2.15) qui détermine la variation dans le temps des paramètres γ_α dans le cas d'une

interaction faible. A l'étape cinétique de l'évolution, cette équation, en vertu de (4.2.15), peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial f_{i,\,i'}}{\partial t}=\mathscr{L}^{(0)}_{i,\,i'}(f)+L^{(1)}_{i,\,i'}(f)+L^{(2)}_{i,\,i'}(f)+\ldots,$$

où

$$\mathscr{L}^{(0)}_{i,\,i'}(f)=i\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,[\mathscr{H}_0,\,a^+_{i'}a_i],\qquad L^{(1)}_{i,\,i'}(f)=i\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,[V,\,a^+_{i'}a_i],$$

$$L^{(2)}_{i,\,i'}(f)=-\int\limits_{-\infty}^{0}d\tau\,e^{\eta\tau}\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\Big[V(\tau),\,[V,\,a^+_{i'}a_i]+$$

$$+i\sum_{i_1i_1'}a^+_{i_1'}a_{i_1}\frac{\partial L^{(1)}_{i,\,i'}(f)}{\partial f_{i_1,\,i_1'}}\Big],\qquad \eta\to+0,\qquad(5.1.19)$$

$\rho^{(0)}(f)$ étant l'opérateur statistique d'un gaz parfait hors l'équilibre, qui détermine les grandeurs $L^{(k)}_{i,\,i'}(f)$:

$$\rho^{(0)}(f)=\exp\Big\{\Omega(f)-\sum_{ii'}Y_{i,\,i'}(f)\,a^+_ia_{i'}\Big\},\qquad(5.1.20)$$

et Ω et $Y_{i,\,i'}$ en tant que fonctionnelles de f sont données par les formules suivantes

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)=1,\qquad \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,a^+_{i'}a_i=f_{i,\,i'}.$$

Comme nous l'avons vu dans le § 3.1, lors du calcul des valeurs moyennes des produits des opérateurs a^+_i, a_i (le moyennage s'effectuant avec l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(f)$), on peut utiliser les formules de Vick donnant dans le cas des bosons

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,a^+_1\ldots a^+_m a_{1'}\ldots a_{m'}=\sum f_{1',\,r_1}\ldots f_{m',\,r_m},$$

et dans le cas des fermions

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,a^+_1\ldots a^+_m a_{1'}\ldots a_{m'}=\sum(-1)^{\mathscr{P}}f_{1',\,r_1}\ldots f_{m',\,r_m},$$

où la sommation s'effectue sur toutes les permutations des indices $1,\ldots,m$, et $\mathscr{P}$ (dans le cas des fermions) est le nombre de permutations indispensables pour passer de la distribution des nombres $(1,\ldots,m)$ à la distribution $(r_1,\ldots,r_m)$.

Les grandeurs $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, ... contiennent les valeurs moyennes des commutateurs multiples des opérateurs $V(\tau)$ et de l'opérateur $a^+_ia_{i'}$. Pour calculer ces valeurs moyennes, il est commode d'écrire les liaisons entre les opérateurs directement sous le signe des commutateurs, car dans ce cas on a une simplification notable des calculs: primo, certaines liaisons n'influent pas sur $L^{(k)}$ et secundo, ce qui est l'essentiel, on obtient directement les combinaisons

nécessaires des matrices de densité à une particule caractéristiques pour les intégrales des collisions. Ainsi on a les relations

$$A\,[a_1^+a_2,\ B]\,C=0,\qquad A\,[a_1^+a_2^+a_3a_4,\ B]\,C=0$$

indépendamment de la disposition des liaisons entre les opérateurs A, B, C. Pour le commutateur double $[A, [B, C]]$ on a

$$[A\,[B,\ C]] = [A,\ [B, C]] = [A,\ [B,\ C]] = 0,$$

où $[A,\ [B,\ C]]$ signifie que tous les opérateurs a^+ et a de A et B sont seulement liés entre eux et aucun des opérateurs a^+ ou a de A et B n'est lié aux opérateurs de C.

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(f)\,a_1^+a_2 &\equiv a_1^+a_2 = f_{2,1},\\ \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(f)\,a_2a_1^+ &\equiv a_2a_1^+ = \delta_{1,2}+f_{2,1}, \end{aligned}\tag{5.1.21}$$

vraies pour les bosons, il est facile de voir qu'on a les formules

$$\begin{aligned} &[a_1,\ Aa_2^+B] = \{(\delta_{1,2}+f_{1,2})-f_{1,2}\}\,AB=\delta_{1,2}AB,\\ &[a_2^+a_1,\ Aa_{1'}^+Ba_{2'}] = \{f_{2',2}\,(\delta_{1',1}+f_{1,1'})-f_{1,1'}\,(\delta_{2,2'}+f_{2',2})\}\,AB, \end{aligned}\tag{5.1.22}$$

$$\begin{aligned} [a_1^+a_2a_3,\ Aa_{1'}^+Ba_{2'}^+Ca_{3'}D] &=\\ =\{f_{3',1}\,(\delta_{1',2}&+f_{2,1'})\,(\delta_{2',3}+f_{3,2'})-\\ &-(\delta_{1,3'}+f_{3',1})\,f_{2,1'}f_{3,2'}\}\,ABCD, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a_1^+a_2^+a_3a_4,\ Aa_{1'}^+Ba_{2'}^+Ca_{3'}Da_{4'}E] &=\\ =\{f_{3',1}f_{4',2}\,(\delta_{3,1'}&+f_{3,1'})\,(\delta_{4,2'}+f_{4,2'})-\\ &-(\delta_{3',1}+f_{3',1})\,(\delta_{4',2}+f_{4',2})\,f_{3,1'}f_{4,2'}\}\,ABCDE, \end{aligned}$$

où A, B, C, D, E sont des opérateurs arbitraires. Dans le cas des fermions il faut remplacer dans ces formules $\delta_{1,2}+f_{1,2}$ par $\delta_{1,2}-f_{1,2}$, car pour les fermions les liaisons sont données par les relations

$$\operatorname{Sp}\rho^{(0)}(f)\,a_1^+a \equiv a_1^+a_2+f_{2,1},\qquad \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(f)\,a_2a_1^+ \equiv a_2a_1^+=\delta_{2,1}-f_{2,1}.$$

Nous allons passer au calcul des grandeurs $\mathcal{L}^{(0)}$, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$. La grandeur $\mathcal{L}^{(0)}_{1_1,1_2}(f) \equiv \mathcal{L}^{(0)}_{1,2}(f)$ est donnée, en vertu de (5.1.1), par la formule

$$\mathcal{L}^{(0)}_{1,2}(f) = i \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) \sum_3 \varepsilon_3 [a_3^+ a_3,\ a_2^+ a_1],$$

d'où en calculant le commutateur on a

$$\mathcal{L}^{(0)}_{1,2}(f) = i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) f_{1,2}. \tag{5.1.23}$$

Puis nous allons calculer la grandeur $L^{(1)}_{1,2}$. En vertu de (5.1.2) et (5.1.19) on a

$$L^{(1)}_{1,2}(f) = \frac{i}{4\mathcal{V}} \sum_{1'2'3'4'} \Phi(1', 2'; 3', 4') [a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\ a_2^+ a_1].$$

Dans le cas des bosons $\Phi(1, 2; 3, 4) = \Phi(1, 2; 4, 3) = \Phi(2, 1; 3, 4)$. Tenant compte de cette propriété de symétrie et remarquant que $[V,\ a_2^+ a_1] = 0$, on obtient

$$L^{(1)}_{1,2}(f) = \frac{i}{4\mathcal{V}} \sum_{1'2'3'4'} \Phi(1', 2'; 3', 4') \cdot 4 [a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\ a_2^+ a_1],$$

d'où en vertu de (5.1.21)

$$L^{(1)}_{1,2}(f) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{1'2'3'4'} \Phi(1', 2'; 3', 4') f_{3',1'} (f_{1,2'} \delta_{2,4'} - f_{4',2} \delta_{1,2'}). \tag{5.1.24}$$

En introduisant les désignations

$$\varepsilon^{(0)}_{1,2} = \varepsilon_1 \delta_{1,2}, \quad \varepsilon^{(1)}_{1,2} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{1'2'} \Phi(1, 1'; 2', 2) f_{2',1'} \tag{5.1.25}$$

et en considérant $\mathcal{L}^{(0)}_{1,2}$, $L^{(1)}_{1,2}$, $\varepsilon^{(0)}_{1,2}$, $\varepsilon^{(1)}_{1,2}$ comme des éléments matriciels des matrices à une particule $\mathcal{L}^{(0)}$, $L^{(1)}$, $\varepsilon^{(0)}$, $\varepsilon^{(1)}$, on peut écrire les formules (5.1.23), (5.1.24) sous la forme

$$\mathcal{L}^{(0)} = -i[\varepsilon^{(0)}, f], \quad L^{(1)} = -i[\varepsilon^{(1)}, f]. \tag{5.1.26}$$

Les mêmes formules sont vraies pour les fermions.

Nous allons ensuite trouver $L^{(2)}_{1,2}$. En remarquant que $e^{i\mathcal{H}_0\tau} a_1 e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = a_1 e^{-i\varepsilon_1\tau}$, on peut, en vertu de (5.1.2), écrire $V(\tau)$ sous la forme

$$V(\tau) = \frac{1}{4\mathcal{V}} \sum_{1234} \Phi_\tau(1, 2; 3, 4) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, \tag{5.1.27}$$

$$\Phi_\tau(1, 2; 3, 4) = \Phi(1, 2; 3, 4) \exp i\tau(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

En tenant compte de la propriété de symétrie de l'amplitude

$\Phi(1, 2;, 3, 4)$, on met des liaisons sous le signe du commutateur double et en utilisant les formules (5.1.2), (5.1.27), on obtient

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f)\,[V(\tau),\,[V,\,a_2^+a_1]] = A_{2,1} + A_{1,2}^*,$$

où

$$A_{2,1} = \frac{1}{16\mathcal{V}^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_\tau(1'', 2''; 3'', 4'')\,\Phi(1', 2'; 3', 4') \times$$

$$\times \{16\,[a_{1''}^+a_{2''}^+a_{3''}a_{4''},\,[a_{1'}^+a_{2'}^+a_{3'}a_{4'},\,a_2^+a_1]] +$$

$$+ 8\,[a_{1''}^+a_{2''}^+a_{3''}a_{4''},\,[a_{1'}^+a_{2'}^+a_{3'}a_{4'},\,a_2^+a_1]] +$$

$$+ 8\,[a_{1''}^+a_{2''}^+a_{3''}a_{4''},\,[a_{1'}^+a_{2'}^+a_{3'}a_{4'},\,a_2^+a_1]]\},$$

d'où

$$A_{2,1} = \frac{1}{2\mathcal{V}^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_\tau(1'', 2''; 3'', 4'')\,\Phi(1', 2'; 3', 4') \times$$

$$\times \{2f_{3'',1''}f_{3',1'}\delta_{2',1}(f_{4'',2}\delta_{4',2''} - f_{4',2''}\delta_{4'',2}) +$$

$$+ f_{3'',1''}(f_{3',2''}\delta_{4'',1'} - f_{4'',1'}\delta_{3',2''})(f_{1,2'}\delta_{2,4'} - f_{4',2}\delta_{1,2'}) +$$

$$+ \delta_{4',2}[f_{3',1''}f_{1,2''}(\delta_{1',3''} + f_{3'',1'})(\delta_{4'',2'} + f_{4'',2'}) -$$

$$- f_{4'',2'}f_{3'',1'}(\delta_{3',1''} + f_{3',1''})(\delta_{1,2''} + f_{1,2''})]\}. \quad (5.1.28)$$

Pour trouver $L_{1,2}^{(2)}$, il faut préalablement calculer

$$-i \sum_{34} \frac{\partial L_{1,2}^{(1)}}{\partial f_{4,3}} \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f)\,[V(\tau),\,a_3^+a_4].$$

En utilisant (5.1.24) et en remarquant que

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f)\,[V(\tau),\,a_3^+a_4] =$$

$$= \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_\tau(1'', 2''; 3'', 4'')\,f_{3'',1''}(f_{4,2''}\delta_{3,4''} - f_{4'',3}\delta_{4,2''}),$$

on a

$$-i\sum_{34}\frac{\partial L^{(1)}_{1,2}}{\partial f_{4,3}}\operatorname{Sp}\rho^{(0)}(f)\,[V(\tau),\,a_3^+a_4]=$$

$$=\frac{1}{\mathcal{V}^2}\sum_{1'2'3'4'}\ \sum_{1''2''3''4''}\Phi(1',2';3',4')\times$$

$$\times\Phi_\tau(1'',2'';3'',4'')\{\delta_{2,4'}f_{3',1'}f_{3'',1''}(f_{1,2''}\delta_{2',4''}-f_{4'',2'}\delta_{1,2''})+$$
$$+\delta_{2,4'}f_{1,2'}f_{3'',1''}(f_{3',2''}\delta_{1',4''}-f_{4'',1'}\delta_{3',2''})-$$
$$-\delta_{1,2'}f_{3',1'}f_{3'',1''}(f_{4',2''}\delta_{2,4''}-f_{4'',2'}\delta_{4',2''})-$$
$$-\delta_{1,2'}f_{4',2}\,f_{3'',1''}(f_{3',2''}\delta_{1',4''}-f_{4'',1'}\delta_{3',2''})\}.$$

En substituant cette expression ainsi que (5.1.28) dans l'expression (5.1.19) pour $L^{(2)}_{1,2}(f)$ et en remarquant que

$$\int_{-\infty}^{0}d\tau\,e^{i\tau x+\eta\tau}=(ix+\eta)^{-1}\xrightarrow[\eta\to+0]{}\pi\delta_-(x),$$

on obtient [16]

$$L^{(2)}_{1,2}(f)=\frac{\pi}{2\mathcal{V}^2}\sum_{1'2'3'4'}\ \sum_{1''2''3''4''}\Phi(1'',2'';3'',4'')\,\Phi(1',2';3',4')\times$$
$$\times\delta_-(\varepsilon_{1''}+\varepsilon_{2''}-\varepsilon_{3''}-\varepsilon_{4''})\{f_{4'',2'}f_{3'',1'}(\delta_{3',1''}+f_{3',1''})(\delta_{1,2''}+$$
$$+f_{1,2''})-f_{3',1''}f_{1,2''}(\delta_{1',3''}+f_{3'',1'})(\delta_{4'',2'}+f_{4''\,2'})\}\,\delta_{4',2}+\text{c. h.}\qquad(5.1.29)$$

Dans le cas des fermions la grandeur $L^{(2)}_{1,2}(f)$ est donnée par une formule analogue: il suffit dans (5.1.29) de substituer $\delta_{1,2}-f_{1,2}$ au lieu de $\delta_{1,2}+f_{1,2}$.

Ainsi, l'équation cinétique pour la matrice de densité à une particule, aux termes proportionnels à V^2 près, peut s'écrire comme

$$\frac{\partial f}{\partial t}+i\,[\varepsilon,\,f]=L^{(2)}(f),\qquad(5.1.30)$$

où

$$\varepsilon_{1,2}=\varepsilon_1\delta_{1,2}+\mathcal{V}^{-1}\sum_{1'2'}\Phi(1,1';2',2)\,f_{2',1'}$$

et $L^{(2)}_{1,2}$ est donné par la formule (5.1.29).

Soulignons que le premier membre de cette équation (ou, comme on dit, la partie cinétique) contient non pas l'énergie d'une quasi-particule ε_i, mais la grandeur $\varepsilon_{1,2}$ qui dépend tant de l'interaction que de la fonction de distribution. Cette grandeur qui est l'énergie modifiée des quasi-particules, tient compte des effets du champ self-consistent.

L'équation (5.1.30) est générale, elle est vraie tant dans le cas homogène que dans le cas non homogène, les particules pouvant se trouver dans un champ extérieur. (Celui-ci donne l'ensemble des nombres quantiques i qui caractérisent l'état individuel d'une particule et son énergie ε_i ; par exemple, dans le cas d'un champ magnétique homogène, l'état d'une particule chargée peut être caractérisée par la projection de l'impulsion le long du champ, par un nombre entier non négatif n donnant l'énergie du mouvement transversal d'une particule et par un paramètre continu donnant la position du centre de l'orbite de Larmor.)

Nous allons envisager plus en détail le cas où l'état individuel d'une particule est caractérisé par une seule impulsion $\boldsymbol{p}$. Dans ce cas, il est commode de passer de la matrice de densité à une particule $f_{p,p'}$ à la fonction de distribution de Wigner $f_p(x)$. En vertu de (5.1.7), on a

$$f_p(x)=\sum_k e^{-ikx}f_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}=\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{-ikx}f_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}.$$

Dans le cas homogène, la grandeur $f_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}$ sera égale à $f_p\delta_{k,0}$. C'est pourquoi cette grandeur dans le cas d'une inhomogénéité faible aura un maximum très net pour $k=0$.

Soulignons que la grandeur $f_p(x)$ étant finie pour $\mathcal{V}\to\infty$, le produit $\mathcal{V}f_{p,p'}$, sera également fini pour $\mathcal{V}\to\infty$ (dans le cas homogène $\mathcal{V}(2\pi)^{-3}f_{p,p'}\to f_p\delta(p-p')$).

En introduisant la désignation

$$\varepsilon_p(x)=\sum_k e^{-ikx}\varepsilon_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}=$$
$$=\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{-ikx}\varepsilon_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}, \qquad (5.1.31)$$

il est facile de voir, qu'on a la relation

$$\frac{i\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{-ikx}[\varepsilon,\ f]_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}=$$
$$=\frac{i}{(2\pi)^6}\int d^3k\, d^3p'\, d^3x'\, d^3x'' e^{-ikx}\Big\{\varepsilon_{\frac{1}{2}\left(p+p'-\frac{1}{2}k\right)}(x')\times$$
$$\times f_{\frac{1}{2}\left(p+p'+\frac{1}{2}k\right)}(x'')\exp\left(-ix'\left(p-\frac{k}{2}-p'\right)+ix''\left(p+\frac{k}{2}-p'\right)\right)-$$
$$-\varepsilon_{\frac{1}{2}\left(p+p'+\frac{1}{2}k\right)}(x')\,f_{\frac{1}{2}\left(p+p'-\frac{1}{2}k\right)}(x'')\times$$
$$\times\exp\left(-ix'\left(p'-\frac{k}{2}-p\right)+ix''\left(p'+\frac{k}{2}-p\right)\right)\Big\}.$$

Dans le cas d'une inhomogénéité faible, on peut développer $\varepsilon_{\frac{1}{2}(p+p' \mp \frac{1}{2}k}(x')$ en série suivant les puissances de $x'-x$, et $f_{\frac{1}{2}(p+p' \pm \frac{1}{2}k}(x'')$ en série suivant les puissances de $x''-x$. Aux termes quadratiques par rapport au gradient de la fonction de distribution de Wigner $f_p(x)$ près, on obtient

$$\frac{i\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{-ikx}[\varepsilon, f]_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}} = \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial p}\frac{\partial f_p(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial x}\frac{\partial f_p(x)}{\partial p}.$$

C'est pourquoi l'équation (5.1.30) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial f_p(x)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial p}\frac{\partial f_p(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial x}\frac{\partial f_p(x)}{\partial p} = L_p^{(2)}(x;\ f),$$

$$L_p^{(2)}(x;\ f) = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{-ikx} L^{(2)}_{p-\frac{k}{2},\ p+\frac{k}{2}}(f).$$

Il est facile de voir que dans le cas homogène lorsque $f_{p,\,p'} = f_p \delta_{p,\,p'}$, la grandeur $L_p^{(2)}(x;\ f)$ est donnée par la formule

$$L_p^{(2)}(x;\ f) \equiv L_p^{(2)}(f) = \frac{\pi}{\mathcal{V}^2}\sum_{1234} |\Phi(1,2;\ 3,4)|^2 \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\times$$

$$\times\ \delta_{p,\,4}\{f_1 f_2(1+f_3)(1+f_4) - f_3 f_4(1+f_1)(1+f_2)\} \quad (5.1.32)$$

(nous avons tenu compte de ce que $\mathrm{Re}\,\delta_-(x) = \delta(x)$). On a une formule analogue pour les fermions, il suffit alors de remplacer la grandeur $1+f$ par $1-f$.

Dans le cas d'états faiblement non homogènes, on peut également développer la grandeur $L_p^{(2)}(x;\ f)$ suivant les gradients de $f_p(x)$. Le terme d'ordre zéro dans ce développement est donné par la formule (5.1.32) où il suffit de remplacer f_p par $f_p(x)$:

$$L_p^{(2)}(x;\ f) = L_p^{(2)}(f(x)) + \ldots$$

Ainsi, dans le cas d'une hétérogénéité petite et d'une interaction faible la fonction de distribution de Wigner satisfait à l'équation cinétique

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}\frac{\partial f_p}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x}\frac{\partial f_p}{\partial p} = L_p^{(2)}(f). \quad (5.1.33)$$

La partie cinématique de cette équation aura du point de vue formel la même forme que le terme cinématique de l'équation cinétique classique, si par $\varepsilon_p(x)$ on entend le hamiltonien de la particule ou de la quasi-particule. Quant à l'intégrale des collisions $L_p^{(2)}(f)$, elle diffère notablement de l'intégrale classique des collisions, car dans les transitions quantiques, dont le terme $L^{(2)}$ tient compte, apparaît le caractère de la statistique des particules.

Soulignons qu'on ne peut utiliser l'équation (5.1.33) que dans le cas où les dimensions caractéristiques des hétérogénéités spatiales sont grandes tant par rapport au rayon d'interaction r_0 que par rapport à la longueur d'onde de de Broglie de la particule $\bar{\lambda} = \hbar/m\bar{v}$.

Pour conclure ce paragraphe, nous allons formuler le théorème H de Boltzmann. Considérons, pour fixer les idées, le cas des bosons. La densité de l'entropie d'un gaz parfait de bosons est donnée par la formule (3.1.8):

$$s(\mathbf{x}) = \mathscr{V}^{-1} \sum_{\mathbf{p}} \{(1 + f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) \ln(1 + f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) - f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \ln f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\}.$$

En dérivant cette expression par rapport au temps et en utilisant l'équation cinétique (5.1.33), on obtient:

$$\dot{s}(\mathbf{x}) + \operatorname{div} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \tag{5.1.34}$$

où $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ est la densité du flux d'entropie

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathscr{V}^{-1} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{p}} \{(1 + f_{\mathbf{p}}) \ln(1 + f_{\mathbf{p}}) - f_{\mathbf{p}} \ln f_{\mathbf{p}}\}, \tag{5.1.35}$$

et $q(\mathbf{x})$ est la densité des sources d'entropie

$$q(\mathbf{x}) = \mathscr{V}^{-1} \sum_{1} L_1^{(2)}(f) \frac{\partial s(\mathbf{x})}{\partial f_1} =$$
$$= \frac{\pi}{4\mathscr{V}^{3}} \sum_{1234} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times$$
$$\times \{f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2)\} \ln \frac{(1 + f_3)(1 + f_4) f_1 f_2}{f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2)}. \tag{5.1.36}$$

En remarquant que $(x - y) \ln \frac{x}{y} \geqslant 0$ pour $x > 0$, $y > 0$, on a $q(\mathbf{x}) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\int d^3x \dot{s}(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Cette relation n'est rien d'autre que le théorème H de Boltzmann.

5.1.3. Son nul. Nous allons montrer en utilisant l'équation cinétique (5.1.33) que dans un gaz dégénéré de fermions peuvent se propager des oscillations particulières appelées *son nul*. Remarquons que l'intégrale des collisions $L^{(2)}$ s'annule pour une distribution de Fermi d'équilibre $n_{\mathbf{p}}$ et considérons une distribution des particules différant peu de $n_{\mathbf{p}}$, à savoir $f_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}} + \delta f_{\mathbf{p}}$ où $|\delta f_{\mathbf{p}}| \ll n_{\mathbf{p}}$. Dans ce cas l'équation (5.1.33) peut s'écrire comme suit:

$$\frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial f_{\mathbf{p}'}}\right)_0 \frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}'}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{p}'} \left(\frac{\partial L_{\mathbf{p}}^{(2)}}{\partial f_{\mathbf{p}'}}\right)_0 \delta f_{\mathbf{p}'}. \tag{5.1.37}$$

où $v = \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}\right)_0$ (l'indice 0 désignant l'état d'équilibre). Nous allons trouver la correction à apporter à la fonction de distribution δf_p sous la forme

$$\delta f_p = \frac{\partial n_p}{\partial \varepsilon_p} g_p e^{-i(\omega t - kx)}.$$

La température du gaz sera supposée suffisamment basse, de sorte que $\frac{\partial n_p}{\partial \varepsilon_p} = -\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F)$ (ε_F est l'énergie de Fermi limite). L'intégrale des collisions étant égale en ordre de grandeur $-\tau^{-1}\delta f_p$, où τ est le temps de relaxation de la fonction de distribution, on peut négliger l'intégrale des collisions dans l'équation (5.1.37) lorsque l'inégalité $\omega\tau \gg 1$ est vérifiée:

$$(kv - \omega) g_p + kv \sum_{p'} \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial f_{p'}}\right)_0 \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F) g_{p'} = 0. \qquad (5.1.38)$$

La valeur absolue de la vitesse $\mathbf{v}$ coïncide ici avec la vitesse de Fermi v_F, $|\mathbf{v}| = v_F$, car la grandeur δf_p est proportionnelle à $\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F)$. Pour plus de simplicité, nous allons supposer que $\left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial f_{p'}}\right)_0 = \Phi(p, p'; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \Phi(p)$ ne dépend pas de l'angle entre $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$. La solution de cette équation sera alors de la forme

$$g_p = \frac{kv}{kv - \omega} a,$$

où a est une constante. En substituant cette expression dans (5.1.38), on obtient l'équation suivante

$$\frac{w}{2} \ln \frac{w+1}{w-1} - 1 = \Phi_0^{-1}, \quad \Phi_0 = \frac{\Phi(p_F) p_F^2}{2\pi^2 v_F} \qquad (5.1.39)$$

qui détermine la grandeur $w = \frac{\omega}{kv_F}$. Cette équation reliant la pulsation ω et le vecteur d'onde k n'a une solution que si $\Phi_0 > 0$. Pour $\Phi_0 \to 0$, la loi de dispersion s'écrit $\omega = kv_F$.

Ainsi on obtient des oscillations non amorties avec une loi de dispersion linéaire, la vitesse de propagation des oscillations étant égale à v_F. Ces oscillations sont appelées son nul.

En vertu de l'hypothèse de Landau, dans un liquide de Fermi, c'est-à-dire dans un système de fermions à interaction forte, le spectre des quasi-particules sera du même type que dans le cas d'un gaz parfait. C'est pourquoi on peut supposer que l'équation de dispersion (5.1.39) pour un son nul, que nous avons obtenue pour un gaz de fermions faiblement non parafait, sera vérifiée également pour un liquide de Fermi *).

Remarquons que dans le domaine des fréquences telles que $\omega\tau \ll 1$, dans un gar de fermions se propage un son ordinaire dont la vitesse est égale à $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2}$,

*) Les oscillations d'un gaz de Fermi ont été étudiées par Goldman [49] dans le cas d'un gaz d'électrons à interaction coulombienne entre les particules. Un gaz de particules non chargées a été étudié par Klimontovitch et Siline dans [67] et par Siline dans [105]. La théorie générale des oscillations d'un liquide de Fermi dans le domaine des températures basses a été élaborée par Landau [73, 74].

où p est la pression, ρ la densité de la masse (voir chapitre 6). Pour un gaz parfait dégénéré de Fermi on a $p = \frac{m^4 v_F^5}{15\pi^2}$, $\rho = \frac{m^4 v_F^3}{3\pi^2}$ et par conséquent $c = v_F / \sqrt{3}$.

5.1.4. Intégrale des collisions en troisième approximation de la théorie des perturbations. Dans le paragraphe 5.1.2 nous avons obtenu l'intégrale des collisions pour un gaz de bosons et de fermions en seconde approximation de la théorie des perturbations. Cette intégrale des collisions contient la probabilité $2\pi |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ et une certaine combinaison des fonctions de distribution tenant compte des processus directs et inverses. En égalant à zéro l'intégrale des collisions, on obtient pour solution stationnaire de l'équation cinétique la fonction de distribution des bosons libres

$$n_p^{(0)} = (e^{\beta(\varepsilon_p - p u)} - 1)^{-1},$$

ou des fermions libres

$$n_p^{(0)} = (e^{\beta(\varepsilon_p - p u)} + 1)^{-1},$$

où ε_p est l'énergie des particules libres d'impulsion $\boldsymbol{p}$.

Entre temps, comme nous l'avons vu dans 3.1.2, ces formules donnent les fonctions de distribution à l'équilibre seulement en approximation zéro de la théorie des perturbations, et l'interaction modifie ces distributions. Pour décrire la relaxation de la fonction de distribution hors d'équilibre vers la fonction de distribution à l'équilibre modifiée, il y a lieu de tenir compte des termes suivants du développement de l'intégrale des collisions en série suivant les puissances du hamiltonien de l'interaction. Dans ce paragraphe nous allons calculer l'apport du troisième ordre $L_p^{(3)}(f)$ à l'intégrale des collisions $L_p(f)$, de plus nous allons considérer le cas spatialement homogène et supposer que l'état individuel d'une particule est caractérisé par la seule impulsion. Nous nous bornerons au calcul de $L_p^{(3)}$ pour les bosons. L'équalion intégrale (5.1.17) se simplifie alors et s'écrit comme

$$\sigma(f) = \rho^{(1)}(f) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} \Big\{ [V, \sigma(f)] - \\ - i \sum_{p'} \frac{\partial \sigma(f)}{\partial f_{p'}} L_{p'}(f) \Big\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \quad \eta \to +0, \qquad (5.1.40)$$

où

$$L_p(f) = i \operatorname{Sp} \sigma(f) [V, a_p^+ a_p]$$

(nous avons tenu compte de ce que $[\mathcal{H}_0, a_p^+ a_p] = 0$ et que, par conséquent, $a_{\alpha\beta} = 0$). Cette grandeur donne l'évolution de la fonction de distribution à une particule

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = L_p(f)$$

et n'est rien d'autre que l'intégrale des collisions compte tenu des approximations d'ordre supérieur de la théorie des perturbations.

A partir de l'équation intégrale (5.1.40) il s'ensuit que le développement de l'opérateur statistique $\sigma(f)$ en série suivant l'interaction est de la forme

$$\sigma(f) = \sigma^{(0)}(f) + \sigma^{(1)}(f) + \sigma^{(2)}(f) + \ldots,$$

où

$$\sigma^{(0)}(f) = \rho^{(0)}(F),$$

$$\sigma^{(1)}(f) = -i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\eta\tau} [V(\tau),\ \rho^{(0)}(f)], \tag{5.1.41}$$

$$\sigma^{(2)}(f) = -\int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\eta\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{0} d\tau'\, e^{\eta\tau'} [[\rho^{(0)}(f),\ V(\tau+\tau')],\ V(\tau)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{p'} L_{p'}^{(2)}(f) \frac{\partial \rho^{(0)}(f)}{\partial f_{p'}} \right\}.$$

La grandeur $L_p^{(2)}(f) = i\mathrm{Sp}\, \sigma^{(1)}(f) [V,\ a_p^+ a_p]$ qui est l'intégrale des collisions en seconde approximation de la théorie des perturbations a été calculée dans 5.1.2. (Remarquons que $L_p^{(1)}(f) = \mathscr{L}_p^{(0)}(f) = 0$.) Connaissant $\sigma^{(2)}$ on peut trouver l'intégrale des collisions en troisième approximation de la théorie des perturbations; à savoir

$$L_p^{(3)}(f) = i\, \mathrm{Sp}\, \sigma^{(2)}(f) [V,\ a_p^+ a_p].$$

Comme $[a_p^+ a_p,\ \partial\rho^{(0)}(f)/\partial f_{p'}] = 0$, on a $\mathrm{Sp}[V,\ a_p^+ a_p]\, \partial\rho^{(0)}(f)/\partial f_{p'} = 0$ et, par conséquent, en vertu de (5.1.41) on a

$$L_p^{(3)}(f) = -i \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\eta\tau} \int_{-\infty}^{0} d\tau'\, e^{\eta\tau'}\, \mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(f) [V(\tau+\tau'),$$

$$[V(\tau),\ [V,\ a_p^+ a_p]]]. \tag{5.1.42}$$

Dans cette formule le moyennage s'effectue avec l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(f)$ d'un gaz parfait hors d'équilibre. C'est pourquoi, lors du calcul de la trace, on peut utiliser les règles de Vick. Dans le cas homogène que nous avons envisagé on voit apparaître des simplifications dues à ce que les liaisons entre les opérateurs dans $V(\tau + \tau')$ et dans

$$[V,\ a_p^+ a_p] = \frac{1}{4\mathcal{V}} \sum_{1234} \Phi(1, 2;\ 3, 4)\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 (\delta_{4,\,p} +$$

$$+ \delta_{3,\,p} - \delta_{2,\,p} - \delta_{1,\,p}) \equiv V_p$$

n'influent pas sur $L_p^{(3)}(f)$. En effet, tenant compte de la liaison entre les opérateurs a^+ et a, à l'intérieur de $V(\tau + \tau')$, on obtient une expression de la forme

$$\sum_{1234} \Phi_{\tau+\tau'}(1, 2;\ 3, 4)\, \mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(f) [\underbrace{a_1^+ a_2^+} a_3 a_4,\ [V(\tau),\ V_p]] \equiv Q. \tag{5.1.43}$$

Vu que $\underbrace{a_1^+ a_3} = f_1 \delta_{1,3}$ et $\Phi(1, 2;\ 3, 4) \sim \delta_{p_1+p_2,\,p_3+p_4}$ on a $p_2 = p_4$. Compte tenu de ce que $[\rho^{(0)}(f),\ a_2^+ a_2] = 0$, on obtient $Q = 0$. Ainsi, tous les opérateurs a^+ et a de $V(\tau + \tau')$ dans l'expression (5.1.43) ne doivent être liés qu'aux opérateurs a^+ et a de $[V(\tau),\ V_p]$.

Considérons ensuite la grandeur V_p. Si l'on tient compte de la liaison entre les opérateurs $a_1^+ a_2^+ a_3 a_4$ à l'intérieur de V_p, on voit apparaître des produits de symboles de Kronecker du type $\delta_{1,3}\ \delta_{2,4}$, par conséquent, la grandeur $\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}$ s'annule. Compte tenu de ces simplifications et vu la symétrie de l'amplitude Φ (1, 2; 3, 4), on obtient l'expression suivante pour la trace qui entre dans $L_p^{(3)}(f)$:

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,[V(\tau+\tau'),\,[V(\tau),\,V_p]] = \frac{1}{64}\,\frac{1}{\mathcal{V}^3}\sum \Phi_{\tau+\tau'}(1'',2'';3'',4'')\times$$
$$\times\Phi_\tau(1',2';3',4')\,\Phi(1,2;3,4)\,(\delta_{4,p}+\delta_{3,p}-\delta_{2,p}-\delta_{1,p})\times$$



$$\times\{8\,[a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''},\,[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]] +$$
$$+8\,[a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''},\,[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]] +$$
$$+64\,[a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''},\,[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]] +$$
$$+32\,[a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''},\,[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]] +$$
$$+32\,[a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''},\,[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'},\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]]\} \qquad (5.1.44)$$

En substituant cette expression dans (5.1.42) et en utilisant (5.1.21), on obtient après intégration sur τ et τ'

$$L_p^{(3)}(f)=L_{ap}^{(3)}(f)+L_{bp}^{(3)}(f)+L_{cp}^{(3)}(f),$$

où

$$L_{ap}^{(3)}(f)=\frac{\pi^2 i}{8\mathcal{V}^3}\sum_{1234}\sum_{1'2'}\Phi(1,2;3,4)\,\Phi(3,4;1',2')\,\Phi(1',2';1,2)\times$$
$$\times(\delta_{4,p}+\delta_{3,p}-\delta_{2,p}-\delta_{1,p})\,\delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_{1'}-\varepsilon_{2'})\,\delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\times$$
$$\times(1+f_1+f_2)\{f_{1'}f_{2'}(1+f_3)(1+f_4)-f_3f_4(1+f_{1'})(1+f_{2'})\}+\text{c.c.}\ ^{*)},\qquad(5.1.45)$$

$$L_{bp}^{(3)}(f)=\frac{\pi^2 i}{\mathcal{V}^3}\sum_{1234}\sum_{1'2'}\Phi(1,2;3,4)\,\Phi(3,1';2,2')\,\Phi(2',4;1,1')\times$$
$$\times(\delta_{4,p}+\delta_{3,p}-\delta_{2,p}-\delta_{1,p})\,\delta_-(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_3-\varepsilon_{2'}-\varepsilon_2)\,\delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1-\varepsilon_2)\times$$
$$\times(f_1-f_4)\{f_3f_{1'}(1+f_2)(1+f_{2'})-f_2f_{2'}(1+f_3)(1+f_{1'})\},$$

$$L_{cp}^{(3)}(f)=\frac{\pi^2 i}{2\mathcal{V}^3}\sum_{1234}\sum_{1'}|\Phi(1,2;3,4)|^2\,\Phi(1',2;1',2)\,f_{1'}\times$$
$$\times(\delta_{4,p}+\delta_{3,p}-\delta_{2,p}-\delta_{1,p})\{\delta_-^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)-$$
$$-\delta_-^2(\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\}\{f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)-$$
$$-f_1f_2(1+f_3)(1+f_4)\}$$

(les deux premières lignes dans (5.1.44) correspondent à $L_{ap}^{(3)}$, la troisième ligne correspond à $L_{bp}^{(3)}$ et la quatrième et la cinquième correspondent à $L_{cp}^{(3)}$).

Les expressions de $L_{ap}^{(3)}$ et $L_{bp}^{(3)}$ peuvent être transformées de telle sorte que la parenthèse cinétique $f_1f_2(1+f_3)(1+f_4)-f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)$ contiendra non pas la fonction $\delta_-(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)$, mais la fonction $\delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)$. Nous allons commencer par $L_{ap}^{(3)}$. La parenthèse cinétique auprès du facteur $(\delta_{p,1}+\delta_{p,2})$ s'écrira comme

$$(1+f_1+f_2)\{f_{1'}f_{2'}(1+f_3)(1+f_4)-f_3f_4(1+f_{1'})(1+f_{2'})\}=$$
$$=(1+f_3+f_4)\{f_{1'}f_{2'}(1+f_1)(1+f_2)-f_1f_2(1+f_{1'})(1+f_{2'})\}+$$
$$+(1+f_{1'}+f_{2'})\{f_1f_2(1+f_3)(1+f_4)-f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)\},$$

celle auprès du facteur $(\delta_{p,3}+\delta_{p,4})$ sera laissée inchangée. La grandeur $L_{ap}^{(3)}$ se décomposera alors en un produit de trois facteurs (et de leurs conjugués complexes). Après changement de l'indice de sommation, on obtient

$$L_{ap}^{(3)}=\frac{\pi^2 i}{8\mathcal{V}^3}\sum_{1234}\sum_{1'2'}\Phi(1,2;3,4)\,\Phi(3,4;1',2')\,\Phi(1',2';1,2)\times$$
$$\times(\delta_{4,p}+\delta_{3,p})(1+f_{1'}+f_{2'})\{f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)-f_1f_2(1+f_3)(1+f_4)\}\times$$
$$\times\{\delta_-(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\delta_-(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_3-\varepsilon_4)+$$
$$+\delta_-(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\delta_-(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_3-\varepsilon_4)+$$
$$+\delta_-(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\}+\text{c.c.}$$

*) Ici et plus loin c.c. désigne conjugué complexe.

Remarquant ensuite que

$$\delta_-(x+y)[\delta_-(x)+\delta_-(y)] = \delta_-(x)\,\delta_-(y), \qquad \delta_-(x)+\delta_-(-x) = 2\delta(x), \qquad (5.1.46)$$

on a

$$L_{ap}^{(3)} = \frac{\pi^2 i}{4\mathcal{V}^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4)\,\Phi(3, 4; 1', 2') \times$$
$$\times \Phi(1', 2'; 1, 2)(\delta_{4,p}+\delta_{3,p}) \times$$
$$\times (1+f_{1'}+f_{2'})\{f_3 f_4(1+f_1)(1+f_2) - f_1 f_2(1+f_3)(1+f_4)\} \times$$
$$\times \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\delta_-(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_3-\varepsilon_4) + \text{c.c.}$$

Nous allons maintenant transformer $L_{bp}^{(3)}$. A cet effet nous allons décomposer la parenthèse cinétique auprès de $\delta_{1,p}$ et de $-\delta_{4,p}$ en deux termes, soit

$$(f_1 - f_4)\{f_{1'} f_3(1+f_2)(1+f_{2'}) - f_2 f_{2'}(1+f_{1'})(1+f_3)\} =$$
$$= (f_{1'} - f_{2'})\{f_1 f_2(1+f_3)(1+f_4) - f_3 f_4(1+f_1)(1+f_2)\} +$$
$$+ (f_2 - f_3)\{f_4 f_{2'}(1+f_1)(1+f_{1'}) - f_1 f_{1'}(1+f_4)(1+f_{2'})\}.$$

La parenthèse cinétique auprès des facteurs $\delta_{2,p}$ et $-\delta_{3,p}$ sera laissée inchangée. En décomposant ainsi $L_{bp}^{(3)}$ en une somme de six termes avec les facteurs $\delta_{1,p}$, δ_{2p}, δ_{3p}, δ_{4p}, et en changeant les indices de sommation, on obtient:

$$L_{bp}^{(3)} = \frac{\pi^2 i}{\mathcal{V}^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4)\,\Phi(2', 3; 1, 1')\,\Phi(4, 1'; 2, 2') \times$$
$$\times \delta_{4,p}(f_{2'} - f_{1'})\{f_1 f_2(1+f_3)(1+f_4) - f_3 f_4(1+f_1)(1+f_2)\} \times$$
$$\times \{\delta_-(\varepsilon_{2'}+\varepsilon_3-\varepsilon_{1'}-\varepsilon_1)\,\delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1-\varepsilon_2) +$$
$$+ \delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_1-\varepsilon_{1'})\,\delta_-(\varepsilon_2+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_4-\varepsilon_{1'}) +$$
$$+ \delta_-(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\delta_-(\varepsilon_2+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_{1'}-\varepsilon_4)\} + \text{c.c.}$$

Puis, en utilisant les formules (5.1.46), on a

$$L_{bp}^{(3)} = \frac{2\pi^2 i}{\mathcal{V}^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4)\,\Phi(2', 3; 1, 1') \times$$
$$\times \Phi(4, 1'; 2, 2')\,\delta_{4,p}(f_{2'} - f_{1'}) \times \{f_1 f_2(1+f_3)(1+f_4) - f_3 f_4(1+f_1)(1+f_2)\} \times$$
$$\times \delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\,\delta_-(\varepsilon_3+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_1-\varepsilon_{1'}) + \text{c.c.}$$

Enfin, on passe à la transformation de $L_{cp}^{(3)}$. Remarquons que $\delta_-^2(x) = \frac{i}{\pi}\,\delta_-'(x)$ et, par conséquent,

$$\delta_-^2(x) - \delta_-^2(-x) = \frac{2i}{\pi}\,\delta'(x),$$

on a en vertu de (5.1.45)

$$L_{cp}^{(3)} = \frac{\pi}{\mathcal{V}^3} \sum_{1234} \sum_{1'} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2\,\Phi(1', 2; 1', 2)\,f_{1'} \times$$
$$\times (\delta_{4,p}+\delta_{3,p}-\delta_{2,p}-\delta_{1,p})\{f_3 f_4(1+f_1)(1+f_2) -$$
$$- f_1 f_2(1+f_3)(1+f_4)\}\,\delta'(\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1-\varepsilon_2).$$

Les expressions obtenues pour $L_{ap}^{(3)}$, $L_{bp}^{(3)}$, $L_{cp}^{(3)}$ et $L_p^{(2)}$ permettent d'écrire l'intégrale des collisions L_p aux termes en troisième approximation près inclus sous la forme suivante *)

$$L_p(f) = \frac{\pi}{\mathcal{V}^2} \sum_{1234} |\widetilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)|^2 \delta_{4, p} \{f_1 f_2 (1+f_3)(1+f_4) - \\ - f_3 f_4 (1+f_1)(1+f_2)\} \delta(\widetilde{\varepsilon}_1 + \widetilde{\varepsilon}_2 - \widetilde{\varepsilon}_3 - \widetilde{\varepsilon}_4), \qquad (5.1.47)$$

où

$$\widetilde{\Phi}(1, 2; 3, 4) = \Phi(1, 2; 3, 4) - \\ - \frac{\pi i}{2\mathcal{V}} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 1', 2') \Phi(1', 2'; 3, 4) \times \\ \times (1 + f_{1'} + f_{2'}) \delta_-(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) - \\ - \frac{2\pi i}{\mathcal{V}} \sum_{1'2'} \Phi(1, 1'; 3, 2') \Phi(2, 2'; 4, 1') \times \\ \times (f_{1'} - f_{2'}) \delta_-(\varepsilon_1 + \varepsilon_{1'} - \varepsilon_3 - \varepsilon_{2'}),$$

$$\widetilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \mathcal{V}^{-1} \sum_2 \Phi(1, 2; 1, 2) f_2.$$

(Dans le développement du produit $|\widetilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\widetilde{\varepsilon}_1 + \widetilde{\varepsilon}_2 - \widetilde{\varepsilon}_3 - \widetilde{\varepsilon}_4)$ en série suivant les puissances de l'interaction on ne doit laisser que les termes du second et du troisième ordre, les termes d'ordre plus élevé doivent être négligés.)

La formule (5.1.47) admet une interprétation physique simple. On voit que dans (5.1.47) on a la même parenthèse cinétique que dans la formule (5.1.32) pour $L_p^{(2)}$. Par contre, lorsqu'on tient compte de l'interaction, l'amplitude $\Phi(1,2; 3,4)$ est remplacée par l'amplitude modifiée $\widetilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)$, et l'énergie de la particule libre ε_1 est remplacée par l'énergie modifiée $\widetilde{\varepsilon}_1$. Comme nous l'avons déjà noté, cette énergie tient compte des effets du champ self-consistent et par là même elle dépend de la fonction de distribution f_p. L'amplitude modifiée $\widetilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)$ dépend également de la fonction de distribution f_p, et pour $f_p = 0$ nous obtenons une formule bien connue de la mécanique quantique donnant l'amplitude de la dispersion en seconde approximation de la théorie des perturbations.

En égalant à zéro l'intégrale des collisions $L_p^{(2)} + L_p^{(3)}$, on trouve la fonction de distribution à l'équilibre n_p, compte tenu des termes proportionnels à V, soit

$$n_p = n_p^{(0)} - \beta n_p^{(0)} (1 + n_p^{(0)}) \sum_{p'} \Phi(p, p'; p, p') n_{p'}^{(0)}. \qquad (5.1.48)$$

D'une manière analogue, on peut envisager un gaz de fermions.

5.1.5. Entropie d'un gaz faiblement non parfait. Dans le paragraphe 3.1.1 nous avons donné la définition de l'entropie d'un gaz parfait hors d'équilibre

$$s^{(0)}(f) = -\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) \ln \rho^{(0)}(f), \qquad (5.1.49)$$

---

*) La formule (5.1.47) a été obtenue par Bogolioubov et Gourov dans [26]. La quatrième approximation [où l'on voit apparaître pour la première fois les effets liés aux collisions ternaires a été étudiée dans [16].

où $\rho^{(0)}(f)$ est l'opérateur statistique d'un gaz non parfait hors d'équilibre, qui dans le cas des bosons est déterminé par la formule (2.4.29)

$$\rho^{(0)}(f) \exp\left\{-\sum_{1} \ln(1+f_1) - \sum_{1} a_1^+ a_1 \ln\frac{1+f_1}{f_1}\right\}, \qquad (5.1.50)$$

ce qui donne la définition « combinatoire » bien connue de l'entropie.

Si le gaz n'est pas parfait, la formule (5.1.49) ne donne pas l'entropie du gaz. En particulier, on peut le voir en prenant la définition générale de l'entropie d'équilibre d'un système non parfait

$$s_{\text{éq}} = -\text{Sp}\, w \ln w,$$

et de la fonction de distribution d'équilibre à une particule

$$n_1 = \text{Sp}\, w\, a_1^+ a_1,$$

(w étant la distribution de Gibbs (3.1.1) tenant compte de l'interaction entre les particules). Dans ce cas la grandeur $s^{(0)}$ (Sp wa^+a) ne coïncidera pas avec la grandeur $s_{\text{éq}}$, la différence entre ces grandeurs apparaîtra dans les termes du second ordre par rapport à l'interaction V. C'est pourquoi, il y a lieu de donner une définition de l'entropie d'un gaz non parfait hors d'équilibre.

Il pourrait sembler qu'après avoir trouvé à l'aide de l'équation intégrale (5.1.40) le développement de l'opérateur statistique grossier en série suivant les puissances de l'interaction, il suffit d'utiliser la définition de l'entropie donnée par von Neumann (2.1.34), en y substituant au lieu de ρ l'opérateur statistique grossier $\sigma(f)$. Cependant, une telle définition de l'entropie d'un gaz non parfait hors d'équilibre ne sera pas correcte, car différents termes du développement de l'entropie de von Neumann pour l'opérateur statistique grossier contiendront des intégrales divergentes. C'est pourquoi il y a lieu de modifier cette définition. Pour comprendre quelle doit être cette modification, il faut avant tout trouver le caractère des divergences mentionnées dans l'expression de l'entropie de von Neumann $\tilde{s}(f)$ correspondant à l'opérateur statistique grossier $\sigma(f)$

$$\tilde{s}(f) = -\text{Sp}\, \sigma(f) \ln \sigma(f).$$

Le développement de l'opérateur statistique grossier aux termes de l'ordre de V^2 près est de la forme

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + \sigma^{(1)}(f) + \ldots,$$

où en vertu de (5.1.41)

$$\sigma^{(1)}(f) = i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} [\rho^{(0)}(f, V(\tau)], \quad \eta \to +0.$$

Comme dans la définition de l'entropie de von Neumann figure $\ln \sigma\,(f)$, il y a lieu de trouver le développement de $\ln \sigma\,(f)$ en série suivant les puissances du hamiltonien de l'interaction V. Remarquons à cet effet qu'on a la formule

$$\ln \rho = \int_{-\infty}^{0} dz \left\{ \frac{1}{z-\rho} - \frac{1}{z-1} \right\}$$

(car les valeurs propres de l'opérateur ρ sont positives). La théorie des perturbations pour la résolvante $(z-\sigma)^{-1}$ de l'opérateur σ peut être basée sur la formule

$$(z-\sigma)^{-1} = (z-\rho^{(0)})^{-1} + (z-\rho^{(0)})^{-1}(\sigma-\rho^{(0)})(z-\sigma)^{-1}.$$

En vertu de ces formules on a

$$\ln \sigma = \ln \rho^{(0)} + (\ln \sigma)^{(1)} + \ldots,$$

où

$$(\ln \sigma)^{(1)} = \int_{-\infty}^{0} dz\,(z-\rho^{(0)})^{-1}\sigma^{(1)}(z-\rho^{(0)})^{-1}.$$

En y substituant l'équation (5.1.41) pour $\sigma^{(1)}$ et en tenant compte de ce que

$$\int_{-\infty}^{0} dz\,(z-\rho^{(0)})^{-1}[\rho^{(0)},\ V(\tau)]\,(z-\rho^{(0)})^{-1} = [\ln \rho^{(0)},\ V(\tau)],$$

on trouve

$$(\ln \sigma)^{(1)} = i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}\,[\ln \rho^{(0)}(f),\ V(\tau)].$$

En remarquant que $\ln((1+f_1)/f_1) = \partial s^{(0)}(f)/\partial f_1$ et en utilisant l'expression (5.1.50) pour l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(f)$, on obtient

$$(\ln \sigma)^{(1)} = -i \sum_{1} \frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1} \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}\,[a_1^{+}a_1,\ V(\tau)]. \qquad (5.1.51)$$

Nous allons passer maintenant au calcul de l'entropie de von Neumann pour l'opérateur statistique $\sigma\,(f)$ compte tenu des termes du premier et du second ordre.

A première vue, on pourrait croire qu'il est nécessaire de connaître σ et $\ln \sigma$ aux termes du second ordre près. Nous allons montrer cependant qu'il suffit de connaître les grandeurs $\sigma^{(1)}$ et $(\ln \sigma)^{(1)}$. Remarquons que si λ caractérise l'intensité de l'interaction, à partir des formules

$$\mathrm{Sp}\,\sigma\,(f) = 1, \quad \mathrm{Sp}\,\sigma\,(f)\ln\rho^{(0)}\,(f) = -s^{(0)}\,(f)$$

(nous avons tenu compte de $\mathrm{Sp}\,\sigma\,(f)\,a_1^+a_1 = f_1$), on obtient la relation

$$\frac{\partial\tilde{s}\,(f)}{\partial\lambda} = -\mathrm{Sp}\,\frac{\partial\sigma\,(f)}{\partial\lambda}\{\ln\sigma\,(f) - \ln\rho^{(0)}\,(f)\}.$$

C'est pourquoi, en y substituant le développement de $\tilde{s}\,(f)$ en série suivant les puissances de l'interaction

$$\tilde{s}\,(f) = \sum_{k=0}\tilde{s}^{(k)}\,(f)$$

on obtient

$$\tilde{s}^{(0)}\,(f) = s^{(0)}\,(f), \quad \tilde{s}^{(1)}\,(f) = 0,$$

$$\tilde{s}^{(k)}\,(f) = -\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{k}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^{(l)}\,(\ln\sigma)^{(k-l)}, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,$$

d'où

$$\tilde{s}^{(2)}\,(f) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^{(1)}\,(\ln\sigma)^{(1)}. \tag{5.1.52}$$

Ainsi $\tilde{s}^{(2)}$ ne contient que les termes du premier ordre du développement de σ et de $\ln\sigma$ par rapport à l'interaction.

En utilisant les expressions (5.1.41), (5.1.51) pour $\sigma^{(1)}$ et $(\ln\sigma)^{(1)}$, on obtient

$$\tilde{s}^{(2)}\,(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} d\tau_1 \int_{-\infty}^{0} d\tau_2\, e^{\eta(\tau_1+\tau_2)}\,\varphi\,(\tau_1-\tau_2\,;\ f), \tag{5.1.53}$$

où

$$\varphi\,(\tau\,;\ f) = \sum_{1}\frac{\partial s^{(0)}\,(f)}{\partial f_1}\,\varphi_1\,(\tau\,;\ f),$$

$$\varphi_1\,(\tau\,;\ f) = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\,(f)\,[V\,(\tau),\ [V,\ a_1^+a_1]].$$

Lors du calcul de la trace figurant ici, tout comme lors du calcul des intégrales des collisions, on peut utiliser les règles de Vick (voir paragraphe 5.1.2). Compte tenu de la propriété de symétrie de l'amplitude Φ (1, 2; 3, 4), on a en vertu de (5.1.2), (5.1.27),

$$\varphi_1\,(\tau\,;\ f) = \frac{1}{16\mathcal{V}^2}\sum_{1'2'3'4'}\ \sum_{1''2''3''4''}\Phi_\tau\,(1',\ 2';\ 3',\ 4')\times$$

$$\times\,\Phi\,(1'',\ 2'';\ 3'',\ 4'')\,(\delta_{3'',1}+\delta_{4'',1}-\delta_{1'',1}-\delta_{2'',1})\times$$

$$\times\,4\,[a_{1'}^+a_{2'}^+a_{3'}a_{4'},\ a_{1''}^+a_{2''}^+a_{3''}a_{4''}];$$

d'où

$$\varphi_1(\tau;\, f)=\frac{1}{4\mathcal{V}^2}\sum_{1'2'3'4'}|\Phi(1',\,2';\,3',\,4')|^2\times$$
$$\times\exp i\tau(\varepsilon_{1'}+\varepsilon_{2'}-\varepsilon_{3'}-\varepsilon_{4'})(\delta_{1,\,1'}+\delta_{1,\,2'}-\delta_{1,\,3'}-\delta_{1,\,4'})\times$$
$$\times\{f_{1'}f_{2'}(1+f_{3'})(1+f_{4'})-f_{3'}f_{4'}(1+f_{1'})(1+f_{2'})\}. \qquad (5.1.54)$$

En introduisant la composante de Fourier de la fonction $\varphi(\tau;\, f)$

$$\varphi(\omega;\, f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau e^{i\omega\tau}\varphi(\tau;\, f),$$

on peut écrire l'expression de $\widetilde{s}^{(2)}(f)$ comme

$$\widetilde{s}^{(2)}(f)=\frac{\pi^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\delta_-^{\eta}(\omega)\delta_-^{\eta}(-\omega)\varphi(\omega;\, f), \qquad (5.1.55)$$

où

$$\delta_-^{\eta}(\omega)=\pi^{-1}(\eta+i\omega)^{-1}.$$

La fonction $\varphi(\tau;\, f)$ (après le passage à la limite thermodynamique) tendant vers zéro pour $\tau\to\pm\infty$, sa composante de Fourier $\varphi(\omega;\, f)$ n'aura pas de singularité du type fonction delta par rapport à ω. L'expression sous le signe somme dans (5.1.55), qui contient le facteur $\delta_-^{\eta}(\omega)\,\delta_-^{\eta}(-\omega)=\pi^{-2}(\eta^2+\omega^2)^{-1}$ donnera lieu à une divergence de $\widetilde{s}^{(2)}(f)$ pour $\eta\to 0$. La divergence est due à la multiplication des fonctions généralisées $\delta_-(\omega)$, $\delta_-(-\omega)$ qui contiennent des pulsations positives et négatives.

La question se pose de régulariser l'expression pour $\widetilde{s}^{(2)}(f)$. On a une situation analogue dans la théorie quantique du champ lors de la régularisation des éléments de la matrice S contenant les produits des propagateurs contenant des termes à pulsations positives et négatives [28]. (C'est ce qui se passe dans la théorie relativiste du champ du fait de l'existence des antiparticules.)

Pour la régularisation des expressions contenant des produits du type $\delta_-^{\eta}(\omega)\,\delta_-^{\eta}(-\omega)$, il y a lieu en vertu de [28] d'effectuer la substitution

$$\delta_-^{\eta}(\omega)\delta_-^{\eta}(-\omega)\to\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\delta_-'(\omega)+A\delta(\omega)+B\delta'(\omega), \qquad (5.1.56)$$

où A et B sont des constantes arbitraires. Pour expliquer cette méthode, rappelons que la fonction $\delta_-(\omega)$ est une fonction généralisée en ce sens qu'on a la relation

$$\lim_{\eta\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\delta_-^{\eta}(\omega)\varphi(\omega)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\delta_-(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega,$$

où $\varphi(\omega)$ est une fonction infiniment dérivable s'annulant pour $\omega \to \pm\infty$. (Cette relation détermine la fonctionnelle du second membre de l'égalité.) Cependant dans le cas général la limite

$$\lim_{\eta_1 \to +0,\ \eta_2 \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_-^{\eta_1}(\omega)\, \delta_-^{\eta_2}(-\omega)\, \varphi(\omega) \qquad (5.1.57)$$

n'existe pas, bien que la limite

$$\lim_{\eta_1 \to +0,\ \eta_2 \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_-^{\eta_1}(\omega)\, \delta_-^{\eta_2}(\omega)\, \varphi(\omega)$$

existe et détermine la fonction généralisée $\delta_-^2(\omega) \equiv \frac{i}{\pi} \delta_-'(\omega)$.

Nous allons maintenant restreindre la classe des fonctions $\varphi(\omega)$ de manière que soit vérifiée la condition $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Pour cette classe de fonctions la limite (5.1.57) existera. Par produit des fonctions généralisées $\delta_-(\omega)\, \delta_-(-\omega)$ on entendra alors une extension arbitraire continue de la fonctionnelle (5.1.57) définie sur cette classe de fonctions, sur toutes les fonctions infiniment dérivables $\varphi(\omega)$. (Une telle définition a été donnée par Bogolioubov et Parassiouk [27].)

Pour trouver le produit $\delta_-(\omega)\, \delta_-(-\omega)$ ainsi défini, remarquons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-ip\omega} \delta_-^{\eta_1}(\omega)\, \delta_-^{\eta_2}(-\omega) = \frac{2}{\pi} e^{\eta_1 p} (\eta_1 + \eta_2)^{-1} - \\ - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{0} dq \theta(p+q)\, e^{(\eta_1+\eta_2)q + \eta_1 p}.$$

L'expression asymptotique de cette relation pour $\eta_1, \eta_2 \to 0$ est de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-ip\omega} \delta_-^{\eta_1}(\omega)\, \delta_-^{\eta_2}(\omega) = \\ = \frac{2}{\pi} (\eta_1 + \eta_2)^{-1} + \frac{2}{\pi} \eta_1 (\eta_1 + \eta_2)^{-1} p - \frac{2}{\pi} p\theta(p) + 0(\eta),$$

d'où l'on trouve après la transformation inverse de Fourier

$$\delta_-^{\eta_1}(\omega)\, \delta_-^{\eta_2}(-\omega) = -\frac{i}{\pi} \delta_-'(-\omega) + \frac{2}{\pi} (\eta_1 + \eta_2)^{-1} \delta(\omega) - \\ - \frac{2i}{\pi} \eta_1 (\eta_1 + \eta_2)^{-1} \delta'(\omega) + 0(\eta). \quad (5.1.57')$$

Cette formule montre que pour les fonctions $\varphi(\omega)$ qui s'annulent avec leur dérivée première pour $\omega = 0$, on a la relation

$$\lim_{\eta_1\to+0,\ \eta_2\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_-^{\eta_1}(\omega)\, \delta_-^{\eta_2}(-\omega)\, \varphi(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int d\omega \delta'_-(-\omega)\, \varphi(\omega).$$

L'extension continue arbitraire de cette fonctionnelle (donnée pour des fonctions pour lesquelles $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$) sur toute la classe des fonctions infiniment dérivables, s'écrit de toute évidence comme

$$\delta_-(\omega)\, \delta_-(-\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \delta'_-(\omega) + A\delta(\omega) + B\delta'(\omega),$$

où A et B sont des constantes arbitraires. D'où, en vertu de (5.1.56) on obtient l'expression suivante pour la correction régularisée du second ordre dans l'entropie de von Neumann, correspondant à l'opérateur statistique grossier $\sigma(f)$ [91]

$$\operatorname{Reg} \tilde{s}^2(f) = -\frac{\pi}{2} A\dot{s}^{(0)}(f) + s^{(2)}(f), \tag{5.1.58}$$

où conformément à (5.1.56), (5.1.54),

$$s^{(2)}f = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi(\omega;\ f) \operatorname{Im} \delta'_-(\omega) = \frac{\pi}{8\mathcal{V}^2} \operatorname{Im} \sum_{1234} |\Phi(1,\ 2;3,\ 4)|^2 \times$$
$$\times \delta'_-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \ln \frac{(1+f_1)(1+f_2) f_3 f_4}{f_1 f_2 (1+f_3)(1+f_4)} \times$$
$$\times \{f_1 f_2 (1+f_3)(1+f_4) - f_3 f_4 (1+f_1)(1+f_2)\} \tag{5.1.59}$$

et $\dot{s}^{(0)}(f)$ est la dérivée de l'entropie « combinatoire » calculée à l'aide de l'équation cinétique avec une intégrale des collisions en seconde approximation de la théorie des perturbations (voir la formule (5.1.36))

$$\dot{s}^{(0)}(f) = -\pi\varphi(\omega;\ f)|_{\omega=0} =$$
$$= \frac{\pi}{4\mathcal{V}^2} \sum_{1234} |\Phi(1,\ 2;\ 3,\ 4)|^2\, \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times$$
$$\times \{f_1 f_2 (1+f_3)(1+f_4) - f_3 f_4 (1+f_1)(1+f_2)\} \times$$
$$\times \ln \frac{(1+f_3)(1+f_4) f_1 f_2}{f_3 f_4 (1+f_1)(1+f_2)} \tag{5.1.60}$$

(le terme $B\delta'(\omega)$ n'a pas d'influence sur $\tilde{s}^2$ vu la symétrie de la fonction $\varphi(\omega;\ f) = \varphi(-\omega;\ f)$).

Remarquons maintenant que si l'on calculait l'expression asymptotique de (5.1.55) pour $\eta \to +0$, alors en vertu de (5.1.57'), la constante A serait $A = (\pi\eta)^{-1}$. Ainsi la grandeur A contient la divergence mentionnée ci-dessus.

Dans la méthode de régularisation que nous avons utilisée la grandeur A est considérée comme une constante arbitraire finie et a la dimension du temps. Notre théorie ne contient pas de constante ayant cette dimension, c'est pourquoi il y a lieu de poser $A = 0$. En d'autres termes, la correction du second ordre à l'entropie « combinatoire » $s^{(0)}(f)$ est donnée par la grandeur $s^{(2)}(f)$ et par conséquent l'entropie d'un état hors d'équilibre, est déterminée par la formule [91]:

$$s(f) = s^{(0)}(f) + s^2(f) + \ldots, \quad s^{(2)}(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \tau\varphi(\tau;\, f). \tag{5.1.61}$$

Nous allons expliquer maintenant le sens physique de l'apparition de termes divergents dans l'expression de $\tilde{s}(f)$ [91]. Si l'on avait calculé l'entropie de von Neumann avec l'opérateur statistique exact (sans passer directement à l'étape cinétique de l'évolution) et construit une théorie des perturbations pour des valeurs courantes fixées de la fonction de distribution à une particule, pour l'expression asymptotique de l'entropie dans le domaine des temps grands ($t \gg \tau_0$) on aurait obtenu l'expression suivante [91]

$$s(f;\, t) = s^{(0)}(f) + s^{(2)}(f) - t\dot{s}^{(0)}(f) + \ldots \tag{5.1.62}$$

On voit ainsi que cette expression coïncide du point de vue formel avec (5.1.58) si l'on pose $A = 2t/\pi$. Ceci signifie que l'apparition de divergences est liée à l'introduction de l'opérateur grossier à l'étape cinétique de l'évolution. Par suite de la présence, dans (5.1.62) d'un terme proportionnel à t, l'entropie de von Neumann correspondant à l'opérateur statistique exact ne change pas dans le temps. Cependant, l'entropie définie comme $s^{(0)}(f) + s^{(2)}(f)$ croîtra dans le temps.

Nous allons montrer maintenant qu'à l'état d'équilibre, l'entropie (5.1.61) que nous nous avons introduite coïncide, aux termes de l'ordre de V^2 près, avec l'entropie thermodynamique d'équilibre qui est définie comme $-\mathrm{Sp}\, w \ln w$. De plus, nous allons voir tout de suite qu'en cette même approximation l'entropie (5.1.61) est maximale pour la distribution d'équilibre des particules, une énergie et un nombre de particules étant donnés [91].

Comme à l'étape cinétique de l'évolution l'entropie doit être une fonctionnelle de la fonction de distribution à une particule f_p, ces propriétés peuvent être formulées sous la forme de deux relations suivantes:

$$s(n) = -\mathrm{Sp}\, w \ln w \equiv s_{\mathrm{eq}}, \tag{5.1.63}$$

$$\left(\frac{\partial s(f)}{\partial f_1} - \beta \frac{\partial \mathscr{H}(f)}{\partial f_1} + \beta\mu\right)_{f=n} = 0, \quad n_1 = \mathrm{Sp}\, w a_1^+ a_1, \tag{5.1.64}$$

où l'énergie moyenne $\mathcal{H}(f)$ en tant que fonctionnelle de f est déterminée par la formule

$$\mathcal{H}(f) = \mathrm{Sp}\, \sigma\, (f)\mathcal{H}. \tag{5.1.65}$$

La seconde de ces relations peut être considérée comme le principe variationnel qui sert à trouver la fonction de distribution à une particule pour une entropie hors d'équilibre donnée. Nous allons formuler ce principe sous une autre forme plus commode. Supposant que l'expression (6.1.63) est vérifiée, on peut écrire l'égalité

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \varepsilon_1} = \left(\frac{\partial s\,(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n} + \sum_2 \left(\frac{\partial s\,(f)}{\partial f_2}\right)_{f=n} \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1}, \tag{5.1.66}$$

où

$$S_{eq} = \beta \left\{\mathcal{H}\,(n) - \mu \sum_i n_i\right\} - \Omega.$$

(Cette formule découle de la définition (5.1.63) et de ce que $\mathcal{H}\,(n) = \mathrm{Sp}\, w\mathcal{H}$ (voir la formule (5.1.69)).) C'est pourquoi

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \varepsilon_1} = \beta \left(\frac{\partial \mathcal{H}\,(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n} + \beta \sum_2 \left(\frac{\partial \mathcal{H}\,(f)}{\partial f_2}\right)_{f=n} \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1} - \beta\mu \sum_2 \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1} - \beta n_1,$$

et par conséquent la formule (5.1.66) s'écrit

$$\sum_2 \left\{\frac{\partial s\,(f)}{\partial f_2} - \beta \frac{\partial \mathcal{H}\,(f)}{\partial f_2} + \beta\mu\right\}_{f=n} \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1} = \beta \left(\frac{\partial V\,(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n} - \left(\frac{\partial s\,(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n},$$

où $V\,(f) = \mathrm{Sp}\, \sigma\, (f)\, V$. On voit que pour vérifier le principe variationnel (5.1.64) il faut et il suffit d'avoir l'égalité

$$\left(\frac{\partial s\,(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n} = \beta \left(\frac{\partial V\,(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n}. \tag{5.1.67}$$

(La suffisance (5.1.67) est facile à vérifier dans la théorie des perturbations compte tenu de ce que $\partial n_2^{(0)}/\partial \varepsilon_1 \sim \delta_{1,2}$.) Ainsi, pour vérifier le principe variationnel (5.1.64), il faut voir que (5.1.67) est vrai, après avoir préalablement vérifié (5.1.63).

Pour vérifier (5.1.63), (5.1.67), trouvons d'abord $n_1 = \mathrm{Sp}\, w a_1^+ a_1$ et $s_{eq} = -\mathrm{Sp}\, w \ln w$ en approximation envisagée. A cet effet on aurait pu utilisé la théorie thermodynamique des perturbations. Cependant il est plus commode d'élaborer la théorie thermodynamique des perturbations un peu différemment en partant du fait que la solution stationnaire de l'équation cinétique $f_p = n_p$, annulant l'intégrale des collisions L_p:

$$L_p\,(n) = 0, \tag{5.1.68}$$

donne un opérateur statistique $\sigma\,(n)$ qui est équivalent à la distribution de Gibbs [86]

$$\mathrm{Sp}\,\sigma(n)\,\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n)=\mathrm{Sp}\,w\psi^+(x_1)\ldots\psi(x_n). \quad (5.1.69)$$

La fonction de distribution n_1 coïncide alors avec la fonction de distribution à l'équilibre $n_1 = \mathrm{Sp}\,wa_1^+a_1$. En vertu de (5.1.68) et (5.1.40), $\sigma(n)$ et par conséquent w satisfont à l'équation intégrale suivante

$$w=\rho^{(0)}(n)+i\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}[w,\ V]\,e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \quad (5.1.70)$$

la relation $L_p(n) = 0$ étant la condition de résolubilité de l'équation intégrale. (Celle-ci est obtenue en multipliant l'équation (5.1.70) par $a_1^+a_1$ et en calculant ensuite la trace.)

Soulignons que l'équation (5.1.70) ne contient aucune caractéristique macroscopique du type température ou potentiel chimique. La fonction de distribution à l'équilibre n_1 figurant dans $\rho^{(0)}(n)$, ainsi que les caractéristiques macroscopiques apparaissent dans la théorie des perturbations par rapport à l'interaction lorsqu'on résout l'équation $L_p(n) = 0$.

Nous allons passer maintenant au calcul de la fonction de distribution d'équilibre $n_1 = \mathrm{Sp}\,wa_1^+a_1$ qui est liée à Ω par la relation

$$n_1=\beta^{-1}\,\partial\Omega/\partial\varepsilon_1. \quad (5.1.71)$$

Pour trouver Ω nous allons dériver la condition de normalisation de w par rapport à la constante d'interaction λ. Finalement on obtient

$$\beta^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=\mathrm{Sp}\,\tilde{w}V+\frac{1}{2\mathcal{V}}\sum_{12}\Phi(1,\ 2;\ 1,\ 2)\,n_1n_2, \quad (5.1.72)$$

où l'on a introduit la désignation $\tilde{w} = w - \rho^{(0)}(n)$ et utilisé l'expression explicite (5.1.2) pour V. En développant $\tilde{w}$ et n_1 en séries de la théorie des perturbations

$$\tilde{w}=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{w}^{(k)},\quad n_1=\sum_{k=1}^{\infty}n_0^{(k)}$$

(le développement pour $\tilde{w}$ apparaît par suite du développement de w en série suivant les puissances de V et du développement de la fonction de distribution n_1 figurant dans $\rho^{(0)}(n)$), on obtient à partir des équations (5.1.71), (5.1.72) les relations suivantes:

$$n_1^{(0)}=(e^{\beta(\varepsilon_1-\mu)}-1)^{-1},$$

$$n_1^{(k+1)}=\frac{1}{k+1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\mathrm{Sp}\,\tilde{w}^{(k)}V+$$

$$+\frac{1}{k+1}\frac{1}{\mathcal{V}}\sum_{1'2'}\Phi(1',\ 2';\ 1',\ 2')\sum_{l=0}^{k}\frac{\partial n_{1'}^{(l)}}{\partial\varepsilon_1}n_{2'}^{(k-l)}, \quad (5.1.73)$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

qui permettent d'exprimer le k-ième terme du développement de la fonction de distribution d'équilibre en fonction de $n_1^{(0)}$ et de $\mathrm{Sp}\,\tilde{w}^{(l)}V$ $(l = 1, \ldots, k-1)$. D'où l'on trouve

$$n_1^{(1)} = -\beta n_1^{(0)}(1 + n_1^{(0)})\,\varepsilon_1^{(1)}, \tag{5.1.74}$$

où $\varepsilon_1^{(1)} = \mathcal{V}^{-1}\sum_2 \Phi\,(1,\ 2;\ 1,\ 2)\, n_2^{(0)}$ (voir la formule (5.1.48)).

Nous allons maintenant passer au calcul de l'entropie d'équilibre $s_{eq} = -\mathrm{Sp}\, w \ln w$. En dérivant cette expression par rapport à la constante d'interaction et en remarquant que $\beta\,(\varepsilon_1 - \mu) = = (\partial s^{(0)}(f)/\partial f_1)_{f=n^{(0)}}$, on obtient

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \lambda} = \sum_1 \frac{\partial n_1}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1}\right)_{f=n^{(0)}} + \beta\,\mathrm{Sp}\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \lambda} V + \\ + \beta \mathcal{V}^{-1}\sum_{12} \Phi\,(1,\ 2;\ 1,\ 2)\frac{\partial n_1}{\partial \lambda} n_2.$$

D'où, en développant l'entropie d'équilibre s_{eq} en série de la théorie des perturbations

$$s_{eq} = \sum_{k=0}^{\infty} s_{eq}^{(k)},$$

on obtient pour $(k+1)$-ième terme du développement l'expression suivante:

$$s_{eq}^{(k+1)} = \sum_1 \left(\frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1}\right)_{f=n^{(0)}} n_1^{(k+1)} + \frac{k}{k+1}\beta\,\mathrm{Sp}\,\tilde{w}^{(k)}V + \\ + \beta\mathcal{V}^{-1}\sum_{12}\Phi\,(1,\ 2;\ 1,\ 2)\sum_{l=1}^{k}\frac{l}{k+1} n_1^{(l)} n_2^{(k-l)},$$

qui donne en vertu de (5.1.74)

$$s_{eq}^{(0)} = s^{(0)}(n^{(0)}), \quad s_{eq}^{(1)} = (s^{(0)}(n))^{(1)}, \\ s_{eq}^{(2)} = (s^{(0)}(n))^{(2)} + \frac{1}{2}\beta\,\mathrm{Sp}\,\tilde{w}_1 V. \tag{5.1.75}$$

Dans ces expressions les grandeurs $(s^{(0)}(n))^{(1)}$, $(s^{(0)}(n))^{(2)}$ sont les termes du développement de $s^{(0)}(n)$ liés au développement de la fonction de distribution d'équilibre

$$s^{(0)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty}(s^{(0)}(n))^{(k)}.$$

Nous allons tout d'abord vérifier l'égalité $s\,(n) = s_{eq}$. Conformément à (5.1.75) cette égalité est évidente pour les termes d'ordres zéro et premier. Pour que cette égalité soit vraie pour les termes du

second ordre, en vertu de ces mêmes formules on doit avoir la relation suivante

$$s^{(2)}(n^{(0)}) = \frac{1}{2}\beta \,\mathrm{Sp}\, \tilde{w}_1 V. \tag{5.1.76}$$

Pour la vérifier remarquons qu'à partir de (5.1.70) on a la formule

$$\mathrm{Sp}\, \tilde{w}_1 V = i \int_{-\infty}^{0} d\tau \,\mathrm{Sp}\, [w_0, V(\tau)] V,$$

où $w_0 = \rho^{(0)}(n^{(0)})$. La relation (5.1.76) devient maintenant évidente si l'on tient compte de la formule

$$\varphi(\tau; n^{(0)}) = i\beta \frac{\partial}{\partial\tau} \mathrm{Sp}\, w_0 [V, V(\tau)],$$

qui découle de la définition de $\varphi(\tau; f)$ donnée par (5.1.53).

Nous allons maintenant vérifier le principe variationnel (5.1.64) ou la relation équivalente (5.1.67). A cet effet, remarquons qu'en vertu de (5.1.41) le développement de $V(f)$ suivant l'interaction est de la forme

$$V(f) = V_1(f) + V_2(f) + \ldots,$$

où

$$V_1(f) = \mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(f) V, \quad V_2(f) = i \int_{-\infty}^{0} d\tau \,\mathrm{Sp}[\rho^{(0)}(f), V(\tau)] V. \tag{5.1.77}$$

Ce qui montre que compte tenu de (5.1.61) la relation (5.1.67) se trouve vérifiée pour les ordres zéro et premier. Pour le second ordre, on doit avoir la relation

$$\left(\frac{\partial s^2(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n^{(0)}} = \beta \left(\frac{\partial V_2(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n^{(0)}} \tag{5.1.78}$$

qui est également vérifiée. En effet, conformément à (5.1.61), (5.1.53), on a

$$\left(\frac{\partial s^2(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n^{(0)}} = -\beta \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \tau \,\mathrm{Sp}\, w_0 [V, [V(\tau), a_1^+ a_1]],$$

d'où l'on obtient (5.1.78) en tenant compte de l'expression (5.1.77) pour $V_2(f)$.

Ainsi, l'entropie que nous avons définie (5.1.61) en approximation envisagée est douée des propriétés générales (5.1.63), (5.1.64) de l'entropie hors d'équilibre.

Remarquons pour conclure ce paragraphe qu'on peut trouver d'une manière analogue l'entropie d'un gaz faiblement non parfait hors d'équilibre en approximations suivantes de la théorie des perturbations [91].

§ 5.2. Equation cinétique compte tenu des seules interactions binaires

5.2.1. Opérateur statistique à l'étape cinétique de l'évolution. Au § 5.1 nous avons obtenu une équation intégrale pour l'opérateur statistique à l'étape cinétique de l'évolution en supposant que l'interaction entre les particules est faible. Dans le cas des états spatialement homogènes, cette équation s'écrit

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} \times$$
$$\times \left\{ [V, \sigma(f)] - i \sum_{p} \frac{\partial \sigma(f)}{\partial f_p} L_p(f) \right\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

où $L_p(f)$ est l'intégrale des collisions

$$L_p(f) = i \operatorname{Sp} \sigma(f) [V, a_p^+ a_p] \tag{5.2.1}$$

(pour plus de simplicité nous n'avons pas tenu compte ici des variables spinorielles).

Cependant, tout comme dans le cas classique, il n'est pas indispensable ici que l'interaction soit faible. En effet, ce qui est important, c'est que pour des temps suffisamment grands, l'état du système peut être décrit par une fonction de distribution à une particule. A cet effet il faut que la fonction de distribution à une particule varie plus lentement que les fonctions de distribution à particules multiples, et les fonctions de distribution à particules multiples auront ainsi le temps de suivre les valeurs instantanées de la fonction de distribution à une particule. Une telle situation se rencontre non seulement dans le cas d'une interaction faible, mais également dans le cas d'une densité de particules faible. Dans le premier cas les collisions peuvent alors être fréquentes bien que la probabilité d'un acte de diffusion ne soit pas grande. Dans le second cas, par contre, la probabilité d'un acte de diffusion peut être grande, alors que les collisions se produisent rarement par suite de la densité faible des particules.

Dans le § 5.2 nous allons obtenir les équations cinétiques pour des systèmes quantiques dans le cas d'une densité de particules faible. Comme nous venons de le mentionner, on peut se baser sur l'équation intégrale (5.1.40) pour l'opérateur statistique $\sigma(f)$. Cependant, il y a lieu de chercher la solution de cette équation non pas sous la forme d'un développement suivant les puissances de l'interaction, mais sous la forme d'un développement suivant les puissances de la densité. Du point de vue formel, à ce développement correspond le développement de l'opérateur statistique $\sigma(f)$ en une série fonctionnelle suivant les puissances de la fonction de distribution f.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $\sigma(f)$ peut s'exprimer simplement en fonction de $\rho^{(0)}(f)$. A cet effet on écrit l'équation (5.1.40) comme

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau}[W, \sigma(f)]\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \qquad (5.2.2)$$

où

$$W = -V + i\sum_p L_p(f)\frac{\partial}{\partial f_p}$$

(l'opérateur W agit dans l'espace hilbertien et dans l'espace des fonctionnelles de la fonction de distribution).

Nous allons maintenant utiliser les formules (5.1.18'), (5.1.18"). En y posant

$$A = i[W, \sigma(f)], \quad U = W, \quad H = \mathcal{H} - i\sum_p L_p(f)\frac{\partial}{\partial f_p} = \mathcal{H}_0 - W,$$

on trouve en vertu de (5.2.1)

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{iH\tau}\{i[W, \sigma(f)] - i[W, B]\}\, e^{-iH\tau}.$$

Remarquant que $B = \sigma(f) - \rho^{(0)}(f)$, on a

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{iH\tau}[\rho^{(0)}(f), H]\, e^{-iH\tau}$$

(nous avons tenu compte de ce que $[\rho^{(0)}(f), \mathcal{H}_0] = 0$). Etant donné que

$$e^{iH\tau} i[\rho^{(0)}(f), H]\, e^{-iH\tau} = -\frac{\partial}{\partial\tau} e^{iH\tau}\rho^{(0)}(f)\, e^{-iH\tau},$$

l'intégration par parties donne

$$\sigma(f) = \eta\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{iH\tau}\rho^{(0)}(f)\, e^{-iH\tau}$$

ou bien

$$\sigma(f) = \eta\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{\tau\sum_p L_p(f)\frac{\partial}{\partial f_p}} e^{i\mathcal{H}\tau}\rho^{(0)}(f)\, e^{-i\mathcal{H}\tau}. \qquad (5.2.3)$$

En substituant cette expression dans (5.2.1), on obtient l'expression suivante pour l'intégrale des collisions $L_p(f)$ [38]:

$$L_p(f) = i\eta\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{\tau\sum_{p'} L_{p'}(f)\frac{\partial}{\partial f_{p'}}} \cdot \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\, e^{-i\mathcal{H}\tau}[V, a_p^+ a_p]\, e^{i\mathcal{H}\tau}. \qquad (5.2.4)$$

Les formules (5.2.3), (5.2.4) permettent, en principe, d'obtenir les développements de $\sigma(f)$ et de $L_p(f)$ en séries fonctionnelles suivant les puissances de f, car nous connaissons le développement de $\rho^{(0)}(f)$ suivant les puissances de f (voir (3.1.33)). C'est le problème que nous allons traiter dans le paragraphe suivant.

5.2.2. Développement de l'intégrale des collisions en série suivant les puissances de la fonction de distribution à une particule. Comme nous l'avons déjà mentionné, pour trouver le développement de $\sigma(f)$ et de $L_p(f)$ en série suivant les puissances de f, il suffit d'utiliser le développement (3.1.33) de l'opérateur statistique d'un gaz parfait hors d'équilibre $\rho^{(0)}(f)$ en série suivant les puissances de f:

$$\rho^{(0)}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^{(0)}(f),$$

où les opérateurs $\rho_n^{(0)}(f)$ sont donnés par les formules (3.1.33).

Le développement de $L_p(f)$ en série suivant les puissances de f sera

$$\begin{aligned} &L_p(f)=\sum_{n=2}^{\infty}L_p^n(f),\\ &L_p^2(f)=M_0^2(p;f),\\ &L_p^3(f)=M_0^3(p;f)+\sum_{p'}M_0^2(p';f)\frac{\partial}{\partial f_{p'}}M_1^2(p;f).\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\tag{5.2.5}$$

Ici

$$\begin{gathered} M_l^{(n)}(p;f)=i\eta\int_{-\infty}^{0}d\tau\,\tau^l\mathcal{F}_\tau^{(n)}(p;f)e^{\eta\tau}=\eta\frac{\partial^l}{\partial\eta^l}\frac{1}{\eta}M_0^{(n)}(p;f),\\ \mathcal{F}_\tau^{(n)}(p;f)=\operatorname{Sp}\rho_n^{(0)}(f)e^{-i\mathcal{H}\tau}[V,a_p^+a_p]e^{i\mathcal{H}\tau}. \end{gathered}\tag{5.2.6}$$

L'opérateur $\rho_n^{(0)}(f)$ peut s'écrire comme

$$\rho_n^{(0)}(f)=\bar{\rho}_n^{(0)}(f)+\bar{\bar{\rho}}_n^{(0)}(f).$$

Ici $\bar{\rho}_n^{(0)}(f)$ s'exprime en fonction du projecteur $|1,\dots,n\rangle\langle 1,\dots,n|$ sur l'état à n particules

$$\bar{\rho}_n^{(0)}(f)=\frac{1}{n!}\sum_{1\dots n}|1,\dots,n\rangle f_1\dots f_n\langle 1,\dots,n|,\tag{5.2.7}$$

et $\bar{\bar{\rho}}_n^{(0)}(f)$ en fonction des projecteurs $|1,\dots,n-1\rangle\langle 1,\dots,n-1|,\dots,|0\rangle\langle 0|$ sur les états à $n-1$, $n-2$, ... particules, qui sont multipliés par certaines formes contenant les produits de n fonctions de distribution, ces formes contenant soit les fonctions de distribution avec des impulsions qui coïncident

(comme par exemple, $f_1 \cdot f_1$), soit des fonctions de distribution sous le signe sigma (comme par exemple $\sum_1 f_1$, $\sum_1 f_1^2$, voir (3.1.33)). En utilisant les règles de Vick lors de l'élaboration de la théorie des perturbations par rapport à l'interaction pour les grandeurs $\mathcal{F}_\tau(p; f) = \sum_n \mathcal{F}_\tau^{(n)}(p; f)$ il est facile de voir que ces termes n'apparaissent pas dans $\mathcal{F}_\tau(p; f)$. C'est pourquoi, ils n'apparaissent pas non plus dans $\mathcal{F}_\tau^{(n)}(p; f)$. Ils doivent, par conséquent, après avoir apparu dans $\overline{\mathcal{F}}_\tau^{(n)}(p; f)$:

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau^{(n)}(p; f) = \operatorname{Sp} \bar{\rho}_n^{(0)}(f)\, e^{-i\mathcal{H}\tau}[V, a_p^+ a_p]\, e^{i\mathcal{H}\tau} \tag{5.2.8}$$

se simplifier avec la grandeur $\overline{\overline{\mathcal{F}}}_\tau^{(n)}(p; f)$:

$$\overline{\overline{\mathcal{F}}}_\tau^{(n)}(p; f) = \operatorname{Sp} \bar{\bar{\rho}}_n^{(0)}(f)\, e^{-i\mathcal{H}\tau}[V, a_p^+ a_p]\, e^{i\mathcal{H}\tau}$$

en somme $\overline{\mathcal{F}}_\tau^{(n)}(p; f) + \overline{\overline{\mathcal{F}}}_\tau^{(n)}(p; f) \equiv \mathcal{F}_\tau^{(n)}$. C'est pourquoi, si l'on désigne par [...] l'opération consistant à rejeter les termes du type $f_1 \cdot f_1$, $\sum_1 f_1$, ..., on obtient pour $\mathcal{F}_\tau^{(n)}$ la formule suivante

$$\mathcal{F}_\tau^{(n)} = [\overline{\mathcal{F}}_\tau^{(n)}].$$

Ainsi la grandeur $M_l^{(n)}$ peut s'écrire comme suit

$$M_l^{(n)} = [\overline{M}_l^{(n)}],$$
$$\overline{M}_l^{(n)}(p; f) = i\eta \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} \overline{\mathcal{F}}_\tau^{(n)}(p; f)\, \tau^l. \tag{5.2.9}$$

Nous allons montrer que $\overline{M}_l^{(n)}$ peut s'exprimer en termes de grandeurs caractéristiques de la théorie quantique de la diffusion, à savoir:

$$\begin{gathered}\overline{M}_l^{(n)}(p; f) = \frac{i\eta(-i)^l}{2\pi(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE'\, \delta^{(l)}(E-E')(E-E'+i\eta) \times \\ \times \sum_{1 \ldots n} \sum_{1' \ldots n'} R_{0,1\ldots n}^{(-)}(E')\, R_{0,1\ldots n}^{(+)}(E)\, R_{0,1'\ldots n'}^{(-)}(E') \times \\ \times R_{0,1',\ldots n'}^{(+)}(E)(\delta_{p,1} + \ldots + \delta_{p,n})(f_1 \ldots f_n - f_{1'} \ldots f_{n'}) \times \\ \times T_{1\ldots n;\, 1'\ldots n'}^{(+)}(E)\, T_{1\ldots n,\, 1'\ldots n'}^{(+)}(E')^*,\end{gathered} \tag{5.2.10}$$

où

$$R_{0,1\ldots n}^{(\pm)}(E) = R_{0,1\ldots n}\left(E \pm \frac{1}{2} i\eta\right)$$

ont les valeurs propres de la résolvante $R_0(z) = (z - \mathcal{H}_0)^{-1}$ du hamiltonien $\mathcal{H}_0$ pour $z = E \pm \frac{1}{2} i\eta$ et $T(z)$ est l'opérateur de diffusion $T(z) = V + VR_0(z)\,T(z)$, avec (voir le paragraphe 2.1.2) $T^{(\pm)}_{1\ldots n;\,1'\ldots n'} = \langle 1, \ldots, n \mid T(E \pm \frac{1}{2} i\eta) \mid 1', \ldots, n' \rangle$.

Pour démontrer (5.2.10), on utilise les formules

$$e^{\mp i\mathcal{H}\tau} e^{\frac{1}{2}\eta\tau}\theta(-\tau) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{\mp iE\tau} R^{(\mp)}(E),$$

où $R^{(\pm)}(E) = R\left(E \pm \frac{1}{2} i\eta\right)$ et $R(z) = (z - \mathcal{H})^{-1}$ est la résolvante du hamiltonien $\mathcal{H}$. A l'aide de ces formules il est facile d'écrire $\overline{M}^{(n)}_l$ sous la forme

$$\overline{M}^{(n)}_l = \frac{i\eta(-i)^l}{2\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta^{(l)}(E - E') \sum_{1\ldots n} f_1 \ldots f_n \times$$
$$\times \{A_{1\ldots n}(E, E') - A^*_{1\ldots n}(E', E)\}, \quad (5.2.11)$$

où

$$A_{1\ldots n}(E, E') = \langle 1, \ldots, n \mid R^{(-)}(E')\, V a_p^+ a_p R^{(+)}(E) \mid 1, \ldots, n \rangle.$$

La grandeur $A_{1\ldots n}(E, E')$ s'écrit comme suit:

$$A_{1\ldots n}(E, E') = A^{(1)}_{1\ldots n}(E, E') + A^{(2)}_{1\ldots n}(E, E'),$$
$$A^{(1)}_{1\ldots n}(E, E') = \langle 1, \ldots, n \mid R^{(-)}(E')\, V a_p^+ a_p \times$$
$$\times (R^{(+)}(E) - R_0^{(+)}(E)) \mid 1, \ldots, n \rangle,$$
$$A^{(2)}_{1\ldots n}(E, E') = \langle 1, \ldots, n \mid R^{(-)}(E')\, V a_p^+ a_p R_0^{(+)}(E) \mid 1, \ldots, n \rangle.$$

En utilisant la condition de complétude (2.2.9) et les relations

$$R^{(-)}(E')\, V = R_0^{(-)}(E')\, T^{(-)}(E'), \quad R^{(+)}(E) - R_0^{(+)}(E) =$$
$$= R_0^{(+)}(E)\, T^{(+)}(E)\, R_0^{(+)}(E),$$

il est facile de voir que

$$A^{(1)}_{1\ldots n}(E, E') = R^{(-)}_{0,\,1\ldots n}(E')\, R^{(+)}_{0,\,1\ldots n}(E) \times$$
$$\times \frac{1}{n!} \sum_{1'\ldots n'} T^{(-)}_{1\ldots n;\,1'\ldots n'}(E') \times$$
$$\times T^{(+)}_{1'\ldots n';\,1\ldots n}(E)\,(\delta_{p,1'} + \ldots + \delta_{p,n'})\, R^{(+)}_{0,\,1'\ldots n'}(E), \quad (5.2.12)$$
$$A^{(2)}_{1\ldots n}(E, E') = R^{(-)}_{0,\,1\ldots n}(E')\, R^{(+)}_{0,\,1\ldots n}(E)\, T^{(-)}_{1\ldots n;\,1\ldots n}(E') \times$$
$$\times (\delta_{p,1} + \ldots + \delta_{p,n}).$$

Pour trouver l'apport de $A^{(2)}_{1\ldots n}(E, E')$ dans $\overline{M}^{(n)}_{l}$, on utilise la formule (2.1.29)

$$T^{(-)}(E')-T^{(+)}(E)=(E-E'+i\eta)\,T^{(+)}(E)\,R_0^{(+)}(E)\,R_0^{(-)}(E')\,T^{(-)}(E').$$

En remarquant que $T^{(+)}(E) = T^{(-)}(E)^{(+)}$, à partir de (5.2.11), (5.2.12) on obtient la formule (5.2.10).

Notons que

$$\overline{M}^{(n)}_0(p\,;\,f)=-\frac{\eta^2}{4\pi\,(n\,!)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dE\sum_{1\ldots n}\;\sum_{1'\ldots n'}|\,R^{(+)}_{0,\,1\ldots n}(E)\,|^2\times$$
$$\times\,|\,R^{(+)}_{0,\,1'\ldots n'}(E)\,|^2\,|\,T^{(+)}_{1\ldots n\,;\,1'\ldots n'}(E)\,|^2\times$$
$$\times\,(\delta_{p,\,1}+\ldots+\delta_{p,\,n}-\delta_{p,\,1'}-\delta_{p,\,n'})\,(f_1\ldots f_n-f_{1'}\ldots f_{n'}). \quad (5.2.13)$$

A partir du développement (5.2.5) et compte tenu de (5.2.9), on peut écrire les grandeurs $L^{(n)}_p(f)$ sous la forme

$$L^{(2)}_p(f)=[\overline{M}^{2}_0(p,\,f)],$$
$$L^{(3)}_p(f)=[\overline{M}^{(3)}_0(p\,;\,f)]+\sum_{p'}[\overline{M}^{(2)}_0(p',\,f)]\,\frac{\partial}{\partial f_{p'}}\,[\overline{M}^{2}_1(p\,;\,f)], \quad (5.2.14)$$

. . . .

où $\overline{M}^{(n)}_l(p;\,f)$ est donné par la formule (5.2.10).

Nous allons trouver l'expression explicite de la grandeur $L^{(2)}_p(f)$, qui est l'intégrale des collisions en approximation principale par rapport à la densité des particules. En vertu de (5.2.13), la grandeur $\overline{M}^{(2)}_0$ s'écrit

$$\overline{M}^{(2)}_0(p\,;\,f)=-\frac{\eta^2}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dE\sum_{12}\sum_{1'2'}|\,R^{(+)}_{0,\,12}(E)\,|^2\,|\,R^{(+)}_{0,\,1'2'}(E)\,|^2\times$$
$$\times\,|\,T^{(+)}_{12\,;\,1'2'}(E)\,|^2\,(\delta_{p,\,1}+\delta_{p,\,2}-\delta_{p,\,1'}-\delta_{p,\,2'})\,(f_1f_2-f_{1'}f_{2'}),$$

d'où de toute évidence on a $[\overline{M}^{(2)}_0]=\overline{M}^{(2)}_0$. C'est pourquoi en remarquant que

$$\eta\,|\,R^{(+)}_{0,\,12}(E)\,|^2\xrightarrow[\eta\to+0]{}2\pi\delta\,(E-\varepsilon_1-\varepsilon_2),$$

on obtient finalement [87].

$$L^{2}_p(f)=\pi\sum_{121'2'}|\,T^{(+)}_{1,\,2\,;\,1'2'}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,|^2\,\delta\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_{1'}-\varepsilon_{2'})\times$$
$$\times\,\delta_{p,\,2}\,(f_{1'}f_{2'}-f_1f_2). \quad (5.2.15)$$

La grandeur $T^{(+)}_{12;\,1'2'}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ qui entre dans cette expression, est l'amplitude de la transition de l'état $|\,1',\,2'\rangle$ à l'état $|\,1,\,2\rangle$. Ainsi, $L^{(2)}_p(f)$ a la structure de l'intégrale des collisions de Boltz-

mann, mais la probabilité de transition est déterminée ici non par la mécanique classique, mais par la mécanique quantique. (Rappelons qu'on a déjà utilisé dans le § 1.4 les équations du type d'équation cinétique de Boltzmann avec une probabilité quantique et non classique.)

5.2.3. Développement quantique du viriel de l'intégrale des collisions. Dans le paragraphe précédent nous avons trouvé la forme d'intégrale des collisions dans le cas où la densité des particules est le plus petit des paramètres, c'est-à-dire lorsque la distance entre les particules a est grande, tant par rapport au rayon d'action des forces d'interaction r_0 que par rapport à la longueur moyenne d'onde broglienne des particules λ. Dans ce paragraphe nous allons obtenir l'intégrale des collisions dans le cas où le plus petit des paramètres est r_0 ($r_0 \ll a$, λ), pour ce qui est de la relation entre a et λ, elle peut être arbitraire. (Le développement suivant le paramètre r_0/λ est appelé développement quantique du viriel.) Dans ce cas la fonction de distribution à une particule f_p n'est pas obligatoirement petite par rapport à l'unité: si $p \lesssim \lambda^{-1}$, f_p peut être de l'ordre de l'unité, par contre, si $p \gg \lambda^{-1}$, on a $f_p \ll 1$. Nous allons montrer qu'en cette approximation l'intégrale des collisions pour les bosons s'écrit [38]:

$$L_p(f) = \pi \sum_{121'2'} | T^{(+)}_{12;\,1'2'}(\varepsilon_2 + \varepsilon_{2'}) |^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) \times$$
$$\times \delta_{p,\,2} \{ f_{1'} f_{2'} (1 + f_1)(1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_{1'})(1 + f_{2'}) \}. \quad (5.2.16)$$

Dans le cas des fermions, dans cette expression il y a lieu de procéder à la substitution $1 + f \to 1 - f$.

Pour démontrer cette formule, nous allons isoler dans la grandeur $L_p^{(n)}(f)$ le terme principal par rapport au paramètre r_0/λ et sommer ensuite tous ces termes principaux. Pour expliquer comment on peut isoler dans $L_p^{(n)}(f)$ le terme principal par rapport au paramètre r_0/λ considérons les deux intégrales suivantes

$$A = \int d^3p f_p \varphi(r_0 p), \quad B = \int d^3p \varphi(r_0 p),$$

où $\varphi(x)$ est une certaine fonction différente de zéro seulement pour $x \lesssim 1$. Compte tenu de ce que $f_p \sim 1$ pour $p \lesssim \lambda^{-1}$, et $f_p \ll 1$ pour $p \gg \lambda^{-1}$, on a

$$A \approx r_0^{-3} \int_0^{r_0/\lambda} dx \varphi(x) x^2, \quad B \approx r_0^{-3} \int_0^1 dx \varphi(x) x^2,$$

d'où $|A| \ll |B|$ car $r_0 \ll \lambda$.

Ainsi, pour obtenir les termes principaux dans le développement quantique du viriel de l'intégrale des collisions, il y a lieu dans

$\overline{M}^{(n)}_l$ de ne tenir compte que des termes dans lesquels on rencontre le nombre minimal d'intégrations des fonctions de distribution f_p avec des fonctions du type $\varphi(r_0 p)$ différant de zéro seulement pour $p \lesssim r_0^{-1}$. Les fonctions de ce type sont dues aux amplitudes quantiques $T^{(+)}_{1 \ldots n;\, 1' \ldots n'}(E)$ (voir (5.2.10)). Il ne faut pas oublier que ces amplitudes à n particules contiennent en plus de l'ensemble lié à n particules des ensembles non liés que l'on peut exprimer en fonction des amplitudes d'ordre inférieur. C'est ce qui est illustré sur la fig. 3 (les lignes droites correspondent aux particules; les courbes fermées unissent en ensembles les particules qui ont interagi). Les ensembles liés s'annulant pour $p \gg r_0^{-1}$ sur toutes les variables impulsionnelles, l'apport principal dans $\overline{M}^{(n)}_l$ proviendra des diagrammes de la fig. 3 qui contiennent un ensemble lié à deux particules (voir fig. 3, b).

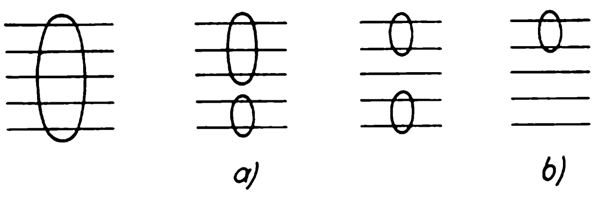


Fig. 3

En désignant par $\widetilde{T}^{(+)}_{1 \ldots n;\, 1' \ldots n'}(E)$ l'apport dans $T^{(+)}_{1 \ldots n;\, 1' \ldots n'}(E)$ des diagrammes de la transmission à deux particules (voir fig. 3, b) de sorte que les règles de Vick donnent

$$\widetilde{T}^{(+)}_{1 \ldots n;\, 1' \ldots n'}(E) =$$

$$= \frac{1}{4} \underset{i_1 \neq i_2}{S} \; \underset{i_1' \neq i_2'}{S} \; T^{(+)}_{i_1 i_2;\, i_1' i_2'}(E - \varepsilon_{i_3} - \ldots - \varepsilon_{i_n}) \underset{i'}{S} \ldots \delta_{i_3 i_3'} \ldots \delta_{i_n,\, i_n'}, \quad (5.2.17)$$

où $\underset{i_1 \neq i_2}{S}$ désigne la sommation sur les paires d'indices ne coïncidant pas entre eux 1, 2; 2, 1; ... ; $n-1$, n, et $\underset{i'}{S}$ la sommation sur toutes les permutations des indices primés ($i_1 \ldots i_n$ et $i_1' \ldots i_n'$ sont des permutations des indices $1 \ldots n$ et $1' \ldots n'$).

Remarquant maintenant que l'intégrale des collisions elle-même est petite pour $\lambda \gg r_0$, on trouve en vertu de (5.2.14), (5.2.4) que le terme principal dans $L^{(n)}_p(f)$ par rapport au paramètre r_0/λ sera égal à $[\widetilde{M}^{(n)}_0(p;\, f)]$, où

$$\widetilde{M}^{(n)}_0(p;\, f) = -\frac{\eta^2}{16\pi} \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{1 \ldots n} \sum_{1'2'} |\, R^{(+)}_{0,\,12}(E)\,|^2 \times$$

$$\times | R^{(+)}_{0;\,1'2'}(E) |^2 (f_1 f_2 - f_{1'} f_{2'}) f_3 \ldots f_n (\delta_{p,\,1} + \delta_{p,\,2} - \delta_{p,\,1'} - \delta_{p,\,2'}) \times$$
$$\times T^{(+)}_{12;\,1'2'}(E)^* \widetilde{T}^{(+)}_{12\ldots n;\,1'2'3\ldots n'}(E + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n). \quad (5.2.18)$$

Le terme principal dans le développement du viriel quantique de l'intégrale des collisions, que nous désignerons simplement par $L_p(f)$, sera donc égal à

$$L_p(f) = \sum_{n=2}^{\infty} [\widetilde{M}_0^{(n)}(p;\, f)].$$

Nous allons montrer que

$$[\widetilde{M}_0^{(n)}(p;\, f)] = 0, \quad n > 3, \quad (5.2.19)$$

et par conséquent

$$L_p(f) = [\widetilde{M}_0^{(2)}(p;\, f)] + [\widetilde{M}_0^{(3)}(p;\, f)]. \quad (5.2.20)$$

Pour s'en rendre compte remarquons que les termes de $\widetilde{T}^{(+)}$ du type $T^{(+)}_{kl;\,k'l'}$; $T^{(+)}_{al;\,k'l'}$; $T^{(+)}_{kl;\,a'l'}$, $T^{(+)}_{al;\,a'l'}$ (ici $a = 1, 2$; $k, l = 3, \ldots, n$ et $a' = 1', 2'$; $k', l' = 3', \ldots, n'$) n'influent pas sur $[\widetilde{M}_0^{(n)}]$, car ils contiennent des produits de symboles de Kronecker $\delta_{a,\,s'}\delta_{a',s}$, où $s' = 3', \ldots, n'$, $s = 3, \ldots, n$. (Nous avons tenu compte du fait que les termes dans $\widetilde{T}^{(+)}$ contenant les facteurs $\delta_{a,\,a'}$ n'influent pas sur $\widetilde{M}_0^{(n)}$, car le symbole de Kronecker $\delta_{1+2,\,1'+2'}$ contenu dans $T^{(+)}_{12;\,1'2'}(E)$ annule l'expression $f_1 f_2 - f_{1'} f_{2'}$.) Remarquons de plus que le terme de $\widetilde{T}^{(+)}$ du type $T^{(+)}_{12;\,1'2'}(E) \underset{i'}{S}\, \delta_{3,\,3'} \ldots \delta_{nn'}$ n'influe également pas sur $[\widetilde{M}_0^{(n)}]$, lors du calcul de $[\widetilde{M}_0^{(n)}]$ on peut donc remplacer $\widetilde{T}^{(+)}$ par

$$\widetilde{T}^{(+)}_{12\ldots n;\,1'2'\ldots n'}(E + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n) \to$$
$$\to \frac{1}{2} \underset{\substack{i_1' i_2' \neq 1'2' \\ (i_1' \neq i_2')}}{S} T^{(+)}_{12;\,i_1' i_2'}(E) \underset{i'}{S}\, \delta_{3,\,i_3'} \ldots \delta_{n,\,i_n'} +$$
$$+ \frac{1}{2} \underset{\substack{i_1 i_2 \neq 1,\,2 \\ (i_1 \neq i_2)}}{S} T^{(+)}_{i_1 i_2;\,1'2'}(E + \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \times$$
$$\times \underset{i'}{S}\, \delta_{3',\,i_3} \ldots \delta_{n',\,i_n}. \quad (5.2.21)$$

Considérons maintenant les termes du second membre de cette relation pour lesquels i_1', $i_2' = k'$, l', i_1, $i_2 = k$, l où k', $l' = 3', \ldots, n'$ et k, $l = 3, \ldots, n$ (qui peuvent apparaître seulement pour $n \geqslant 4$) :

$$\frac{1}{2} \underset{k' \neq l'}{S} T^{(+)}_{12;\,k'l'}(E) (\delta_{k,\,1'}\delta_{l,\,2'} + \delta_{k,\,2'}\delta_{l,\,1'}) \delta_{k,\,k'}\delta_{l,\,l'} +$$
$$+ \frac{1}{2} \underset{k \neq l}{S} T^{(+)}_{kl;\,1'2'}(E) (\delta_{1,\,k'}\delta_{2,\,l'} + \delta_{2,\,k'}\delta_{1,\,l'}) \delta_{k,\,k'}\delta_{l,\,l'}.$$

Il est facile de voir qu'ils donnent lieu à l'apparition dans $\tilde{M}_0^{(n)}$ du facteur $(f_1f_2 - f_{1'}f_{2'})(f_1f_2 + f_{1'}f_{2'}) = f_1^2f_2^2 - f_{1'}^2f_{2'}^2$ et par conséquent n'influent pas sur $[\tilde{M}_0^{(n)}]$.

Enfin les termes, dans le second membre de (5.2.21) pour lesquels $i'_1, i'_2 = a', l'$; $i_1, i_2 = a, l$, où $a' = 1', 2'$, $l' = 3', \ldots, n'$ et $a = 1, 2$, $l = 3, \ldots, n$ (ils peuvent apparaître seulement pour $n \geqslant 3$) ont la structure suivante:

$$T^{(+)}_{12;\,1'2'}(E)\{\underset{l'>2'}{S}\ \underset{i'}{S}\ \underbrace{\delta_{3,2'}\ldots\delta_{n,i'_n}}_{1',\,l'\ \text{absents}} + \underset{l>2}{S}\ \underset{i'}{S}\ \underbrace{\delta_{3',2}\ldots\delta_{n',i_n}}_{1;\,l\ \text{absents}}\}$$

et n'ont pas d'influence sur $[\tilde{M}_0^{(n)}]$ pour $n \geqslant 4$ comme il est facile de voir. La formule (5.2.19) se trouve ainsi démontrée.

Nous allons maintenant passer à la recherche de $[\tilde{M}_0^{(2)}]$, $[\tilde{M}_0^{(3)}]$. La grandeur $[\tilde{M}_0^{(2)}]$ coïncide, comme on voit aisément, avec $\overline{M}_0^{(2)}$, donc

$$[\tilde{M}_0^{(2)}(p;\,f)] = L_p^{(2)}(f) \tag{5.2.22}$$

(voir la formule (5.2.15)). En vertu de (5.2.18) on a pour la grandeur $\tilde{M}_0^{(3)}(p;\,f)$ dans le cas des bosons

$$\tilde{M}_0^{(3)}(p;\,f) = -\frac{\eta^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{123}\sum_{2'3'} |\,R^{(+)}_{0,\,23}(E)\,|^2 \times$$
$$\times |\,R^{(+)}_{0,\,2'3'}(E)\,|^2 (\delta_{p,\,1} + \delta_{p,\,2} + \delta_{p,\,3}) f_1 (f_2f_3 - f_{2'}f_{3'}) \times$$
$$\times (1 + 2\delta_{1,\,2} + 2\delta_{1,\,2'}) \,|\, T^{(+)}_{23;\,2'3'}(E)\,|^2$$

et par conséquent

$$[\tilde{M}_0^{(3)}(p;\,f)] = \pi \sum_{121'2'} |\,T^{(+)}_{12;\,1'2'}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'})\,\delta_{p,\,2} \times$$
$$\times \{f_{1'}f_{2'}(f_1 + f_2) - f_1f_2(f_{1'} + f_{2'})\}. \tag{5.2.23}$$

En substituant les expressions (5.2.22), (5.2.23) dans (5.2.20), on trouve l'intégrale des collisions (5.2.16). Soulignons encore une fois que l'expression (5.2.16) pour l'intégrale des collisions est vraie pour $r_0 \ll \lambda$.

Remarquons qu'on a obtenu les résultats de ce paragraphe en supposant qu'il n'y a pas d'états liés des particules. Si la formation d'états liés est possible, à l'étape cinétique de l'évolution l'état sera caractérisé non seulement par une fonction de distribution à une particule, mais par la fonction de corrélation à deux particules dans le sous-espace des états liés de deux particules [66, 92].

§ 5.3. Equations cinétiques pour les particules et le rayonnement en interaction avec le milieu extérieur

5.3.1. Equation cinétique pour des particules en interaction avec le milieu. Au § 1.4 nous avons étudié l'équation cinétique pour des particules en interaction faible avec le milieu. On supposait alors que la densité des particules est suffisamment faible, de sorte qu'il était possible d'utiliser la statistique classique et de négliger l'interaction entre les particules du milieu. Nous allons montrer maintenant, comment on peut trouver les équations cinétiques pour les particules interagissant avec le milieu dans le cas où la densité des particules n'est pas faible, de sorte que doivent apparaître les effets quantiques liés à la statistique des particules. Pour ce qui est du milieu, nous allons supposer que l'interaction entre ses particules est forte, par conséquent, on peut supposer que le milieu se trouve à l'état d'équilibre avec des paramètres macroscopiques, à savoir la température et la vitesse hydrodynamique, variant lentement [88].

Nous allons écrire le hamiltonien de tout le système — le milieu et les particules en interaction avec lui — comme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V,$$

où $\mathcal{H}_0$ est le hamiltonien des sous-systèmes sans interaction

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_p,$$

$\mathcal{H}_m$ étant le hamiltonien du milieu, $\mathcal{H}_p$ le hamiltonien des particules libres sans interaction

$$\mathcal{H}_p = \sum_p \varepsilon_p a_p^+ a_p$$

(ε_p étant l'énergie d'une particule ou d'une quasi-particule d'impulsion $\boldsymbol{p}$), et V est le hamiltonien de l'interaction des particules avec le milieu. Nous allons supposer qu'il est de la forme

$$V = \sum_{12} \tilde{\mathcal{J}}\,(1,\ 2)\, a_1^+ a_2, \tag{5.3.1}$$

où $\tilde{\mathcal{J}}$ (1, 2) est un certain opérateur dépendant des variables dynamiques du milieu. L'interaction entre les particules ne faisant pas partie du milieu (dans la suite nous les appellerons simplement particules) sera négligée. Pour plus de simplicité nous allons nous borner à l'étude du cas spatialement homogène *).

L'interaction entre les particules du milieu étant importante, et celle entre les particules et le milieu faible, après un certain temps τ_0 l'état du système peut être caractérisé par les valeurs moyennes des opérateurs $\mathcal{H}_m$, $\boldsymbol{P}$, N, $f_p = a_p^+ a_p$, où $\boldsymbol{P}$ et N sont les opérateurs

*) Pour la généralisation au cas spatialement non homogène voir [99].

de l'impulsion et du nombre des particules du milieu (τ_0 étant le temps le plus long parmi τ_r et $r_0/\bar{v}$, où τ_r est le temps de relaxation du milieu, r_0 le rayon d'interaction des particules avec les atomes du milieu et $\bar{v}$ la vitesse caractéristique moyenne des particules). Dans le cas envisagé ces opérateurs seront les opérateurs $\hat{\gamma}_\alpha$ figurant dans les équations générales (4.2.11). Par conséquent, l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\gamma)$ sera

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \rho_m^{(0)} \rho^{(0)}(f),$$

où $\rho_m^{(0)}$ est la distribution de Gibbs pour le milieu :

$$\rho_m^{(0)} = \exp\{\Omega_m - \beta(\mathcal{H}_m - \boldsymbol{u}\boldsymbol{P} - \mu N)\} \equiv w,$$

et $\rho^{(0)}(f)$ l'opérateur statistique d'un gaz parfait de particules hors d'équilibre

$$\rho^{(0)}(f) = \exp\left\{-\sum_1 \ln(1+f_1) - \sum_1 a_1^+ a_1 \ln \frac{1+f_1}{f_1}\right\}$$

(pour fixer les idées les particules sont supposées être des bosons). La température inverse β, la vitesse du milieu $\boldsymbol{u}$, le potentiel chimique μ et le potentiel thermodynamique du milieu Ω_m sont déterminés à partir des conditions suivantes

$$\mathrm{Sp}\,\rho_m^{(0)}\mathcal{H}_m = \overline{\mathcal{H}}_m, \quad \mathrm{Sp}\,\rho_m^{(0)}\boldsymbol{P} = \overline{\boldsymbol{P}}, \quad \mathrm{Sp}\,\rho_m^{(0)} N = \overline{N}, \quad \mathrm{Sp}\,\rho_m^{(0)} = 1.$$

Les opérateurs $\overline{\mathcal{H}}_m$, $\boldsymbol{P}$, N, f_p commutant avec le hamiltonien $\mathcal{H}_0$, les grandeurs $a_{\alpha\beta}$ figurant dans (4.2.11) sont nulles. En vertu de (4.2.15) l'équation cinétique pour la fonction de distribution des particules f_p s'écrit en seconde approximation de la théorie des perturbations

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = L_p^{(2)}(f) \equiv -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V(\tau), [V, a_p^+ a_p]],$$

où $V(\tau) = \exp(i\mathcal{H}_0\tau)\, V \exp(-i\mathcal{H}_0\tau)$. En utilisant l'identité de Jacobi

$$[V(\tau), [V, a_p^+ a_p]] = -[V, [a_p^+ a_p, V(\tau)]] - [a_p^+ a_p [V(\tau), V]],$$

on peut écrire $L_p^{(2)}(f)$ sous la forme

$$L_p^{(2)}(f) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V(\tau), [V, a_p^+ a_p]]. \qquad (5.3.2)$$

En remarquant que

$$e^{i\mathcal{H}_p\tau} a_1 e^{-i\mathcal{H}_p\tau} = a_1 e^{-i\varepsilon_1\tau},$$

on a

$$V(\tau) = \sum_{12} \hat{\mathcal{J}}_\tau(1, 2)\, a_1^+ a_2 e^{i\tau(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}, \quad \hat{\mathcal{J}}_\tau(1, 2) = e^{i\mathcal{H}_m\tau} \hat{\mathcal{J}}(1, 2)\, e^{-i\mathcal{H}_m\tau}.$$

Puis tenant compte de ce que

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(f)\,a_1^+a_2a_{1'}^+a_{2'}=\delta_{1,2}\delta_{1'2'}f_1f_{1'}+\delta_{1,2'}\delta_{2,1'}f_1(1+f_2),$$

on peut écrire l'intégrale des collisions $L_p^{(2)}$ comme

$$L_p^{(2)}=\sum_{12}(\delta_{1,p}-\delta_{2,p})\,f_2(1+f_1)\int_{-\infty}^{\infty}d\tau e^{i\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\langle\hat{\mathcal{J}}_\tau(2,1)\,\hat{\mathcal{J}}(1,2)\rangle,$$

où la parenthèse $\langle\ldots\rangle$ signifie le moyennage avec l'opérateur statistique du milieu $\rho_m^{(0)}$, soit :

$$\langle\hat{\mathcal{J}}_\tau(2,1)\,\hat{\mathcal{J}}(1,2)\rangle=\mathrm{Sp}\,\rho_m^{(0)}\hat{\mathcal{J}}_\tau(2,1)\,\hat{\mathcal{J}}(1,2)\equiv I_{1,2}(\tau). \qquad (5.3.3)$$

Introduisons maintenant la fonction spectrale $I_{1,2}(\omega)$ de la fonction de corrélation $I_{1,2}(\tau)$:

$$I_{1,2}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau I_{1,2}(\tau)\,e^{i\omega\tau}. \qquad (5.3.4)$$

L'équation cinétique s'écrira alors sous la forme

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}=2\pi\sum_{12}\delta_{2,p}\{f_1(1+f_2)\,I_{2,1}(\omega_{21})-f_2(1+f_1)\,I_{1,2}(\omega_{12})\},$$

où $\omega_{12}=\varepsilon_2-\varepsilon_1$. Remarquons que V étant hermitique, on a la relation $\hat{\mathcal{J}}(1,2)=\hat{\mathcal{J}}^+(2,1)$.

Comme, en vertu de (5.3.3), on a

$$\langle\hat{\mathcal{J}}_\tau(2,1)\,\hat{\mathcal{J}}(1,2)\rangle=\sum_{nm}|\hat{\mathcal{J}}_{n,m}(1,2)|^2e^{i\tau(\mathcal{E}_m-\mathcal{E}_n)}w_m, \qquad (5.3.5)$$

où la sommation s'étend au système entier de fonctions propres d'opérateurs commutant $\mathcal{H}_m$, $\boldsymbol{P}$, N de valeurs propres $\mathcal{E}_n$, $\boldsymbol{P}_n$, N_n, il est facile de voir à partir de (5.3.4), (5.3.5) que $I_{1,2}(\omega)>0$.

Prenons maintenant en considération que le hamiltonien de l'interaction V commute avec l'opérateur de l'impulsion totale du système, c'est-à-dire que l'on a

$$[V,\boldsymbol{P}+\sum_p \boldsymbol{p}a_p^+a_p]=0. \qquad (5.3.6)$$

Il s'ensuit que $(\boldsymbol{P}_n+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{P}_m-\boldsymbol{p}_2)\hat{\mathcal{J}}_{m,n}(1,2)=0$, c'est-à-dire que les éléments matriciels $\hat{\mathcal{J}}_{m,n}(1,2)$ de l'opérateur $\hat{\mathcal{J}}(1,2)$ caractérisant l'interaction des particules avec le milieu sont différentes de zéro seulement si $\boldsymbol{P}_n+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{P}_m-\boldsymbol{p}_2=0$. D'où et à partir de (5.3.5) il est facile d'obtenir la relation suivante

$$I_{2,1}(-\omega)=I_{1,2}(\omega)\exp\{-\beta(\omega-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1))\}$$

(nous avons obtenu des relations analogues au paragraphe 4.1.2)

Compte tenu de cette relation, l'équation cinétique pour la fonction de distribution des particules f_p peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = L_p^{(2)} \equiv 2\pi \sum_{12} \delta_{2,\,p} I_{1,\,2}(\omega_{12}) \{ f_1 (1+f_2) e^{\beta(\omega_{12} - u p_{12})} - f_2 (1+f_1) \},$$

$$p_{12} = p_2 - p_1. \qquad (5.3.7)$$

Cette équation est vraie pour les bosons en interaction avec le milieu. Dans le cas des fermions l'équation cinétique s'écrit d'une manière analogue, avec cette seule différence que $1 + f$ est remplacé par $1 - f$.

Il est facile de voir que l'intégrale des collisions $L_p^{(2)}$ s'annule pour la distribution de Bose

$$f_p = \{ e^{\beta(\varepsilon_p - \mu - u p)} - 1 \}^{-1},$$

où β^{-1} et u sont la température et la vitesse du milieu. Dans le cas des fermions l'intégrale des collisions s'annule pour la distribution de Fermi :

$$f_p = \{ e^{\beta(\varepsilon_p - \mu - u p)} + 1 \}^{-1}.$$

Nous allons maintenant trouver les équations qui déterminent la variation des paramètres du milieu β, u, μ dans le temps. En utilisant la relation (5.3.6), ainsi que l'équation (4.2.15) pour le paramètre $\gamma_\alpha = \overline{P}$, on a

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} = - \sum_p p L_p^{(2)}. \qquad (5.3.8)$$

Cette relation donne la loi de la conservation de l'impulsion du système. En remarquant alors que

$$\mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), [V, \mathscr{H}_m + \mathscr{H}_p]] =$$
$$= \mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(\gamma) [V, [V(-\tau), \mathscr{H}_0]] = -i\, \mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(\gamma) \left[V, \frac{\partial V(-\tau)}{\partial \tau} \right],$$

on obtient en vertu de (4.2.15) pour $\hat{\gamma}_\alpha = \mathscr{H}_m$

$$\frac{\partial \overline{\mathscr{H}}_m}{\partial t} = - \sum_p \varepsilon_p L_p^{(2)}. \qquad (5.3.9)$$

Cette relation donne la loi de la conservation de l'énergie du système. Enfin il est évident que

$$\partial \overline{N} / \partial t = 0. \qquad (5.3.10)$$

Vu l'invariance des équations de la mécanique quantique par rapport à la transformation de Galilée (voir le paragraphe 2.3.1,

dans ce cas $\varepsilon_p = p^2/2m$) il existe un opérateur unitaire U_u ayant les propriétés

$$U_u N U_u^+ = N, \quad U_u P U_u^+ = P + muN,$$
$$U_u \mathcal{H}_m U_u^+ = \mathcal{H}_m + uP + \frac{1}{2} mu^2 N,$$

par conséquent,

$$U_u \rho_m^{(0)} U_u^+ = \exp\{\Omega_m - \beta(\mathcal{H}_m - \mu_0 N)\}, \quad \mu_0 = \mu + \frac{1}{2} mu^2.$$

Il en découle

$$\overline{\mathcal{H}}_m = \mathrm{Sp}\, \rho_m^{(0)} \mathcal{H}_m = \frac{1}{2} Mu^2 + \overline{\mathcal{H}}_m |_{u=0}, \quad \overline{P} = Mu$$

(M étant la masse du milieu). En utilisant ces formules, on peut écrire les équations (5.3.8), (5.3.9) sous la forme

$$M \frac{\partial u}{\partial t} = 2\pi \sum_{12}' p_{12} I_{1,2}(\omega_{12}) f_2 (1 + f_1),$$
$$\beta^{-2} C \frac{\partial \beta}{\partial t} = -2\pi \sum_{12} (\omega_{12} - up_{12}) I_{1,2}(\omega_{12}) f_2 (1 + f_1), \qquad (5.3.11)$$

où $C = -\beta^{-2} (\partial \overline{\mathcal{H}}_m / \partial \beta)_{u=0}$ est la capacité calorifique du milieu.

En conclusion, nous allons démontrer le théorème H pour le système envisagé. L'entropie du milieu est donnée par la formule

$$s_m = -\mathrm{Sp}\, \rho_m^{(0)} \ln \rho_m^{(0)} = -\Omega_m + \beta \overline{\mathcal{H}}_m - \beta u \overline{P} - \beta \mu \overline{N},$$

et l'entropie d'un gaz de particules par la formule

$$s_p = -\mathrm{Sp}\, \rho^{(0)}(f) \ln \rho^{(0)}(f) = -\sum_1 \{f_1 \ln f_1 - (1 + f_1) \ln (1 + f_1)\}.$$

L'entropie du système en entier est $s = s_m + s_p$.

En remarquant que

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial t} = \overline{\mathcal{H}}_m \frac{\partial \beta}{\partial t} - \overline{P} \frac{\partial \beta u}{\partial t} - \overline{N} \frac{\partial \beta \mu}{\partial t},$$

on obtient en vertu de (5.3.8) à (5.3.10)

$$\frac{\partial s_m}{\partial t} = \beta \sum_p (\varepsilon_p - up) \frac{\partial f_p}{\partial t},$$

$$\frac{\partial s_p}{\partial t} = \sum_p \frac{\partial f_p}{\partial t} \ln \frac{f_p}{1 + f_p}$$

En utilisant l'équation cinétique (5.3.7), on obtient finalement

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\sum_{12} I_{1,2}(\omega_{12}) \ln \frac{f_1(1+f_2)\exp\beta(up_{12}-\omega_{12})}{f_2(1+f_1)} \times$$

$$\times\{f_2(1+f_1)-f_1(1+f_2)\,e^{-\beta(\omega_{12}-up_{12})}\}.$$

La fonction spectrale $I_{1,2}$ (ω) étant positive, ceci donne le théorème H, à savoir $\partial s/\partial t \geqslant 0$.

L'équation cinétique (5.3.7) peut être utilisée, par exemple, pour l'étude de la cinétique des neutrons dans les milieux condensés.

5.3.2. Equation cinétique pour les photons dans un milieu. Dans le paragraphe précédent nous avons obtenu l'équation cinétique pour les particules interagissant avec un milieu en équilibre. On supposait que le hamiltonien de l'interaction des particules avec le milieu commutait avec l'opérateur du nombre de particules. Entre temps, des processus physiques sont possibles dans lesquels des particules ou quasi-particules apparaissent ou disparaissent, c'est-à-dire que leur nombre n'est pas constant.

Dans ce paragraphe nous allons obtenir l'équation cinétique pour les photons se propageant dans un milieu, équation qui tient compte de l'émission ou de l'absorption des photons par les atomes du milieu [6].

Considérons le hamiltonien non relativiste du système formé par le milieu et le gaz de photons $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V$, où $\mathscr{H}_0$ est le hamiltonien des sous-systèmes sans interaction : du milieu et du gaz de photons $\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_m + \mathscr{H}_f$, $\mathscr{H}_m$ étant le hamiltonien du milieu, $\mathscr{H}_f$ le hamiltonien des photons sans interaction

$$\mathscr{H}_f=\sum_{k\lambda=1}^{2} \omega_k c_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda},$$

($c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^{+}$ étant les opérateurs d'absorption et d'émission d'un photon de fréquence ω_k, de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et de polarisation $\lambda = 1, 2$) et enfin V est le hamiltonien de l'interaction de rayonnement avec le milieu. Dans le cas non relativiste, ce hamiltonien est donné par la formule

$$\begin{gathered} V=V_1+V_2, \\ V_1=-\frac{1}{c}\int d^3x A(x)\, j^{(e)}(x), \\ V_2=\sum_a \frac{e_a}{2m_a c^2}\int d^3x A^2(x)\, \rho_a^{(e)}(x), \end{gathered} \qquad (5.3.12)$$

où $j^{(e)}(x)$ est l'opérateur de densité du courant (en l'absence du champ de rayonnement), $\rho_a^{(e)}(x)$ l'opérateur de la densité de la

charge des particules du type a, dont la charge est e_a et la masse m_a, et $A(x)$ l'opérateur du potentiel vectoriel, à savoir:

$$A(x)=\left(\frac{2\pi}{\mathscr{V}}\right)^{1/2} c \sum_{k\lambda=1}^{2} \omega_k^{-1/2}\{c_{k\lambda}e^{ikx}+c_{k\lambda}^{+}e^{-ikx}\}\, e_k^{(\lambda)} \qquad (5.3.13)$$

($e_k^{(\lambda)}$ étant le vecteur de polarisation du photon dans l'état k, λ; $\mathscr{V}$ le volume du système; la définition formelle des opérateurs $j^{(e)}(x)$ et $\rho_a^{(e)}(x)$ est donnée dans (2.2.2).

Nous allons nous limiter à l'étude du cas spatialement homogène. Nous allons considérer de plus que le milieu se trouve à l'état d'équilibre statistique et est transparent pour les photons. Pour les opérateurs $\hat{\gamma}$, figurant dans les équations générales (4.2.15), il y a lieu de prendre les opérateurs de la matrice de densité à une particule $\hat{n}_{\lambda\lambda'}(k)=c_{k\lambda'}^{+}c_{k\lambda}$. Pour ce qui est du milieu, nous n'allons pas tenir compte de l'action des photons sur le milieu (liée, par exemple, à l'échauffement du milieu) et n'allons donc pas introduire, au contraire du paragraphe précédent, les opérateurs $\hat{\gamma}$ liés au milieu. En conséquence, l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\gamma)$ sera alors

$$\rho^{(0)}(\gamma)=w\rho_f^{(0)}(n),$$

où w est la distribution de Gibbs du milieu

$$w=\exp\{\Omega_m-\beta(\mathscr{H}_m-\mu N)\}$$

et $\rho_f^{(0)}(n)$ la matrice de densité d'un gaz de photons parfait hors d'équilibre:

$$\rho_f^{(0)}(n)=\exp\Big\{\Omega_f-\sum_{k\lambda\lambda'} Y_{\lambda\lambda'}(k)\, c_{k\lambda}^{+}c_{k\lambda'}\Big\},$$

où Ω_f et $Y_{\lambda\lambda'}(k)$ sont donnés par la matrice de densité à un photon $n_{\lambda\lambda'}(k)$

$$\operatorname{Sp}\rho_f^{(0)}(n)=1,\qquad \operatorname{Sp}\rho_f^{(0)}(n)\, c_{k\lambda}^{+}c_{k\lambda'}=n_{\lambda'\lambda}(k).$$

Les opérateurs $c_{k\lambda}^{+}c_{k\lambda'}$ commutant avec le hamiltonien $\mathscr{H}_0$, les grandeurs $a_{\alpha\beta}$ qui entrent dans (4.2.15) sont nulles. C'est pourquoi l'équation cinétique pour la matrice de densité à une particule en seconde approximation de la théorie des perturbations s'écrit

$$\frac{\partial n_{\lambda\lambda'}}{\partial t}=L_{\lambda\lambda'}^{(1)}(n)+L_{\lambda\lambda'}^{(2)}(n),$$

où $L^{(1)}$ et $L^{(2)}$ sont déterminés par les formules (4.2.15) dans lesquelles par les opérateurs $\hat{\gamma}$ on comprend les opérateurs $c_{k\lambda}^{+}c_{k\lambda'}$.

Il est facile de voir que la grandeur

$$L_{\lambda\lambda'}^{(1)}(n)=i\operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\gamma)\,[V_1+V_2,\ c_{k\lambda'}^{+},\ c_{k\lambda}]$$

s'annule. En effet, $\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V_1,\ c^{+}_{k\lambda'}c_{k\lambda}] = 0$, car sous le signe de la trace on a un nombre impair d'opérateurs $c^{+}_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}$. Pour nous convaincre de ce que le second terme s'annule également, remarquons que du fait de l'homogénéité spatiale du système la grandeur $\mathrm{Sp}\, w\rho^{(e)}_a(x) \equiv \rho^{(e)}_a$ ne dépendra pas de x. C'est pourquoi, on a

$$L^{(1)}_{\lambda\lambda'} = i \sum_a \frac{e_a\rho^{(e)}_a}{2m_ac^2}\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}_f(n)\left[\int d^3xA^2(x),\ c^{+}_{k\lambda'}c_{k\lambda}\right].$$

Il est facile de voir que le commutateur figurant ici ne contient les opérateurs $c_{k\lambda}$ et $c^{+}_{k\lambda}$ qu'en combinaisons c^+c^+, cc, et comme $\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}_f(n)\,c^+c^+ = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}_f(n)\,cc = 0$, on a $L^{(1)}_{\lambda\lambda'} = 0$.

Ainsi, en vertu de (4.2.15), l'équation cinétique pour la matrice de densité à un photon sera de la forme

$$\frac{\partial n_{\lambda\lambda'}}{\partial t} = L^{(2)}_{\lambda\lambda'}(n) = -i\int_{-\infty}^{0} d\tau\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\gamma)\,[V(\tau),\ [V,\ c^{+}_{k\lambda'},\ c_{k\lambda}]], \quad (5.3.14)$$

où $V(\tau) = e^{i\mathcal{H}_0\tau}Ve^{-i\mathcal{H}_0\tau}$. En remarquant que

$$e^{i\mathcal{H}_f\tau}c_{k\lambda}e^{-i\mathcal{H}_f\tau} = c_{k\lambda}e^{-i\omega_k\tau},$$

on a

$$V(\tau) = -\frac{1}{c}\int d^3xA(x,\ \tau)\,j(x,\ \tau) + \sum_a \frac{e_a}{2m_ac^2}\int d^3xA^2(x,\ \tau)\,\rho^{(e)}_a(x,\tau),$$

où $A(x,\ \tau)$ est le potentiel vectoriel dans la représentation de l'interaction

$$A(x,\ \tau) = \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} c\sum_{k\lambda=1}^{2}\omega_k^{-1/2}\,\{c_{k\lambda}e^{i(kx-\omega_k\tau)} + c^{+}_{k\lambda}e^{-i(kx-\omega_k\tau)}\}\,e^{(\lambda)}_k \quad (5.3.15)$$

et $j^{(e)}(x,\ \tau) \equiv j(x,\ \tau)$ et $\rho^{(e)}_a(x,\ \tau)$ sont les opérateurs de densité du courant et de la charge dans la représentation de Heisenberg, à savoir

$$j(x,\ \tau) = e^{i\mathcal{H}_m\tau}j(x)\,e^{-i\mathcal{H}_m\tau},\quad \rho^{(e)}_a(x,\ \tau) = e^{i\mathcal{H}_m\tau}\rho^{(e)}_a(x)\,e^{-i\mathcal{H}_m\tau}.$$

S'intéressant à la première approximation par rapport à la structure fine constante $e^2/\hbar c$, qui ne s'annule pas, on peut dans l'expression de $L^{(2)}_{\lambda\lambda'}$ remplacer V par V_1. On tiendra alors compte d'une manière exacte des processus d'émission et d'absorption des photons, mais nous ne tiendrons pas compte des processus de diffusion des photons par les atomes. Le hamiltonien V_2 dans l'intégrale

des collisions $L^{(2)}_{\lambda\lambda'}$ tient compte des processus de diffusion des photons, cependant les termes d'ordre plus élevé par rapport à V_1 donnent le même apport à l'intégrale des collisions des photons *).

Nous allons donc considérer l'expression suivante pour $L^{(2)}_{\lambda\lambda'}$:

$$L^{(2)}_{\lambda\lambda'}(n) = -i \int_{-\infty}^{0} d\tau \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V_1(\tau), [V_1, c^+_{k\lambda'}, c_{k\lambda}]]. \quad (5.3.16)$$

En vertu de (5.3.15), l'opérateur $V_1(\tau)$ peut s'écrire comme

$$V_1(\tau) = -\sum_{k\lambda=1}^{2} \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)^{1/2} \{c_{k\lambda} j_\lambda(k, \tau) e^{-i\omega_k\tau} + c^+_{k\lambda} j^+_\lambda(k, \tau) e^{i\omega_k\tau}\},$$
$$j_\lambda(k, \tau) = \mathcal{V}^{-1/2} e^{(\lambda)}_k \int d^3x e^{ikx} j(x, \tau). \quad (5.3.17)$$

En utilisant les relations de permutation pour les opérateurs $c^+_{k\lambda}$ et $c_{k\lambda}$, on a

$$[V_1, c^+_{k\lambda'} c_{k\lambda}] = \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)^{1/2} j^+_\lambda(k) c^+_{k\lambda'} - \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)^{1/2} j_{\lambda'}(k) c_{k\lambda}, \quad (5.3.18)$$

où $j_\lambda(k) \equiv j_\lambda(k, 0)$. Compte tenu de (5.3.17), (5.3.18), on trouve

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V_1(\tau), [V_1, c^+_{k\lambda'} c_{k\lambda}]] =$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_k} e^{i\omega_k\tau} \Big\{ \sum_{\lambda''} n_{\lambda\lambda''}(k) \langle [j^+_{\lambda''}(k, \tau), j_{\lambda'}(k)] \rangle - \langle j_{\lambda'}(k) j^+_\lambda(k, \tau) \rangle \Big\} +$$
$$+ \frac{2\pi}{\omega_k} e^{-i\omega_k\tau} \Big\{ \sum_{\lambda''} \langle [j^+_\lambda(k, -\tau), j_{\lambda''}(k)] \rangle n_{\lambda''\lambda'}(k) - \langle j_{\lambda'}(k) j^+_\lambda(k, -\tau) \rangle \Big\}$$

ou, en supposant le milieu isotrope,

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V_1(\tau), [V_1, c^+_{k\lambda'}, c_{k\lambda}]] =$$
$$= \frac{2\pi}{\omega_k} e^{i\omega_k\tau} \Big\{ \frac{1}{2} n_{\lambda\lambda'}(k) \sum_{\lambda''} \langle [j^+_{\lambda''}(k, \tau)), j_{\lambda''}(k)] \rangle -$$
$$- \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'} \sum_{\lambda''} \langle j_{\lambda''}(k) j^+_{\lambda''}(k, \tau) \rangle \Big\} + (\tau \to -\tau), \quad (5.3.19)$$

où l'on a introduit la désignation $\langle \ldots \rangle = \operatorname{Sp} w' \ldots$

Procédant d'une manière analogue au paragraphe précédent, on peut montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle j^+_\lambda(k, \tau) j_\lambda(k) \rangle = e^{\beta\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle j_\lambda(k) j^+_\lambda(k, \tau) \rangle,$$

*) L'ouvrage de Kompanéetz [68] est consacré à l'étude de la cinétique du rayonnement du corps noir lié à la diffusion de Compton.

et, par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle j_\lambda(k)\, j_\lambda^+(k, \tau)\rangle = n^{(0)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau} \langle [j_\lambda^+(k, \tau), j_\lambda(k)]\rangle, \tag{5.3.20}$$

où $n^{(0)}(\omega)$ est la fonction de distribution des photons de Planck

$$n^{(0)}(\omega) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}.$$

C'est pourquoi, en vertu de (5.3.19), (5.3.20), l'équation cinétique pour les photons interagissant avec le milieu peut s'écrire comme

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_k}(n - n^{(0)}(\omega_k)), \tag{5.3.21}$$

où n et $n^{(0)}$ sont les matrices carrées à deux lignes et deux colonnes d'éléments $n_{\lambda\lambda'}$ et $n^{(0)}_{\lambda\lambda'} \equiv n^{(0)}\delta_{\lambda,\lambda'}$ et

$$\tau_k^{-1} = \frac{2\pi}{\omega_k} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_k\tau} \langle [j_\lambda^+(k, \tau), j_\lambda(k)]\rangle. \tag{5.3.22}$$

Tout comme dans le paragraphe précédent, en utilisant la formule (5.3.20), il est facile de montrer que $\tau_k^{-1} > 0$. La grandeur τ_k est le temps de relaxation des photons de vecteur d'onde k.

Dans le paragraphe 6.3.1 nous allons montrer que si le milieu se trouve dans un champ électromagnétique extérieur variable, la composante de Fourier de la densité du courant apparaissant dans le milieu est donnée par la formule

$$\tilde{\mathcal{J}}_i(k, \omega) = \bar{\sigma}_{il}(k, \omega)\, E_l^{(e)}(k, \omega),$$

où $E_l^{(e)}(k, \omega)$ est la composante de Fourier du champ électrique extérieur et

$$\bar{\sigma}_{ij}(k, \omega) = \bar{\sigma}^l(k, \omega)\frac{k_i k_j}{k^2} + \bar{\sigma}^t(k, \omega)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right).$$

Ici

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^l(k, \omega) &= \frac{i}{\omega}\left\{\sum_a \frac{e_a}{m_a}\rho_a^{(e)} + \frac{k_i k_j}{k^2} G_{ij}^{(+)}(k, \omega)\right\}, \\ \bar{\sigma}^t(k, \omega) &= \frac{i}{\omega}\left\{\sum_a \frac{e_a}{m_a}\rho_a^{(e)} + \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) G_{ij}^{(+)}(k, \omega)\right\}, \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

$$G_{is}^{(+)}(k, \omega) = -i \int d^3x \int_0^{\infty} dt e^{-ikx + i\omega t} \langle [j_i(x, t)\, j_s(0)]\rangle. \tag{5.3.24}$$

Ces formules se rapportent au cas isotrope et déterminent la réponse du courant électrique dans un milieu à un champ électrique extérieur (il ne faut pas confondre les grandeurs $\bar{\sigma}_{ij}$ avec le tenseur de conductibilité σ_{ij} du milieu, figurant dans les équations de Maxwell, voir § 6.3).

En comparant les formules (5.3.22), (5.3.23), on obtient à partir de (5.3.24)

$$\tau_k^{-1} = 1/2 \operatorname{Re} \bar{\sigma}^t (\boldsymbol{k}, \omega_k). \qquad (5.3.25)$$

Ainsi le temps de relaxation τ_k est donné par la partie transversale du tenseur $\bar{\sigma}_{ij} (\boldsymbol{k}, \omega)$. Ce tenseur, comme nous allons le voir dans le § 6.3, décrit entièrement les propriétés électromagnétiques du milieu.

Notons que si le corps contient une cavité, la distribution des photons sera hétérogène et au lieu de (5.3.21) on doit considérer l'équation cinétique

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c_k}{k} \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{x}} = -\frac{1}{\tau_k} (n - n^{(0)}) f(\boldsymbol{x}),$$

où $f(\boldsymbol{x}) = 1$ si $\boldsymbol{x}$ se trouve à l'intérieur du milieu, et $f(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x}$ se trouve dans la cavité. L'étude de cette équation montre que le temps de l'établissement de la distribution de Planck dans la cavité est déterminé par le plus grand des temps τ_k et L/c, où L sont les dimensions linéaires de la cavité.

§ 5.4. Equations cinétiques pour les particules dans un champ extérieur et fonctions de Green en approximation cinétique

5.4.1. Equation intégrale pour l'opérateur statistique. Dans les paragraphes précédents, nous avons obtenu des équations cinétiques pour des particules en interaction mutuelle. En principe, ces équations permettent de voir comment s'établit l'équilibre statistique, c'est-à-dire le processus de relaxation vers la distribution de Gibbs. En particulier, tout comme dans le cas classique, elles permettent de décrire l'étape hydrodynamique de l'évolution. Cependant, il reste encore le problème de l'influence des champs extérieurs sur l'évolution du système de particules. Dans ce paragraphe, nous allons résoudre ce problème [93, 94]. A cet effet nous allons de nouveau revenir à l'équation du mouvement pour l'opérateur statistique du système $\rho(t)$:

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho(t)], \qquad (5.4.1)$$

où $\mathcal{H}(t)$ est le hamiltonien du système en présence d'un champ extérieur variable, $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + V(t)$, $V(t) = V + \mathcal{H}_F(t)$. Ici $\mathcal{H}_0$ est le hamiltonien des particules libres, V le hamiltonien de l'interaction des particules entre elles et $\mathcal{H}_F(t)$ le hamiltonien de l'interaction des particules avec le champ extérieur. Le hamiltonien $\mathcal{H}_F(t)$ tout comme dans le paragraphe 4.1.1, s'écrit

$$\mathcal{H}_F(t) = \int d^3x \hat{\xi}(x) F(x, t) + \text{c.h.}, \tag{5.4.2}$$

où $F(x, t)$ est le champ extérieur donné au point x à l'instant t et $\hat{\xi}(x)$ l'opérateur du courant généralisé du système.

Nous allons considérer qu'en l'absence de champ extérieur, après un temps $t \gg \tau_0$ (τ_0 étant le temps de chaotisation), le système peut être décrit par un ensemble plus restreint de paramètres $\zeta_\alpha(x)$ auxquels correspondent les opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$:

$$\hat{\zeta}_\alpha(x) \equiv \{\hat{f}_p(x),\ \hat{w}_p(x),\ \hat{w}_p^+(x),\ \hat{\psi}(x),\ \hat{\psi}^+(x)\}, \tag{5.4.3}$$

où $\hat{f}_p(x)$ est l'opérateur de la fonction de distribution de Wigner, $\hat{\psi}(x)$ l'opérateur d'annihilation d'une particule au point x et

$$\hat{w}_p(x) = \int d^3y e^{ipy} \hat{\psi}\left(x + \frac{y}{2}\right) \hat{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right). \tag{5.4.4}$$

(On suppose que le système est formé de bosons; dans le cas des fermions $\langle\psi(x)\rangle = 0$ et dans le nombre des opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ figurent donc $\hat{f}_p(x)$, $\hat{w}_p(x)$, $\hat{w}_p^+(x)$ seulement.)

Rappelons que lorsque nous avons trouvé les équations cinétiques, dans le cas où le hamiltonien V commute avec l'opérateur du nombre de particules, pour les opérateurs $\zeta_\alpha(x)$ nous avons pris seulement l'opérateur de la fonction de distribution de Wigner. Ceci étant lié au fait que dans ce cas, si les valeurs moyennes de $\psi(x)$ et $w_p(x)$ étaient nulles à l'instant initial, elles sont également nulles à tous les instants postérieurs. Par contre, si V ou $\mathcal{H}_F$ ne conservent pas le nombre de particules, en plus des opérateurs $\hat{f}_p(x)$ il y a lieu de tenir compte également des opérateurs $\hat{\psi}(x)$, $\hat{w}_p(x)$.

Notons que les intégrales spatiales de $\hat{f}_p(x)$, $\hat{\psi}(x)$ sont des intégrales additives du mouvement par rapport au hamiltonien $\mathcal{H}_0$, quant à l'intégrale spatiale de $w_p(x)$, c'est une intégrale approchée du mouvement dans le domaine des p petits. C'est pourquoi pour une interaction faible entre les particules, les paramètres $\zeta_\alpha(x)$ varieront lentement dans le temps.

Il est facile de voir que les opérateurs $\exp(i\mathcal{H}_0\tau)\hat{\zeta}_\alpha(x)\exp(-i\mathcal{H}_0\tau)$ s'expriment linéairement par les opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$:

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau}\hat{\zeta}_\alpha(x)e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \equiv \hat{\zeta}_\alpha^\tau(x) = \int d^3x' \mathcal{K}_{\alpha\alpha'}(x - x', \tau)\, \hat{\zeta}_{\alpha'}(x'),$$

où $\mathscr{K}_{\alpha\alpha'}(x-x', \tau)$ sont des fonctions c-numériques. Par conséquent,

$$i[\mathscr{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(x)] = \int d^3x' \dot{\mathscr{K}}_{\alpha\alpha'}(x-x')\zeta_{\alpha'}(x'),$$
$$\dot{\mathscr{K}}_{\alpha\alpha'}(x-x') = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{K}_{\alpha\alpha'}(x-x', \tau)|_{\tau=0}. \quad (5.4.5)$$

Cette relation est en accord avec les relations générales (2.4.27). La fonction $\mathscr{K}_{\alpha\alpha'}(x-x', \tau)$ considérée comme une matrice sur les variables α et x, est liée à la matrice $\dot{\mathscr{K}}_{\alpha\alpha'}(x-x')$ par la relation

$$\mathscr{K}(\tau) = \exp \tau\dot{\mathscr{K}}. \quad (5.4.6)$$

Nous avons introduit les paramètres $\zeta_\alpha(x)$ caractérisant l'état hors d'équilibre du système, en supposant qu'il n'y a pas de champ extérieur. Cependant, même en présence du champ extérieur si seulement sa fréquence est faible par rapport à τ_0^{-1}, l'état du système, peut comme auparavant être décrit par les paramètres $\zeta_\alpha(x)$. Mais dans ce cas l'opérateur statistique $\rho(t)$ pour $t \gg \tau_0$ dépendra du temps non seulement par $\zeta_\alpha(x, t)$ mais également par le champ extérieur $F(x, t)$ et par toutes ses dérivées temporelles $\dot{F}(x, t)$, $\ddot{F}(x, t)$, . . .

$$\rho(t) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \sigma(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t), \ldots) \equiv \sigma(\zeta(t); t), \quad (5.4.7)$$

avec

$$\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta(t); t)\hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x, t). \quad (5.4.8)$$

Remarquant que

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \frac{\partial\sigma(\zeta; t)}{\partial t} + \int d^3x \frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta\zeta_\alpha(x, t)}\dot{\zeta}_\alpha(x, t),$$

on obtient en vertu de (5.4.1)

$$i\frac{\partial\sigma(\zeta; t)}{\partial t} + i\int d^3x \frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta\zeta_\alpha(x, t)}\dot{\zeta}_\alpha(x, t) =$$
$$= [\mathscr{H}_0, \sigma(\zeta; t)] + [V(t), \sigma(\zeta; t)]. \quad (5.4.9)$$

A partir de cette formule et de la formule (5.4.8), on a

$$\dot{\zeta}_\alpha(x, t) = \mathscr{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta(t)) + L_\alpha(x; \zeta(t); t) \equiv \mathscr{L}_\alpha, \quad (5.4.10)$$

$$\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta(t)) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta; t)[\mathscr{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(x)] = \int d^3x' \dot{\mathscr{K}}_{\alpha\alpha'}(x-x')\zeta_{\alpha'}(x', t),$$

$$L_\alpha(x; \zeta; t) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta; t)[V(t), \hat{\zeta}_\alpha(x)].$$

Il y a lieu d'obtenir l'équation intégrale pour l'opérateur statistique $\sigma(\zeta; t)$ permettant de le définir d'une manière univoque. A cet effet, remarquons avant tout que la grandeur

$$\zeta_\alpha^\tau(x) \equiv \int d^3x' \mathcal{K}_{\alpha\alpha'}(x-x', \tau)\zeta_{\alpha'}(x') \tag{5.4.11}$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \zeta_\alpha^\tau(x)}{\partial \tau} = \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta^\tau).$$

C'est pourquoi, l'équation (5.4.9) peut s'écrire comme

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau}\sigma(\zeta^\tau; t)e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma(\zeta; t) - i\int_0^\tau d\tau' e^{i\mathcal{H}_0\tau'}\left\{-i\frac{\partial\sigma(\zeta; t)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + [V(t), \sigma(\zeta; t)] - i\int d^3x \frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta; t)\right\}_{\zeta\to\zeta^{\tau'}} e^{-i\mathcal{H}_0\tau'}. \tag{5.4.12}$$

Puis, en utilisant la relation ergodique (5.1.6), on a

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \rho^{(0)}(\zeta^t) = e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho^{(0)}(\zeta)e^{i\mathcal{H}_0 t}, \tag{5.4.13}$$

où $\zeta^t = \mathcal{K}(t)\,\mathrm{Sp}\,\rho\hat{\zeta}$,

$$\rho^{(0)}(\zeta) = \exp\left\{\Omega(\zeta) - \int d^3x Y_\alpha(x; \zeta)\hat{\zeta}_\alpha(x)\right\}$$

et $\Omega(\zeta)$ et $Y_\alpha(x; \zeta)$ sont donnés par les équations

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\zeta) = 1, \quad \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\zeta)\hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x).$$

A partir de cette relation ergodique et de (5.4.8), on obtient la condition aux limites pour l'opérateur statistique $\sigma(\zeta; t)$, à savoir

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau}\sigma(\zeta^\tau; t)e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \underset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} \rho^{(0)}(\zeta). \tag{5.4.14}$$

En passant dans l'équation (5.4.12) à la limite $\tau \to -\infty$ et en utilisant cette condition aux limites, on obtient finalement l'équation intégrale suivante pour l'opérateur statistique $\sigma(\zeta; t)$:

$$\sigma(\zeta; t) = \rho^{(0)}(\zeta) - i\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}\left\{[V(t), \sigma(\zeta; t)] - i\frac{\partial\sigma(\zeta; t)}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - i\int d^3x \frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta; t)\right\}_{\zeta\to\mathcal{K}(\tau)\zeta} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{5.4.15}$$

La fréquence du champ extérieur étant basse, il y a lieu de chercher la solution de cette équation sous la forme suivante

$$\sigma(\zeta; t) = \sigma_0(\zeta(t); F(t)) + \sigma_1(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t)) +$$

$$+ \sigma_2(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t), \ddot{F}(t)) + \ldots, \tag{5.4.16}$$

où σ_1 est une fonctionnelle linéaire par rapport à $\dot{F}$, σ_2 une fonction linéaire par rapport à $\ddot{F}$ et quadratique par rapport à $\dot{F}$, etc. En substituant ce développement dans (5.4.15), il est facile d'obtenir les équations intégrales pour σ_0, σ_1

$$\sigma_0(\zeta; F) = \rho^{(0)}(\zeta) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\tau\mathscr{H}_0} \Big\{ [V(t), \sigma_0(\zeta; F)] - \\ - i \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(\zeta, F)}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha^{(0)}(x; \zeta; F) \Big\}_{\zeta \to \mathscr{H}(\tau)\zeta} e^{-i\tau\mathscr{H}_0}, \quad (5.4.17)$$

$$\sigma_1(\zeta; F, \dot{F}) = -i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\tau\mathscr{H}_0} \Big\{ [V(t), \sigma_1(\zeta; F, \dot{F})] - \\ - i \int d^3x \left(\dot{F}(x, t) \frac{\delta\sigma_0(\zeta; F)}{\delta F(x, t)} + \text{c.h.} \right) - \\ - i \int d^3x \Big(L_\alpha^{(0)}(x; \zeta; F) \frac{\delta\sigma_1(\zeta; F, \dot{F})}{\delta\zeta_\alpha(x)} + \\ + L_\alpha^{(1)}(x; \zeta; F, \dot{F}) \frac{\delta\sigma_0(\zeta; F)}{\delta\zeta_\alpha(x)} \Big) \Big\}_{\zeta \to \mathscr{H}(\tau)\zeta} e^{-i\tau\mathscr{H}_0},$$

où

$$L_\alpha^{(0)}(x; \zeta; F) = i \operatorname{Sp} \sigma_0(\zeta; F) [V(t), \hat{\zeta}_\alpha(x)], \\ L_\alpha^{(1)}(x; \zeta; F, \dot{F}) = i \operatorname{Sp} \sigma_1(\zeta; F, \dot{F}) [V(t) \hat{\zeta}_\alpha(x)]. \quad (5.4.18)$$

Notons que l'équation intégrale pour σ_0 coïncide avec l'équation intégrale (4.2.11) pour l'opérateur statistique grossier si dans ce dernier on entend par V la somme des hamiltoniens décrivant l'interaction mutuelle des particules et leur interaction avec le champ extérieur. Ce résultat est assez évident, car pour une variation lente du champ, l'opérateur statistique en approximation zéro (par rapport à la fréquence du champ extérieur) a le temps de s'accorder à la valeur instantanée de l'opérateur statistique grossier, correspondant à la valeur instantanée du hamiltonien de l'interaction des particules avec le champ.

Après avoir trouvé à partir de ces équations les opérateurs σ_0 et σ_1 en une approximation quelconque par rapport à l'interaction entre les particules ou par rapport à leur densité, on peut à l'aide des formules (5.4.18) trouver les grandeurs $L_\alpha^{(0)}$, $L_\alpha^{(1)}$ en approximation correspondante et par là même obtenir également les équations du mouvement pour les grandeurs $\zeta_\alpha(x, t)$ en présence d'un champ extérieur lentement variant dans le temps

$$\dot{\zeta}_\alpha(x, t) = \mathscr{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta(t)) + L_\alpha^{(0)}(x; \zeta; F) + L_\alpha^{(1)}(x; \zeta; F, \dot{F}) + \ldots \quad (5.4.19)$$

Si les opérateurs V et $\mathcal{H}_F(t)$ commutent avec l'opérateur du nombre de particules, les grandeurs ψ, w_p pour les états normaux du système doivent être supposées nulles, car à l'état d'équilibre (pour $t = -\infty$) ils étaient nuls. Dans ce cas, les équations (5.4.19) dégénèrent en l'équation cinétique pour la fonction de distribution de Wigner en présence d'un champ extérieur. Cette équation sera vraie tant pour les bosons que pour les fermions.

Jusqu'à présent nous avons supposé qu'à l'aide de l'opérateur statistique $\sigma(\zeta(t);\ t)$ on peut décrire l'état du système pour $t \gg \tau_0$. Ceci était lié à ce que l'on supposait que le non-équilibre du système était dû non seulement à la présence d'un champ extérieur, mais également à ce que l'opérateur statistique initial était différent de l'opérateur statistique d'équilibre w. C'est pourquoi un intervalle de temps $t \gg \tau_0$ était nécessaire pour « oublier » l'état initial. Si, cependant, pour $t \to -\infty$, il n'y a pas de champ extérieur et que le système se trouve à l'état d'équilibre statistique, l'opérateur statistique $\sigma(\zeta;\ t)$ donne une description correcte de l'état hors d'équilibre pour tous les temps t. En effet, l'opérateur statistique $\sigma(\zeta;\ t)$, comme on peut le voir, satisfait à l'équation (5.4.1). De plus, dans un passé assez éloigné, lorsqu'il n'y avait pas de champ extérieur, les paramètres ζ étaient égaux à $\zeta(-\infty) = \operatorname{Sp} w\zeta$ et, comme en l'absence de champ extérieur l'opérateur $\sigma(\zeta;\ t)$ coïncide avec l'opérateur statistique grossier $\sigma(\zeta)$, $\sigma(\zeta;\ t) = \sigma(\zeta)$ pour lequel $\sigma(\operatorname{Sp} w\zeta) = w$, on a $\sigma(\zeta;\ t)\,|_{t\to-\infty} = w$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que si la fréquence du champ extérieur est grande ($\omega\tau_0 \gg 1$), le développement (5.4.16) suivant la fréquence du champ extérieur ne sera pas vrai, car dans ce cas on voit apparaître le caractère non markovien des processus cinétiques. On peut montrer que l'opérateur statistique $\rho(t)$ satisfaisant à l'équation du mouvement (5.4.1) et à la condition initiale $\rho(-\infty) = w$ satisfera alors à l'équation intégrale [93]

$$\rho(t) = \rho^{(0)}(\zeta(t)) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{i\mathcal{H}_0\tau}\Big\{[V(t+\tau),\ \rho(t+\tau)] - \\ - i\int d^3x\, \frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta(t+\tau))}{\delta\zeta_\alpha(x,\ t+\tau)} L_\alpha(x,\ t+\tau)\Big\}\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

$$L_\alpha(x,\ t) = i\operatorname{Sp}\rho(t)\,[V(t),\ \hat{\zeta}_\alpha(x)]. \qquad (5.4.15')$$

Les paramètres $\zeta_\alpha(x,\ t)$ satisfont alors à l'équation du mouvement non locale dans le temps *)

$$\dot{\zeta}_\alpha = L_\alpha(x,\ t). \qquad (5.4.10')$$

*) Les équations cinétiques correspondantes sont considérées dans les ouvrages [106], [107], [93].

Notons que dans le cas des fréquences élevées du champ extérieur, lorsque apparaît d'une manière explicite le caractère non markovien des processus cinétiques, il est judicieux du point de vue physique de poser le problème de telle sorte que la condition initiale imposée à l'opérateur statistique $\rho(t)$ soit universelle. Cette condition peut être celle de l'équilibre statistique, pour $t = -\infty$.

Si le champ extérieur $F(x, t)$ varie lentement et que l'interaction entre les particules est faible, le processus sera en fait markovien. Dans ce cas, on peut développer les grandeurs $\zeta_\alpha(x, t+\tau)$ en série suivant les puissances de τ, $\zeta_\alpha(x, t+\tau) = \sum_n \frac{\tau^n}{n!} \zeta_\alpha^{(n)}(x, t)$. Les grandeurs $\zeta_\alpha^{(n)}(x, t)$ figurant dans ce développement sont obtenues par dérivation de l'équation (5.4.10′) par rapport à t. On peut alors exprimer $\dot{\zeta}(x, t)$, $\ddot{\zeta}(x, t)$, ... en fonction de $\zeta(x, t)$ et $F(x, t)$, $\dot{F}(x, t)$, ... et représenter l'opérateur statistique $\rho(t)$ sous la forme d'une fonctionnelle des fonctions $\zeta(x, t)$, $F(x, t)$, $\dot{F}(x, t)$, ...

$$\rho(t) = \sigma(\zeta(t);\ F(t),\ \dot{F}(t),\ \ldots) \equiv \sigma(\zeta(t);\ t).$$

On peut montrer [101] que l'opérateur statistique $\sigma(\zeta;\ t)$ ainsi défini, satisfait à l'équation (5.4.15′) et, par conséquent, l'équation (5.4.15) est du point de vue formel équivalente à l'équation (5.4.15′)*)

5.4.2. **Equations cinétiques pour les particules chargées dans un champ électromagnétique.** Dans le paragraphe précédent, nous avons donné une méthode générale permettant d'obtenir les équations cinétiques en présence d'un champ extérieur. Considérons maintenant plus en détail le cas où le champ extérieur est électromagnétique et les particules ont une charge électrique.

Pour que le système soit électriquement neutre, il doit contenir des charges de signe opposé. Cependant, pour plus de simplicité, nous n'écrirons que le hamiltonien pour une sorte de particules

$$\mathscr{H}(A, \varphi) = \mathscr{H}_0(A, \varphi) + V,$$

où V est le hamiltonien de l'interaction mutuelle des particules et $\mathscr{H}_0(A, \varphi)$ est donné par la formule (2.2.30).

Nous allons supposer que le hamiltonien V commute avec l'opérateur du nombre de particules. Dans ce cas, comme nous l'avons noté à la fin du paragraphe précédent, pour les grandeurs $\zeta_\alpha(x)$, on peut envisager seulement la fonction de distribution de Wigner ou la matrice à une particule correspondante.

Pour trouver la grandeur $\mathscr{L}^{(0)} + L$ qui détermine la vitesse de la variation de la matrice de densité à une particule, il y a lieu de calculer le commutateur $[\mathscr{H}(A, \varphi),\ a_1^+ a_{1'}]$ contenant l'opérateur de la matrice de densité à une particule $a_1^+ a_{1'}$, dans la représentation de l'impulsion. A cet opérateur correspond dans la représentation des coordonnées l'opérateur $\psi^+(x_2)\,\psi(x_1)$. C'est pourquoi, il faut calculer le commutateur $[\mathscr{H}(A, \varphi),\ \psi^+(x_2)\,\psi(x_1)]$.

*) L'équation (5.4.15′) en l'absence de champ extérieur a été utilisée par Zoubarev et Kalachnikov dans [60] pour la description des processus de relaxation.

A partir de la relation de permutation canonique, on trouve

$$[\mathscr{H}_0(A, \varphi), \psi^+(x_2)\psi(x_1)] = -\left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\frac{e}{c}A(x_2, t)\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{e}{c}A(x_1, t)\right)^2 + e\varphi(x_1, t) - e\varphi(x_2, t)\right\}\psi^+(x_2)\psi(x_1).$$

C'est pourquoi, en vertu de (5.4.4.) l'équation cinétique pour la matrice de densité à une particule dans la représentation des coordonnées $\tilde{f}(x_1, x_2; t) \equiv \operatorname{Sp}\rho(t)\psi^+(x_2)\psi(x_1)$ s'écrit:

$$\frac{\partial\tilde{f}(x_1, x_2; t)}{\partial t} + i\left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{ie}{c}A(x_2, t)\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{ie}{c}A(x_1, t)\right)^2 + e\varphi(x_1, t) - e\varphi(x_2, t)\right\}\tilde{f}(x_1, x_2; t) =$$

$$= i\operatorname{Sp}\rho(\tilde{f}; A)[V, \psi^+(x_2)\psi(x_1)], \qquad (5.4.20)$$

où $\rho(\tilde{f}; A) \equiv \rho(\tilde{f}; A, \dot{A}, \ldots)$ est l'opérateur statistique (5.4.13) satisfaisant à l'équation (5.4.15) et $A = (A, \varphi)$. Par conséquent, compte tenu de la définition de la fonction de distribution de Wigner (2.4.2):

$$\tilde{f}_p(x) = \int d^3y e^{ipy}\tilde{f}\left(x - \frac{y}{2}, x + \frac{y}{2}\right),$$

il est facile d'obtenir l'équation cinétique pour $\tilde{f}_p(x)$:

$$\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial x} + \int d^3p'\hat{K}(p, p')\tilde{f}_{p'}(x) =$$

$$= i\operatorname{Sp}\rho(\tilde{f}; A)[V, \hat{f}_p(x)], \qquad (5.4.21)$$

où $\hat{K}(p, p')$ est un opérateur différentiel, à savoir

$$\hat{K}(p, p') = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3y e^{i(p-p')y}\left\{e\varphi(x_1) - e\varphi(x_2) + \right.$$

$$+ \frac{e}{mc}p(A(x_2) - A(x_1)) - \frac{e^2}{2mc^2}(A^2(x_2) - A^2(x_1)) +$$

$$\left. + \frac{ie}{2mc}(A(x_2) + A(x_1))\frac{\partial}{\partial x}\right\},$$

$x_1 = x - 1/2y$, $x_2 = x + 1/2y$ et $\hat{f}_p(x)$ est l'opérateur correspondant à la fonction de distribution de Wigner $\tilde{f}_p(x)$. Les potentiels électromagnétiques figurent dans cette équation d'une manière non locale. Cependant, si le champ électromagnétique varie peu à des distances de l'ordre de la longueur d'onde broglienne d'une particule, cette équation devient locale et s'écrit

$$\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial x} + \frac{e}{mc}\left\{\left(p_k\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_j} - mc\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial p_j} - A_k(x)\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial x_k} - \frac{e}{2c}\frac{\partial A^2(x)}{\partial x_k}\frac{\partial\tilde{f}_p(x)}{\partial p_k}\right\} =$$

$$= i\operatorname{Sp}\rho(\tilde{f}; A)[V, \hat{f}_p(x)]. \qquad (5.4.22)$$

On voit que dans cette équation les potentiels A et φ ne figurent pas sous la forme de combinaisons correspondant aux intensités du champ. Ceci est lié à ce que la fonction de distribution de Wigner $\tilde{f}_p(x)$ n'est pas invariante par rapport au calibrage : en effet, à la limite classique, elle donne la distribution des particules suivant les coordonnées et les projections de l'impulsion généralisée qui sont invariantes par rapport au calibrage. C'est pourquoi, la fonction de distribution n'a pas, par elle-même de sens physique.

Cependant, on peut introduire une fonction de distribution invariante par rapport au calibrage qui dans la représentation des coordonnées est déterminée par la formule [111]

$$f(x_1, x_2) = e^{z(x_1, x_2)}\tilde{f}(x_1, x_2), \tag{5.4.23}$$

où

$$z(x_1, x_2) = \frac{ie}{c}(x_2 - x_1)\int_0^1 d\xi A(x_2 + \xi(x_1 - x_2)). \tag{5.4.24}$$

La fonction de distribution correspondante de Wigner est donnée par

$$f_p(x) = \int d^3y e^{ipy} f\left(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y\right). \tag{5.4.25}$$

A la limite classique, lorsque les champs varient peu à des distances de l'ordre de la longueur d'onde broglienne d'une particule, les fonctions $f_p(x)$ et $\tilde{f}_p(x)$ sont liées entre elles par la relation

$$f_p(x) = \tilde{f}_{p + e/c A(x)}(x)$$

(si p est l'impulsion cinématique, la grandeur $p + \frac{e}{c}A(x)$ sera une impulsion généralisée).

Nous allons maintenant montrer que la fonction $f(x_1, x_2)$ ou $f_p(x)$ satisfait à une équation cinétique dans laquelle figurent seulement les intensités des champs. A cet effet nous allons préalablement voir comment se transforme l'opérateur statistique $\rho(\tilde{f}; A)$ lors des transformations de calibrage. Comme on peut le voir à partir de 2.3.1, à la transformation de calibrage correspond une transformation unitaire U_χ dans l'espace de Hilbert :

$$U_\chi = \exp\left\{\frac{ie}{c}\int d^3x \chi(x, t)\psi^+(x)\psi(x)\right\},$$

pour laquelle les opérateurs ψ, ψ^+ et le hamiltonien du système $\mathscr{H}(A\ \varphi)$ sont soumis aux transformations

$$\begin{gathered} U_\chi\psi(x)U_\chi^+ = e^{-\frac{ie}{c}\chi(x, t)}\psi(x), \qquad U_\chi\psi^+(x)U_\chi^+ = e^{\frac{ie}{c}\chi(x, t)}\psi^+(x), \\ U_\chi^+\mathscr{H}(A, \varphi)U_\chi = -i\frac{\partial U_\chi^+}{\partial t}U_\chi + \mathscr{H}\left(A - \frac{\partial\chi}{\partial x}, \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right). \end{gathered} \tag{5.4.26}$$

A partir de ces formules et de l'équation intégrale (5.4.15), on peut montrer que l'opérateur statistique $\rho(\tilde{f}; A)$, où $\tilde{f} \equiv \tilde{f}(x_1, x_2)$, satisfait à la relation suivante

$$U_\chi^+\rho(\tilde{f}; A)U_\chi = \rho(e^{z - z'}\tilde{f}; A'),$$

ou, en vertu de (5.4.23), à la relation

$$U_\chi^+\rho(e^{-z}f; A)U_\chi = \rho(e^{-z}f; A'), \quad A' \equiv \left\{A - \frac{\partial\chi}{\partial x}, \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\}, \tag{5.4.27}$$

où z est donné par la formule (5.4.24), et z' s'obtient à partir de z par substitution de A' à A. A partir de (5.4.24), on obtient la loi suivante pour la transformation de calibrage de la grandeur z

$$z - z' = \frac{ie}{c}\{\chi(x_2, t) - \chi(x_1, t)\}. \tag{5.4.28}$$

On peut démontrer maintenant, en utilisant la formule (5.4.27), que dans l'équation cinétique pour une matrice de densité à une particule invariante par rapport au calibrage figurera seulement le champ électromagnétique et non les potentiels $\boldsymbol{A}$, φ. L'équation cinétique pour la matrice de densité à une particule $\tilde{f}(x_1, x_2)$ en vertu de (5.4.4), est de la forme

$$\dot{\tilde{f}}(x_1, x_2) = i\,\mathrm{Sp}\,\rho(\tilde{f}; A)\,[\mathscr{H}(A), \psi^+(x_2)\psi(x_1)].$$

D'où, pour la matrice de densité à une particule invariante par rapport au calibrage $f = e^z\tilde{f}$, on obtient l'équation suivante

$$\begin{gathered}\dot{f}(x_1, x_2) = \dot{z}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) + e^{z(x_1, x_2)} i\,\mathrm{Sp}\,\rho(e^{-z}f; A),\\ [\mathscr{H}(A), \psi^+(x_2)\psi(x_1)] \equiv S(x_1, x_2; f, A).\end{gathered} \tag{5.4.29}$$

En vertu de (5.4.26), (5.4.27) on a

$$S(x_1, x_2; f, A) = \dot{z}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) + ie^{z'(x_1, x_2)}\,\mathrm{Sp}\,\rho(e^{-z'}f, A') \times$$
$$\times \left[\mathscr{H}(A') - \frac{e}{c}\int d^3x'\,\frac{\partial\chi(x', t)}{\partial t}\,\psi^+(x')\psi(x'), \psi^+(x_2)\psi(x_1)\right].$$

Remarquant que

$$[\psi^+(x')\psi(x'), \psi^+(x_2)\psi(x_1)] = \psi^+(x_2)\psi(x_1)\{\delta(x' - x_2) - \delta(x' - x_1)\}$$

et en utilisant de nouveau la loi de transformation de la grandeur z, on trouve

$$S(x_1, x_2; f, A) = \dot{z}'(x_1, x_2) f(x_1, x_2) +$$
$$+ ie^{z'(x_1, x_2)}\,\mathrm{Sp}\,\rho(e^{-z'}f, A')\,[\mathscr{H}(A'), \psi^+(x_2)\psi(x_1)].$$

En comparant cette formule avec (5.4.29), on voit que la grandeur S contient les potentiels $\boldsymbol{A}$ et φ non pas explicitement, mais sous la forme de composantes des champs électrique $\boldsymbol{E}$ et magnétique $\boldsymbol{H}$: $S(x_1, x_2, f, A) = S(x_1, x_2; f, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$.

Nous allons montrer que l'opérateur de densité du courant en présence d'un champ électromagnétique extérieur

$$\boldsymbol{j}(x) = \frac{ie}{2m}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ie}{c}\boldsymbol{A}\right)\psi^+(x)\cdot\psi(x) - \right.$$
$$\left. - \psi^+(x)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ie}{c}\boldsymbol{A}\right)\psi(x)\right\} \tag{5.4.30}$$

peut s'exprimer en fonction de l'opérateur de Wigner à une particule invariant par rapport au calibrage $\hat{f}_p(x)$:

$$\boldsymbol{j}(x) = \frac{e}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{\boldsymbol{p}}{m}\hat{f}_p(x), \tag{5.4.31}$$

où

$$\hat{f}_p(x) = \int d^3y\,e^{ipy}e^{z\left(x - \frac{1}{2}y,\ x + \frac{1}{2}y\right)}\psi^+\left(x + \frac{1}{2}y\right)\psi\left(x - \frac{1}{2}y\right).$$

Notons à cet effet qu'en vertu de (5.4.24) on peut représenter l'opérateur (5.4.30) sous la forme

$$j(x)=\frac{ie}{m}\frac{\partial}{\partial y}e^{z\left(x-\frac{1}{2}y,\ x+\frac{1}{2}y\right)}\varphi^{+}\left(x+\frac{1}{2}y\right)\psi\left(x-\frac{1}{2}y\right)\Big|_{y=0},$$

d'où la formule (5.4.31).

Revenons maintenant à l'équation cinétique pour la matrice à une particule invariante par rapport au calibrage $f(x_1, x_2)$. En vertu de (5.4.20), (5.4.23) on a

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial t}+Q(x_1, x_2)f(x_1, x_2)+\frac{i}{2m}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-Q_2(x_1, x_2)\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-Q_1(x_1, x_2)\right)^2\right\}f(x_1, x_2)=I(x_1, x_2;\ f), \qquad (5.4.32)$$

où

$$Q(x_1, x_2)=ie(\varphi(x_1)-\varphi(x_2))-\dot{z}(x_1, x_2),$$
$$Q_1(x_1, x_2)=\frac{ie}{c}A(x_1)+\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1},$$
$$Q_2(x_1, x_2)=-\frac{ie}{c}A(x_2)+\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

et

$$I(x_1, x_2;\ f)=ie^{z(x_1, x_2)}\,\mathrm{Sp}\,\rho(e^{-z}f;\ A)\,[V,\ \psi^{+}(x_2)\psi(x_1)].$$

Notons que les grandeurs Q, Q_1, Q_2, conformément à (5.4.28), sont invariantes par rapport au calibrage et, par conséquent, ne dépendent que des champs E et H. En posant $x_1 = x - 1/2y$, $x_2 = x + 1/2\,y$ et en introduisant la désignation

$$f\left(x-\frac{1}{2}y,\ x+\frac{1}{2}y\right)\equiv f_y(x),$$

on récrit l'équation (5.4.32) comme

$$\frac{\partial f_y(x)}{\partial t}+\frac{i}{m}\frac{\partial^2 f_y(x)}{\partial y\,\partial x}+Q_y(x)f_y(x)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{H}_y(x)f_y(x))+$$
$$+C_y(x)\left\{\frac{\partial f_y(x)}{\partial x}-im\mathcal{H}_y(x)f_y(x)\right\}=I_y(x;\ f), \qquad (5.4.33)$$

où $I_y(x;\ f)=I\left(x-\frac{1}{2}y,\quad x+\frac{1}{2}y;\ f\right)$ et

$$Q_y(x)=Q\left(x-\frac{1}{2}y,\ x+\frac{1}{2}y\right)=iey\int_0^1 d\xi\, E\left(x+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)y\right),$$

$$\mathcal{H}_y(x)=-\frac{i}{m}(Q_1+Q_2)=\frac{e}{mc}\int_0^1 d\xi\left[y,\ H\left(x+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)y\right)\right],$$

$$C_y(x)=\frac{i}{2m}(Q_1-Q_2)=\frac{e}{mc}\int_0^1 d\xi\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\left[y,\ H\left(x+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)y\right)\right].$$

L'équation (5.4.32) (ou (5.4.33)) est l'équation cinétique pour la matrice de densité à une particule dans la représentation des coordonnées. La grandeur $I_y(x; f)$ figurant dans cette équation peut être appelée intégrale généralisée des collisions. Elle tient compte des effets liés au champ self-consistent et aux collisions des particules et dépend, en général, du champ électromagnétique.

En vertu de (5.4.25), la fonction de distribution de Wigner invariante par rapport au calibrage $f_p(x)$ est liée à la fonction $f_y(x)$ par la relation suivante:

$$f_p(x) = \int d^3y e^{ipy} f_y(x).$$

On voit ainsi que la grandeur y sera de l'ordre de grandeur de l'onde broglienne d'une particule $\lambda \sim \overline{p}^{-1}$.

Si le champ varie peu sur la longueur d'onde broglienne, les expressions de $Q_y(x)$, $\mathscr{H}_y(x)$, $C_y(x)$ se simplifient beaucoup, soit:

$$Q_y(x) \approx iey E(x), \quad \mathscr{H}_y(x) \approx \frac{e}{mc}[y, H(x)], \quad C_y(x) \approx 0.$$

Dans ce cas, l'équation pour la fonction de distribution de Wigner $f_p(x)$, en vertu de (5.4.33), s'écrit

$$\frac{\partial f_p(x)}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial f_p(x)}{\partial x} + e\left\{E(x) + \frac{1}{mc}[p, H(x)]\right\}\frac{\partial f_p(x)}{\partial p} = I_p(x; f), \tag{5.4.34}$$

où

$$I_p(x; f) = \int d^3y e^{ipy} I_y(x; f).$$

L'intégrale des collisions généralisée $I_p(x; f)$ figurant ici, comme nous l'avons déjà vu, dépend des champs extérieurs E et H; de plus, elle dépend, en principe, des gradients de la fonction de distribution.

Si un champ électromagnétique est faible et des hétérogénéités de la fonction de distribution sont petites, on peut négliger l'influence du champ et des hétérogénéités sur un acte de collision. L'équation cinétique, en vertu de (5.4.34) et (5.1.33), sera

$$\frac{\partial f_p(x)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial p}\frac{\partial f_p(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial x}\frac{\partial f_p(x)}{\partial p} + e\left\{E(x) + \frac{1}{mc}[p, H(x)]\right\}\frac{\partial f_p(x)}{\partial p} = L_p^{(2)}(f(x)), \tag{5.4.35}$$

où $L_p^{(2)}(f(x))$ et $\varepsilon_p(x)$ sont donnés par les formules (5.1.32), (5.1.31).

L'équation cinétique (5.4.34) ne contient que des grandeurs invariantes par rapport au calibrage. Cependant, pour des calculs concrets il est parfois commode d'utiliser l'équation cinétique (5.4.22), où figure une matrice de densité invariante par rapport au calibrage. Si on calcule la densité du courant, pour l'opérateur du courant on doit alors utiliser la formule (5.4.30).

5.4.3. Relation entre le comportement asymptotique des fonctions de Green dans le domaine des basses fréquences et les équations cinétiques. Dans le paragraphe 4.4.2 nous avons étudié le comportement asymptotique des fonctions de Green à la limite thermodynamique, c'est-à-dire dans le cas où la fréquence est petite par rapport

à l'inverse du temps de relaxation τ_r^{-1} et le vecteur d'onde est petit par rapport à l'inverse de la longueur du libre parcours moyen l^{-1}. La résolution de ce problème est étroitement liée à la description hydrodynamique de l'état du système. Cependant, si l'on veut étudier le domaine des fréquences élevées et des vecteurs d'onde importants, la description hydrodynamique devient insuffisante, et il y a lieu de donner une description cinétique.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment à partir de l'équation cinétique on peut trouver l'expression asymptotique pour les fonctions de Green dans le domaine des fréquences ω qui sont petites seulement par rapport à τ_0^{-1} où τ_0 est le temps de chaotisation, et non par rapport à τ_r^{-1}, et dans le domaine des vecteurs d'onde qui sont petits seulement par rapport à r_0^{-1} et non par rapport à l^{-1} [94] ($\tau_0 \approx r_0/\bar{v}$, $\bar{v}$ est la vitesse moyenne des particules et r_0 la plus grande des grandeurs: rayon d'action des forces ou longueur d'onde broglienne $1/m\bar{v}$) *).

La fonction de Green retardée

$$G^{(+)}_{\xi'\xi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t') = -i\theta(t-t')\,\mathrm{Sp}\, w\,[\xi'(\boldsymbol{x}, t), \xi(\boldsymbol{x}', t')],$$

en vertu de (4.1.7), peut s'exprimer par l'opérateur statistique $\rho(t)$ satisfaisant à l'équation (5.4.1) et à la condition initiale $\rho(-\infty) = w$:

$$G^{(+)}_{\xi'\xi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t') = \frac{\delta\,\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\xi'(\boldsymbol{x})}{\delta F(\boldsymbol{x}', t')}\bigg|_{F=0}, \qquad (5.4.36)$$

où le champ extérieur $F(\boldsymbol{x}, t)$ est lié au hamiltonien de l'interaction $\mathcal{H}_F$ par la relation (5.4.2) et la dérivée variationnelle est déterminée à l'aide de la formule

$$\delta\rho(t) = \int d^3x'\,dt'\,\delta F(\boldsymbol{x}', t')\frac{\delta\rho(t)}{\delta F(\boldsymbol{x}', t')}. \qquad (5.4.37)$$

Etudiant le comportement asymptotique basse fréquence de la fonction de Green lorsque $\omega \ll \tau_0^{-1}$, on peut utiliser l'opérateur statistique $\sigma(\zeta; t)$, $\rho(t) \equiv \sigma(\zeta; t)$ pour lequel on a le développement (5.4.16) suivant les puissances de ω. Comme $\sigma(\zeta; t)$ dépend de F tant directement que par ζ_α (la dernière relation est donnée par l'équation du mouvement (5.4.19), on a

$$\frac{\delta\rho(t)}{\delta F(\boldsymbol{x}', t')}\bigg|_{F=0} = \int d^3x\,\sigma_\alpha(\boldsymbol{x})\,h_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t') + \rho(\boldsymbol{x}', t-t'), \quad (5.4.38)$$

où

$$\sigma_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})}\bigg|_{F=0}, \quad \rho(\boldsymbol{x}', t-t') = \frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta F(\boldsymbol{x}', t')}\bigg|_{F=0}, \quad (5.4.39)$$

$$h_\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t') = \frac{\delta\zeta_\alpha(\boldsymbol{x}, t)}{\delta F(\boldsymbol{x}', t')}\bigg|_{F=0}.$$

*) Dans le cas classique le problème a été résolu par une autre méthode dans [32], [102].

La dérivée variationnelle donnant $\rho(\boldsymbol{x}', t-t')h_\alpha$ doit ici être comprise dans le sens de (5.4.37), c'est-à-dire des fonctions de quatre variables $\boldsymbol{x}$, t sont argument des fonctionnelles $\zeta_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$, $\sigma(\zeta; t)$. Quant aux dérivées variationnelles qui déterminent les opérateurs σ_α, elles sont données par

$$\delta\sigma(\zeta; t) = \int d^3x\delta\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})\frac{\delta\sigma(\zeta; t)}{\delta\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})}, \qquad (5.4.40)$$

c'est-à-dire que les arguments de la fonctionnelle σ sont constitués par les fonctions $\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})$ dépendant seulement des trois variables $\boldsymbol{x}$ (t étant fixé). Malgré la différence des sens attribués aux dérivées variationnelles, nous utiliserons pour elles les mêmes désignations. Ceci ne prêtera pas à confusion, car dans les dérivées variationnelles du type (5.4.40) l'argument de la fonctionnelle et la variation de l'argument sont relatives à un même instant.

Nous allons maintenant trouver les composantes de Fourier de la fonction de Green $G^{(+)}_{\xi\xi}(\boldsymbol{x}, t)$. A partir de (5.4.36), on obtient en vertu de (5.4.38)

$$G^{(+)}_{\xi\xi}(\boldsymbol{k}, \omega) = h_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\alpha(-\boldsymbol{k})\,\xi'(0) + \mathrm{Sp}\,\rho(-\boldsymbol{k}, \omega)\,\xi'(0) \qquad (5.4.41)$$

(les composantes de Fourier $a(\boldsymbol{k}, \omega)$, $a(\boldsymbol{k})$ des fonctions $a(\boldsymbol{x}, t)$, $a(\boldsymbol{x})$ sont données par les relations $a(\boldsymbol{k}, \omega) = \int d^3x\, dt a(\boldsymbol{x}, t) \times \times \exp i(\omega t - \boldsymbol{kx})$, $a(\boldsymbol{k}) = \int d^3x a(\boldsymbol{x}) \exp(-i\boldsymbol{kx})$).

La formule (5.4.41) contient les composantes de Fourier $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$, $\rho(\boldsymbol{k}, \omega)$ des opérateurs inconnus $\sigma_\alpha(\boldsymbol{x})$, $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ et la composante de Fourier $h_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)$ de la fonction inconnue $h_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$. Quant à l'opérateur $\sigma_\alpha(\boldsymbol{x})$ il peut s'exprimer en fonction de l'opérateur statistique grossier $\sigma(\zeta)$ satisfaisant à l'équation (5.1.17)

$$\sigma(\zeta) = \rho^{(0)}(\zeta) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}\Big\{[V, \sigma(\zeta)] - \\ - i\int d^3x\frac{\delta\sigma(\zeta)}{\delta\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})}L_\alpha(\boldsymbol{x}; \zeta)\Big\}_{\zeta\to\zeta^\tau}\cdot e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \qquad (5.4.42)$$

$$L_\alpha(\boldsymbol{x}; \zeta) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta)\,[V, \hat{\zeta}_\alpha(\boldsymbol{x})].$$

En effet, à partir de cette relation et de (5.4.15), on a $\sigma(\zeta; t)_{F=0} = = \sigma(\zeta)$. Donc, en vertu de la première des formules (5.4.39), on a

$$\sigma_\alpha(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\delta\sigma(\zeta)}{\delta\zeta_\alpha(\boldsymbol{x})}\right)_0, \qquad (5.4.43)$$

où l'indice 0 signifie que la dérivée variationnelle est prise pour les valeurs d'équilibre de ζ_α (nous avons tenu compte de ce que ζ_α prend des valeurs d'équilibre pour $F = 0$).

Comme $e^{iPx}\sigma(\zeta(x'))\,e^{-iPx}=\sigma(\zeta(x'+x))$, où P est l'opérateur de l'impulsion du système (voir (4.2.33)), on a

$$e^{iPx}\sigma_\alpha(x')\,e^{-iPx}=\sigma_\alpha(x'+x). \qquad (5.4.44)$$

Nous allons maintenant obtenir une équation intégrale pour les opérateurs $\sigma_\alpha(x)$. Remarquons à cet effet que l'opérateur statistique $\sigma(\zeta;\,t)$ satisfait en vertu de (5.4.9), (5.4.10) à l'équation

$$\frac{i\partial\sigma(\zeta;\,t)}{\partial t}+i\int d^3x\,\frac{\delta\sigma(\zeta;\,t)}{\delta\zeta_\alpha(x)}\,\mathscr{L}_\alpha(x;\,\zeta;\,t)=$$
$$=[\mathscr{H}_0,\ \sigma(\zeta;\,t)]+[V(t),\ \sigma(\zeta,\,t)]. \qquad (5.4.45)$$

Compte tenu de la définition (5.4.39) des opérateurs et vu que $(\mathscr{L}_\alpha)_0=\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\sigma}{\delta\zeta}\right)_0=0$, on a

$$i\int d^3x'\sigma_\beta(x')\,[\dot{\mathscr{K}}_{\beta\alpha}(x'-x)+N_{\beta\alpha}(x'-x)\}=$$
$$=[\mathscr{H}_0,\ \sigma_\alpha(x)]+[V,\ \sigma_\alpha(x)], \qquad (5.4.46)$$
$$N_{\alpha\beta}(x-x')=\left(\frac{\delta L_\alpha(x;\,\zeta)}{\delta\zeta_\beta(x')}\right)_0=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(x')\,[V,\ \hat{\zeta}_\alpha(x)].$$

($\dot{\mathscr{K}}_{\alpha\beta}(x-x')$ est donné par la formule (5.4.5) ; la grandeur $N_{\alpha\beta}(x-x')$ compte tenu de (5.4.44) est une fonction de la différence des arguments x et x'.) Ecrite dans les composantes de Fourier cette équation est de la forme

$$\sigma_\beta(k)\,\{\dot{\mathscr{K}}_{\beta\alpha}(-k)+N_{\beta\alpha}(-k)\}=$$
$$=-i\,[\mathscr{H}_0,\ \sigma_\alpha(k)]-i\,[V,\ \sigma_\alpha(k)]. \qquad (5.4.46')$$

Comme

$$i\int d^3x\,\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\zeta_\alpha(x)}\,\mathscr{L}_\alpha^{(0)}(x;\,\zeta)=[\mathscr{H}_0,\ \rho^{(0)}(\zeta)] \qquad (5.4.47)$$

($\rho^{(0)}(\zeta)$ est déterminé par la formule (5.4.13)) les composantes de Fourier des opérateurs

$$\sigma_\alpha^{(0)}(x)=\left(\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\zeta_\alpha(x)}\right)_0, \qquad (5.4.48)$$

satisfont aux équations

$$i\,[\sigma_\alpha^{(0)}(k),\ \mathscr{H}_0]-\sigma_\beta^{(0)}(k)\,\dot{\mathscr{K}}_{\beta\alpha}(-k)=\mathscr{L}_\beta^{(0)}(\zeta^{(0)})\,\sigma_{\beta\alpha}^{(0)}(0;\,k),$$
$$\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(k,\,k')=\int d^3x\,d^3x'\,e^{-ikx-ik'x'}\left(\frac{\delta^2\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\zeta_\alpha(x)\,\delta\zeta_\beta(x')}\right)_0, \qquad (5.4.49)$$

où $\mathscr{L}_\beta^{(0)}(\zeta^{(0)})\equiv\mathscr{L}_\beta^{(0)}(x;\,\zeta^0)=-L_\beta(\zeta^0)$ est la valeur de $\mathscr{L}_\beta^{(0)}(x;\,\zeta)$ pour les valeurs d'équilibre des paramètres $\zeta_\alpha=\zeta_\alpha^0$ (nous avons tenu compte de ce que $\mathscr{L}_\beta(\zeta^0)\equiv\mathscr{L}_\beta^{(0)}(\zeta^0)+L_\beta(\zeta^0)=0$).

En utilisant cette formule, on peut écrire l'équation (5.4.46') comme suit

$$\frac{\partial}{\partial\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} (\sigma_\beta(k) - \sigma_\beta^{(0)}(k))\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau} (e^{\tau\dot{\mathcal{K}}(-k)})_{\beta\alpha} =$$

$$= e^{i\mathcal{H}_0\tau} \{-i[V,\ \sigma_\beta(k)] - \sigma_\gamma(k) N_{\gamma\beta}(-k) -$$

$$- L_\gamma(\zeta^{(0)})\, \sigma_{\gamma\beta}^{(0)}(0;\ k)\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} (e^{\tau\dot{\mathcal{K}}(k)})_{\beta\alpha}.$$

Puis en tenant compte de ce qu' à partir de (5.4.13), (5.4.14), on a la relation asymptotique suivante

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_\beta(k)\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow[\tau\to-\infty]{} e^{i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_\beta^{(0)}(k)\, e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

on obtient finalement pour $\sigma_\alpha(k)$ l'équation intégrale suivante

$$\sigma_\alpha(k) = \sigma_\alpha^{(0)}(k) - i \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \{[V,\ \sigma_\beta(k)] -$$

$$- i\sigma_\gamma(k) N_{\gamma\beta}(-k) - iL_\gamma(\zeta^{(0)})\, \sigma_{\gamma\beta}^{(0)}(0;\ k)\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} (e^{\tau\dot{\mathcal{K}}(-k)})_{\beta\alpha}, \quad (5.4.50)$$

$$N_{\alpha\beta}(k) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(-k)\,[V,\ \hat{\zeta}_\alpha(0)], \quad \hat{\zeta}_\alpha(0) \equiv \hat{\zeta}_\alpha(x)|_{x=0}.$$

Remarquons que comme $\mathrm{Sp}\,\sigma(\zeta)\,\hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x)$, on a en vertu de (5.4.43)

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_\beta(x')\,\hat{\zeta}_\alpha(x) = \delta_{\alpha\beta}\delta(x - x'). \quad (5.4.51)$$

Nous allons montrer maintenant comment on peut trouver les composantes de Fourier $\rho(k,\ \omega)$ de l'opérateur $\rho(x,\ t)$ (voir (5.3.39)). Dérivons à cet effet l'équation (5.4.45) par rapport à $F(x',\ t')$ pour $\zeta_\alpha(x)$ fixes. Vu que $\sigma(\zeta;\ t)$ pour des valeurs d'équilibre de ζ_α et $F = 0$ coïncide avec l'opérateur statistique d'équilibre de Gibbs w, on obtient, en vertu de (5.4.39), l'équation suivante pour les composantes de Fourier $\rho(k;\ \omega)$:

$$-i\omega\rho(k;\ \omega) + \sigma_\alpha(k)\, Q_\alpha(-k;\ \omega) =$$

$$= i[\rho(k;\ \omega),\ \mathcal{H}_0] + i[\rho(k;\ \omega),\ V] + i[w,\ \xi'(k)],$$

où

$$Q_\alpha(k;\ \omega) = \int d^3x\, dt\, e^{i\omega(t-t') - ik(x-x')} \left(\frac{\delta L_\alpha(x;\ \zeta;\ t)}{\delta F(x',\ t')}\right)_0 =$$

$$= i\,\mathrm{Sp}\, w\,[\hat{\xi}(-k),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)] + i\,\mathrm{Sp}\,\rho(-k,\ \omega)\,[V,\ \hat{\zeta}_\alpha(0)] \quad (5.4.52)$$

(nous avons tenu compte ici de la définition (5.4.10) pour la grandeur L). Remarquant qu'à partir de la relation (5.4.14)

$$e^{i\mathscr{H}_0\tau}\sigma(\zeta;\ t)\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to-\infty]{}\rho^{(0)}(\mathscr{K}(-\tau)\,\zeta)$$

on a la relation asymptotique

$$e^{i\mathscr{H}_0\tau}\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}\xrightarrow[\tau\to-\infty]{}0,$$

on obtient finalement l'équation intégrale suivante pour $\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)$:

$$\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)=-i\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\mathscr{H}_0\tau}\{[V,\ \rho(\boldsymbol{k},\ \omega)]+[\xi(\boldsymbol{k}),\ w]-\\ -\omega\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)-i\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})\,Q_\alpha(-\boldsymbol{k},\ \omega)\}\,e^{-i\mathscr{H}_0\tau}. \quad (5.4.53)$$

Les équations (5.4.50), (5.4.53) forment un système fermé d'équations pour la définition des opérateurs $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$ et $\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)$.

Notons qu'à partir de (5.4.8), (5.4.39) on a

$$\mathrm{Sp}\,\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)\,\hat{\zeta}(\boldsymbol{x})=0. \quad (5.4.54)$$

De plus, en vertu de (5.4.53), (5.4.44)

$$e^{iPx'}\rho(\boldsymbol{x},\ t)\,e^{iPx'}=\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\ t). \quad (5.4.55)$$

(On a utilisé cette relation pour obtenir (5.4.52), on supposait alors que la grandeur $(\delta L_\alpha(\boldsymbol{x};\ \zeta;\ t)/\delta F(\boldsymbol{x}',\ t'))_0$ était une fonction de la différence $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$.)

Il nous reste à trouver l'équation donnant $h_\alpha(\boldsymbol{k},\ \omega)$. A cet effet il y a lieu de se référer aux équations du mouvement (5.4.10) pour $\zeta_\alpha(\boldsymbol{x},\ t)$. En procédant à la variation de ces équations par rapport au champ extérieur et en utilisant la définition (5.4.39) des fonctions $h_\alpha(\boldsymbol{x},\ t)$ on obtient compte tenu de (5.4.46), (5.4.52)

$$\frac{\partial}{\partial t}h_\alpha(\boldsymbol{x},\ t)-\int d^3x'\,\{\dot{\mathscr{K}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+N_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}\,h_\beta(\boldsymbol{x}',\ t)=\\ =Q_\alpha(\boldsymbol{x},\ t).$$

Le troisième terme dans le premier membre de cette équation est l'intégrale des collisions $L_\alpha(\boldsymbol{x};\ \zeta)$ linéarisée au voisinage de l'état d'équilibre. Exprimée en composantes de Fourier cette équation s'écrit

$$\{-i\omega-\dot{\mathscr{K}}(\boldsymbol{k})-N(\boldsymbol{k})\}_{\alpha\beta}h_\beta(\boldsymbol{k},\ \omega)=Q_\alpha(\boldsymbol{k},\ \omega). \quad (5.4.56)$$

Les équations (5.4.50), (5.4.53), (5.4.56) sont un système d'équations donnant l'expression asymptotique basse fréquence de la fonction de Green $G^{(+)}_{\xi;\xi}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ dans le cas où l'interaction entre les particules est faible ou la densité des particules est petite.

Nous allons montrer que les équations (5.4.56), pour les fonctions $h_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)$ se simplifient notablement si le hamiltonien de l'interaction entre les particules commute avec l'opérateur du nombre total de particules $\hat{N}$. Notons à cet effet que conformément à la définition (5.4.13) $\rho^{(0)}(\zeta) \equiv \rho^{(0)}(f, w, \psi)$, on a la relation

$$U_\chi \rho^{(0)}(f, w, \psi) U_\chi^+ = \rho^{(0)}(f, we^{2i\chi}, \psi e^{i\chi}),$$

où U_χ est un opérateur unitaire, $U_\chi = \exp i\chi\hat{N}$, qui correspond aux transformations de gradients $U_\chi \hat{\psi}(x) U_\chi^+ = \hat{\psi}(x) e^{-i\chi}$ *). Compte tenu également de ce que $[V, \hat{N}] = 0$, on obtient à partir de (5.4.50) l'équation suivante pour l'opérateur statistique grossier $\sigma(\zeta) \equiv \sigma(f, w, \psi)$:

$$U_\chi \sigma(f, w, \psi) U_\chi^+ = \sigma(f, we^{2i\chi}, \psi e^{i\chi}).$$

En dérivant cette relation par rapport à χ et en posant alors $\chi = 0$, on trouve

$$[\hat{N}, \sigma(\zeta)] = \int d^3x \frac{\delta\sigma(\zeta)}{\delta\psi(x)} \psi(x) + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(\zeta)}{\delta w_p(x)} w_p(x) - \text{c.h.} \tag{5.4.57}$$

En remarquant qu'à l'état d'équilibre statistique $\psi = w = 0$, il est facile d'obtenir, compte tenu de la définition de l'opérateur $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$, les formules suivantes

$$[\hat{N}, \sigma_{f_p}(\boldsymbol{k})] = 0, \quad [\hat{N}, \sigma_\psi(\boldsymbol{k})] = \sigma_\psi(\boldsymbol{k}), \quad [\hat{N}, \sigma_{w_p}(\boldsymbol{k})] = 2\sigma_{w_p}(\boldsymbol{k}), \tag{5.4.58}$$

où $\sigma_\psi(\boldsymbol{k}) = \sigma^+_{\psi^*}(-\boldsymbol{k})$, $\sigma_{w_p}(\boldsymbol{k}) = \sigma^+_{w_p^*}(-\boldsymbol{k})$, $\sigma_{f_p}(\boldsymbol{k})$ sont les opérateurs correspondant aux grandeurs ζ_α égales à ψ, w_p, f_p.

A partir de (5.4.58), on voit que parmi les grandeurs $N_{\alpha\beta}$, seules sont différentes de zéro $N_{\psi\psi}(\boldsymbol{k}) = N^*_{\psi^+\psi^+}(-\boldsymbol{k})$, $N_{w_pw_{p'}}(\boldsymbol{k}) = N^+_{w_p^*w_p^*}(-\boldsymbol{k})$, $N_{f_pf_p}(\boldsymbol{k})$. Considérons par exemple la grandeur $N_{\psi^*\psi}(\boldsymbol{k}) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\psi(-\boldsymbol{k})[V, \hat{\psi}^+(0)]$. En vertu de (5.4.58) on a $N_{\psi^*\psi}(\boldsymbol{k}) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\psi(-\boldsymbol{k})[V, [\hat{\psi}^+(0), \hat{N}]]$. Remarquant que $[\hat{\psi}^+(0), \hat{N}] = -\hat{\psi}^+(0)$, on a $N_{\psi^*\psi}(\boldsymbol{k}) = -i\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\psi(-\boldsymbol{k})[V, \psi^+(0)] = -N_{\psi^*\psi}(\boldsymbol{k})$, c'est-à-dire $N_{\psi^*\psi}(\boldsymbol{k}) = 0$.

Ainsi les équations (5.4.56) pour les composantes de Fourier $h_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega)$ $(\alpha = f_p, w_p, \psi)$ s'écrivent

$$-i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}) h_{f_p}(\boldsymbol{k}, \omega) - \sum_{p'} N_{f_pf_{p'}}(\boldsymbol{k}) h_{f_{p'}}(\boldsymbol{k}, \omega) = Q_{f_p}(\boldsymbol{k}, \omega),$$

$$-i(\omega - \varepsilon_{\boldsymbol{k}}) h_\psi(\boldsymbol{k}, \omega) - N_{\psi\psi}(\boldsymbol{k}) h_\psi(\boldsymbol{k}, \omega) = Q_\psi(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{5.4.59}$$

---

*) Ici et plus bas afin de ne pas confondre l'opérateur $\hat{\psi}$ et sa valeur moyenne ψ l'opérateur $\hat{\psi}$ est affecté du signe $\wedge$.

$$-i(\omega-\varepsilon_{p+k/2}-\varepsilon_{p-k/2})h_{w_p}(\boldsymbol{k},\ \omega)-\sum_{p'}N_{w_pw_{p'}}(\boldsymbol{k})h_{w_{p'}}(\boldsymbol{k},\ \omega)=$$
$$=Q_{w_p}(\boldsymbol{k},\ \omega),$$

où $\varepsilon_k=k^2/2m$, $v=p/m$ (nous avons utilisé les formules (5.4.5) donnant $\dot{\mathscr{K}}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$).

On voit que si le hamiltonien de l'interaction V commute avec l'opérateur du nombre de particules, le système d'équations pour h_α se décompose en équations indépendantes pour h_{f_p}, h_ψ et h_{w_p}. Remarquons que les équations pour h_f et h_w sont des équations intégrales, et l'équation pour h_ψ une équation algébrique. La solution de cette dernière est de la forme

$$h_\psi(\boldsymbol{k},\ \omega)=\frac{iQ_\psi(\boldsymbol{k},\ \omega)}{\omega-\varepsilon_k-iN_{\psi\psi}(\boldsymbol{k})}. \tag{5.4.60}$$

L'équation pour les fonctions h_f dans la représentation des coordonnées peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)h_{f_p}(\boldsymbol{x},\ t)-\int d^3x'\sum_{p'}N_{f_pf_{p'}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')h_{f_{p'}}(\boldsymbol{x}',\ t)=$$
$$=Q_{f_p}(\boldsymbol{x},\ t).$$

L'intégrale figurant ici est en vertu de (5.4.46) l'intégrale des collisions $L_p(\boldsymbol{x};\ f)$ linéarisée au voisinage de l'état d'équilibre statistique. C'est pourquoi cette équation peut être interprétée, comme l'équation cinétique linéarisée pour la fonction de distribution de Wigner avec les sources $Q_{f_p}(\boldsymbol{x},\ t)$ qui décrivent l'influence d'une perturbation extérieure sur le système.

Revenons maintenant aux formules (5.4.41), pour la fonction de Green $G^{(+)}_{\xi\xi'}(\boldsymbol{k},\ \omega)$. Si chacun des opérateurs ξ et ξ' contient un même nombre d'opérateurs de champ ψ et ψ^+ on a

$$G^{(+)}_{\xi\xi'}(\boldsymbol{k},\ \omega)=\sum_p h_{f_p}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,\mathrm{Sp}\,\sigma_{f_p}(-\boldsymbol{k})\,\xi'(0)+$$
$$+\mathrm{Sp}\,\rho(-\boldsymbol{k},\ \omega)\,\xi'(0). \tag{5.4.61}$$

En substituant ici la solution de l'équation (5.4.59) pour $h_{f_p}(\boldsymbol{k},\ \omega)$, on trouve le comportement asymptotique des fonctions de Green dans le domaine des ω et $\boldsymbol{k}$ petits.

Nous allons encore montrer comment on peut trouver l'expression asymptotique des fonctions de Green $G^{(+)}_{\psi\psi^+}(\boldsymbol{k},\ \omega)$. Remarquons à cet effet qu'en vertu de (5.4.51), on a

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_\psi(\boldsymbol{k})\,\hat{\psi}^+(0)=\mathrm{Sp}\,\sigma_{f_p}(\boldsymbol{k})\,\hat{\psi}^+(0)=\mathrm{Sp}\,\sigma_{w_p}(\boldsymbol{k})\,\hat{\psi}^+(0)=0.$$

C'est pourquoi compte tenu de (5.4.52) on trouve

$$G^{(+)}_{\psi\psi^+}(\boldsymbol{k},\ \omega) = h_\psi(\boldsymbol{k},\ \omega)\,\mathrm{Sp}\,\sigma_\psi(-\boldsymbol{k})\,\hat{\psi}(0) + \mathrm{Sp}\,\rho(-\boldsymbol{k},\ \omega)\,\hat{\psi}(0).$$

Vu (5.4.51), (5.4.54) on a $\mathrm{Sp}\ \sigma_\psi(-\boldsymbol{k})\,\hat{\psi}(0) = 1$, $\mathrm{Sp}\,\rho(-\boldsymbol{k},\ \omega) \times$ $\times\,\hat{\psi}(0) = 0$. C'est pourquoi, en vertu de (5.4.60)

$$G^{(+)}_{\psi\psi^+}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \frac{iQ_\psi(\boldsymbol{k},\ \omega)}{\omega - \varepsilon_{\boldsymbol{k}} - iN_{\psi\psi}(\boldsymbol{k})}.$$

On voit que la fonction de Green à une particule $G^{(+)}_{\psi\psi^+}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ a un pôle pour $\omega = \varepsilon_k + iN_{\psi\psi}(\boldsymbol{k})$. La partie réelle de ce pôle donne l'énergie d'une excitation élémentaire (ou d'une quasi-particule) apparaissant à partir de l'énergie d'une particule ε_k d'un gaz parfait. Quant à la partie imaginaire du pôle $\mathrm{Im}\ iN_{\psi\psi}(\boldsymbol{k})$, elle détermine la durée de vie de cette quasi-particule.

Les fonctions $N_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$, $Q_\alpha(\boldsymbol{k},\ \omega)$ figurant dans (5.4.59) peuvent être obtenues à partir des équations intégrales (5.4.50), (5.4.53) pour $\sigma_\alpha(\boldsymbol{k})$, $\rho(\boldsymbol{k},\ \omega)$ par les mêmes méthodes que celles utilisées pour trouver les équations cinétiques dans les paragraphes 5.1.2 et 5.2.2.

Remarquons que l'on peut obtenir les résultats du présent paragraphe d'une autre manière, à partir de l'équation intégrale pour l'opérateur statistique grossier (4.2.11) et de l'équation de « mémoire » (4.2.17) [30].

Pour trouver l'expression asymptotique de la fonction de Green pour les pulsations $\omega \sim \tau_0^{-1}$, il y a lieu d'utiliser l'équation intégrale (5.4.15′) tenant compte du caractère non markovien des processus cinétiques rapides.

Soulignons que les équations (5.4.59), (5.4.60) s'appliquent au cas des systèmes de Bose normaux (c'est-à-dire non superfluides) lorsque ψ et w_p sont nuls à l'état d'équilibre. Cependant la formule (5.4.61) peut également être utilisée pour trouver l'expression asymptotique des fonctions de Green des systèmes de Fermi normaux (c'est-à-dire non superfluides). Par contre, pour trouver l'expression asymptotique de la fonction de Green du type $G^{(+)}_{\psi\psi^+}$, même pour un système de Fermi normal, il faut introduire l'interaction du système avec des champ extérieurs anticommutants. Nous n'allons pas nous arrêter sur ce problème.

5.4.4. Equations intégrales pour la définition de l'expression asymptotique basse fréquence des fonctions de Green d'un système de Bose dégénéré. Dans le paragraphe précédent nous avons obtenu des équations intégrales pour les opérateurs $\sigma_\alpha(\boldsymbol{x})$, permettant de trouver l'expression asymptotique basse fréquence des fonctions de Green d'un système de Bose normal.

Il est facile de modifier ces équations de sorte qu'on peut trouver l'expression asymptotique basse fréquence des fonctions de Green et des systèmes de Bose dégénérés, c'est-à-dire des systèmes doués de la propriété de superfluidité [94]. Pour ces systèmes la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{\psi}$ n'est pas nulle.

En effet si conformément à la méthode des valeurs quasi moyennes on prend pour l'opérateur statistique de Gibbs l'opérateur statistique

$$w_\nu = \exp\left\{\Omega - \beta\left(\mathscr{H} - \mu N + \nu\int d^3x\,(\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}^+(x))\right)\right\},$$

la valeur quasi moyenne de l'opérateur $\hat{\psi}$ sera égale à

$$\{\hat{\psi}\} \equiv \lim_{\nu\to 0}\lim_{\mathscr{V}\to\infty} \mathrm{Sp}\, w_\nu \hat{\psi}(x) = \left(\frac{n_0}{\mathscr{V}}\right)^{1/2},$$

où $n_0/\mathscr{V}$ est la densité des particules d'un condensat de Bose (pour que la grandeur $\{\hat{\psi}\}$ soit positive, il faut faire tendre ν vers zéro du côté des valeurs négatives, voir le paragraphe 6.2.3).

Soulignons que l'opérateur w_ν ne commute pas dans le sens des quasi-moyennes ni avec le hamiltonien du système $\mathscr{H}$, ni avec l'opérateur du nombre des particules N, c'est-à-dire $\{[\mathscr{H}, \hat{\psi}^+(x_1)\ldots\hat{\psi}(x_n)]\} \neq 0$, $\{[N, \hat{\psi}^+(x_1)\ldots$ $\ldots\hat{\psi}(x_n)]\} \neq 0$. Cependant l'opérateur ω_ν commute dans le sens des valeurs quasi moyennes avec l'opérateur $\mathscr{H} - \mu N \equiv \overline{\mathscr{H}}$

$$\{[\mathscr{H} - \mu N, \hat{\psi}^+(x_1)\ldots\hat{\psi}(x_n)]\} = 0, \tag{5.4.62}$$

car

$$\nu\int d^3x\,\{[\hat{\psi}^+(x) + \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x_1)\ldots\hat{\psi}(x_n)]\} \xrightarrow[\nu\to 0]{} 0.$$

Dans le paragraphe précédent, les fonctions de Green des systèmes normaux étaient déterminées par (5.4.36), où l'opérateur statistique $\rho(t)$ satisfaisait à l'équation (5.4.1). Il était alors essentiel que la distribution de Gibbs commutait avec le hamiltonien $\mathscr{H}$. Pour des systèmes de Bose dégénérés, il est commode de définir les fonctions de Green un peu différemment, soit

$$\mathscr{G}^{(+)}(x - x', t - t') =$$
$$= -i\theta(t - t')\{[e^{i\overline{\mathscr{H}}(t-t')}\xi'(x)e^{-i\overline{\mathscr{H}}(t-t')}, \xi(x')]\}, \tag{5.4.63}$$

où $\overline{\mathscr{H}} = \mathscr{H} - \mu N$. Pour une telle définition des fonctions de Green des systèmes de Bose dégénérés, les résultats du paragraphe précédent, où l'on ne supposait pas que $\psi = \omega_p = 0$, seront également vrais pour des systèmes de Bose dégénérés, il suffit de supposer que l'opérateur statistique $\rho(t)$ satisfait du point de vue formel à l'équation

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [\overline{\mathscr{H}} + \mathscr{H}_F(t), \rho(t)] \tag{5.4.64}$$

au lieu de l'équation (5.4.1). En particulier, la relation (5.4.36) existant entre la fonction de Green et la dérivée variationnelle de l'opérateur statistique:

$$\mathscr{G}^{(+)}_{\xi'\xi}(x - x', t - t') = \left.\frac{\delta\,\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\xi'(x)}{\delta F(x', t')}\right|_{F=0}$$

se conserve. En vertu de (5.4.62), le « hamiltonien » $\overline{\mathscr{H}} \equiv \mathscr{H} - \mu N$ commute dans le sens des valeurs quasi moyennes avec l'opérateur statistique d'équilibre w.

En vertu de (5.4.64) par l'opérateur V dans les formules du paragraphe précédent on doit maintenant comprendre non pas l'opérateur de l'interaction entre les particules, mais l'opérateur

$$V = \mathscr{H}_{\mathrm{int}} - \mu N, \tag{5.4.65}$$

où $\mathcal{H}_{\text{int}}$ est le hamiltonien de l'interaction entre les particules. Dans les équations intégrales (5.4.50) pour les opérateurs σ_α entrent les opérateurs $\sigma_\alpha^{(0)}$, qui à leur tour sont donnés par l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\zeta)$ (5.4.13)

$$\rho^{(0)}(\zeta)=\exp(\Omega_0-\hat{G}),$$

$$\hat{G}=(\hat{\psi}^+,\ Y\hat{\psi})+(\hat{\psi},\ X)+(\hat{\psi},\ X)^+ +(\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})+(\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})^+,$$

où

$$(\hat{\psi}^+,\ Y\hat{\psi})=\int d^3x d^3x' \hat{\psi}^+(x)\,Y(x,\ x')\,\hat{\psi}(x'),$$

$$(\hat{\psi},\ X)=\int d^3x\hat{\psi}(x)\,X(x),\qquad (\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})=\int d^3x d^3x'\hat{\psi}(x)\,Z(x,\ x')\,\hat{\psi}(x').$$

(Les fonctions $X(x)$, $Y(x, x')$, $Z(x, x')$, vu les relations $\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\zeta)\hat{\zeta}(x)=\zeta(x)$, sont données par les grandeurs $\zeta_\alpha(x)$.) Il est évident qu'il existe l'opérateur unitaire U, tel que

$$U\hat{\psi}(x)\,U^+=\hat{\psi}(x)+C(x),\qquad U\hat{\psi}^+(x)\,U^+=\hat{\psi}^+(x)+C^*(x),\qquad (5.4.66)$$

où $C(x)$ est une fonction c-numérique arbitraire de x. Cette fonction détermine l'opérateur U.

Il est facile de voir que si l'on prend $C(x)$ de telle sorte que

$$X+C^*Y+2ZC=0,\qquad X^*+YC+2Z^*C^*=0$$

(la seconde de ces équations est une conséquence de la première, car le noyau $Y(x, x')$ est hermitien, $Y^*(x, x')=Y(x', x)$), on obtient

$$U\hat{G}U^+=-(C^*,\ YC)-(C,\ ZC)-(C,\ ZC)^*+(\hat{\psi}^+,\ Y\hat{\psi})+(\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})+(\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})^+.$$

C'est pourquoi

$$\overline{\rho^{(0)}}\equiv U\rho^{(0)}(\zeta)\,U^+=\exp\{\Omega_0'-(\hat{\psi}^+,\ Y\hat{\psi})-(\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})-(\hat{\psi},\ Z\hat{\psi})^+\},\qquad (5.4.67)$$

où $\Omega_0'=\Omega_0+(C^*,\ YC)+2\mathrm{Re}\,(C,\ ZC)$. Remarquons que $\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\zeta)\,\hat{\psi}(x)=\psi(x)$, par conséquent

$$\psi(x)=\mathrm{Sp}\,U\rho^{(0)}(\zeta)\,U^+U\hat{\psi}(x)\,U^+=\mathrm{Sp}\,\overline{\rho^{(0)}}\,(\hat{\psi}(x)+C(x)).$$

On a donc $C(x)=\psi(x)$. On trouve alors $\mathrm{Sp}\,\overline{\rho^{(0)}}\hat{f}_p(x)$ et $\mathrm{Sp}\,\overline{\rho^{(0)}}\hat{w}_p(x)$. A cet effet, on introduit les fonctions de corrélation $g_p(x)$ et $\varphi_p(x)$:

$$\begin{aligned} f_p(x)&=g_p(x)+\int d^3y e^{ipy}\psi^*\left(x+\frac{y}{2}\right)\psi\left(x-\frac{y}{2}\right),\\ w_p(x)&=\varphi_p(x)+\int d^3y e^{ipy}\psi\left(x+\frac{y}{2}\right)\psi\left(x-\frac{y}{2}\right).\end{aligned}\qquad (5.4.68)$$

En remarquant que $\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\xi)\,\hat{\zeta}_\alpha(x)=\zeta_\alpha(x)$ on a en vertu de (5.4.67), (5.4.68)

$$\mathrm{Sp}\,\overline{\rho^{(0)}}\hat{f}_p(x)=g_p(x),\qquad \mathrm{Sp}\,\overline{\rho^{(0)}}\hat{w}_p(x)=\varphi_p(x).$$

A partir de ces formules et de (5.4.67), on a $\overline{\rho^{(0)}}=\rho^{(0)}(g,\ \varphi)$, donc

$$\rho^{(0)}(\zeta)=U^+\rho^{(0)}(g,\ \varphi)\,U,\qquad (5.4.69)$$

où $U\equiv U(\psi,\ \psi^*)$ est donné par les formules (5.4.66) dans lesquelles au lieu de $C(x)$ on doit substituer la fonction $\psi(x)$.

Ainsi la relation existant entre l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(\zeta)$ et ψ et ψ^* s'écrit sous la forme d'une transformation unitaire U, quant à l'opérateur $\rho^{(0)}(g,\ \varphi)$, il ne dépend que des fonctions de corrélation $g_p(x)$, $\varphi_p(x)$.

Les équations (5.4.50) contiennent la dérivée variationnelle de $\rho^{(0)}(\zeta)$ par rapport à $\zeta_\alpha(x)$, c'est-à-dire par rapport à $\psi(x)$, $f_p(x)$ et $w_p(x)$. C'est pourquoi il faut connaître la variation de l'opérateur unitaire U par rapport à ψ et ψ^*. Remarquons que l'opérateur U étant unitaire U, $\delta U \cdot U^+ = -U\delta U^+$, on a en vertu de (5.4.66)

$$[\delta U \cdot U^+,\ \hat{\psi}(x)] = \delta\psi(x), \qquad [\delta U \cdot U^+,\ \hat{\psi}^+(x)] = \delta\psi^*(x).$$

D'où il découle en vertu des relations de permutation canoniques (2.2.19)

$$\delta U = \int d^3x\,(\delta\psi^*(x)\,\hat{\psi}(x) - \delta\psi(x)\cdot\hat{\psi}^+(x))\,U. \tag{5.4.70}$$

Compte tenu de (5.4.69), on a donc

$$[\delta_\psi \rho^{(0)}(\zeta)]_{g,\,\varphi} = U^+\,[\rho^{(0)}(g,\ \varphi),\ \delta U \cdot U^+]\,U =$$
$$= U^+ \int d^3x\,\{\delta\psi(x)\,[\hat{\psi}^+(x),\ \rho^{(0)}(g,\ \varphi)] - \delta\psi^*(x)\,[\hat{\psi}(x),\ \rho^{(0)}(g,\ \varphi)]\}\,U,$$

où $[\delta_\psi\,\rho^{(0)}(\zeta)]_{g,\varphi}$ désigne la variation de $\rho^{(0)}(\zeta)$ par rapport à ψ et ψ^* pour $g_p(x)$, $\varphi_p(x)$ constants. En vertu de la dernière formule et de (5.4.69), on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\psi(x)}\right)^0_{g,\,\varphi} \equiv \bar{\sigma}^{(0)}_{\psi}(x) = U_0^+\,[\hat{\psi}^+(x),\ \rho^{(0)}(g,\ \varphi)]\,U_0,\\
&\left(\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\psi^*(x)}\right)^0_{g,\,\varphi} \equiv \bar{\sigma}^{(0)}_{\psi^*}(x) = \bar{\sigma}^{(0)}_{\psi}(x)^+,\\
&\left(\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\varphi_p(x)}\right)^0_{g,\,\psi} \equiv \bar{\sigma}^{(0)}_{\varphi_p}(x) = U_0^+\,\frac{\delta\rho^{(0)}(g,\ \varphi)}{\delta\varphi_p(x)}\,U_0,\\
&\left(\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta g_p(x)}\right)^0_{\psi,\,\varphi} \equiv \bar{\sigma}^{(0)}_{g_p}(x) = U_0^+\,\frac{\delta\rho^{(0)}(g,\ \varphi)}{\delta g_p(x)}\,U_0
\end{aligned} \tag{5.4.71}$$

(l'indice 0 près de la dérivée variationnelle et de l'opérateur U signifie que les grandeurs correspondantes sont prises pour les valeurs d'équilibre de g_p, φ_p et ψ).

Nous allons maintenant trouver l'opérateur U_0. A partir de la formule (5.4.70), on a

$$\frac{\partial U(\lambda\psi,\ \lambda\psi^*)}{\partial\lambda} = \int d^3x\,(\psi^*(x)\,\hat{\psi}(x) - \psi(x)\,\hat{\psi}^+(x))\,U(\lambda\psi,\ \lambda\psi^*).$$

Remarquant que $U(0,\ 0) = 1$, on obtient

$$U(\psi,\ \psi^*) = \exp\int d^3x\,(\psi^*(x)\,\hat{\psi}(x) - \psi(x)\,\hat{\psi}^+(x)).$$

Comme $U\hat{\psi}(x)\,U^+ = \hat{\psi}(x) + \psi(x)$ et $\hat{\psi}(x)\,|0\rangle = 0$, on a

$$\hat{\psi}(x)\,U^+\,|0\rangle = \psi(x)\,U^+\,|0\rangle, \tag{5.4.72}$$

où $|\,0\,\rangle$ est le vecteur d'état du vide. On voit que l'état $U^+\,|\,0\,\rangle$ est un état propre de l'opérateur $\hat{\psi}(x)$, appartenant à l'état propre $\psi(x)$. Cet état est appelé état cohérent.

A l'état w la grandeur ψ ne dépend pas de x et est égale à $(n_0/\mathcal{V})^{1/2}$. C'est pourquoi

$$U_0 = \exp n_0^{\,1/2}\,(a_0 - a_0^+), \tag{5.4.73}$$

où a_0 et a_0^+ sont des opérateurs d'annihilation et de création des particules de condensat. Notons qu'en vertu de (5.4.72) $a_0 U_0^+ \mid 0\rangle = a_0^{1/2} U_0^+ \mid 0\rangle$.

Revenons aux formules (5.4.71). Elles déterminent les dérivées variationnelles de $\rho^{(0)}(\zeta)$ par rapport à $\psi(x)$, $g_p(x)$ et $\varphi_p(x)$. Les équations intégrales (5.4.50) contiennent les grandeurs $\sigma_\alpha^{(0)}$ qui sont les dérivées variationnelles de $\rho^{(0)}(\zeta)$ par rapport à $\psi(x)$, $f_p(x)$ et $w_p(x)$. C'est pourquoi, il y a lieu de trouver une relation existant entre $\overline{\sigma}_\alpha^{(0)}$ et $\sigma_\alpha^{(0)}$. L'ensemble des fonctions $f_p(x)$, $w_p(x)$, $w_p^*(x)$, $\psi(x)$, $\psi^*(x)$ est désigné par $\zeta_\alpha(x)$. Désignons par $\overline{\zeta}_\alpha(x)$ l'ensemble des fonctions $g_p(x)$, $\varphi_p(x)$, $\varphi_p^*(x)$, $\psi(x)$, $\psi^*(x)$. La relation existant entre $f_p(x)$, $w_p(x)$ et $g_p(x)$, $\varphi_p(x)$, $\psi(x)$, $\psi^*(x)$ est donnée par les formules (5.4.69). Il est évident que

$$\begin{gathered}\sigma_\alpha^{(0)}(x)=\int d^3x'\overline{\sigma}_\beta^{(0)}(x)\,R_{\beta\alpha}(x'-x),\\ \overline{\sigma}_\alpha^{(0)}(x)=\int d^3x'\sigma_\beta^{(0)}(x')\,R_{\beta\alpha}^{-1}(x'-x),\end{gathered}\tag{5.4.74}$$

$$R_{\beta\alpha}(x'-x)=\left(\frac{\delta\overline{\zeta}_\beta(x')}{\delta\zeta_\alpha(x)}\right)_0,\quad R_{\beta\alpha}^{-1}(x'-x)=\left(\frac{\delta\zeta_\beta(x')}{\delta\overline{\zeta}_\alpha(x)}\right)_0,$$

où l'indice 0 près de la dérivée variationnelle désigne comme précédemment sa valeur d'équilibre.

Introduisons maintenant au lieu des opérateurs $\sigma_\alpha(k)$ figurant dans les équations intégrales (5.4.50) les opérateurs $\overline{\sigma}_\alpha(k)$:

$$\overline{\sigma}_\alpha(k)=\sigma_\beta(k)\,R_{\beta\alpha}^{-1}(-k),\qquad \sigma_\alpha(k)=\overline{\sigma}_\beta(k)\,R_{\beta\alpha}(-k),\tag{5.4.75}$$

où $R_{\beta\alpha}(k)$, $R_{\beta\alpha}^{-1}(k)$ sont les composantes de Fourier des fonctions $R_{\beta\alpha}(x)$, $R_{\beta\alpha}^{-1}(x)$. En vertu de (5.4.50), ces opérateurs satisfont aux équations intégrales suivantes

$$\begin{gathered}\overline{\sigma}_\alpha(k)=\overline{\sigma}_\alpha^{(0)}(k)-i\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}\{[V,\ \overline{\sigma}_\beta(k)]-\\ -i\overline{\sigma}_\gamma(k)\,\overline{N}_{\gamma\beta}(-k)-i\overline{L}_\gamma(\zeta^0)\,\overline{\sigma}_{\gamma\beta}^{(0)}(0;\ k)\}\,e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\left(e^{\tau\overline{\dot{\mathcal{K}}}(-k)}\right)_{\beta\alpha},\end{gathered}\tag{5.4.76}$$

où $V=\mathcal{H}_{\text{int}}-\mu N$,

$$\overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)}(k,\ k')=\int d^3x\,d^3x'e^{-ikx-ik'x'}\overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)}(x,\ x'),$$

$$\overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)}(x,\ x')=\left(\frac{\delta^2\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\overline{\zeta}_\alpha(x)\,\delta\overline{\zeta}_\beta(x')}\right)_0$$

et les grandeurs $\overline{\dot{\mathcal{K}}}$, $\overline{N}$, $\overline{L}$ sont liées aux grandeurs $\dot{\mathcal{K}}$, N, L par les relations suivantes

$$\begin{gathered}\overline{\dot{\mathcal{K}}}(k)=R(k)\dot{\mathcal{K}}(k)\,R^{-1}(k),\qquad \overline{N}(k)=R(k)\,N(k)\,R^{-1}(k),\\ \overline{L}(\zeta^0)=L(\zeta^0)\,R^{-1}(0).\end{gathered}\tag{5.4.77}$$

Il est facile de voir à partir de (5.4.50), (5.4.75) que

$$\begin{gathered}\overline{N}_{\alpha\beta}(k)=i\,\mathrm{Sp}\,\overline{\sigma}_\beta(-k)\,[V,\ \hat{\overline{\zeta}}_\alpha(0)],\quad \overline{L}_\alpha(\zeta^0)=i\,\mathrm{Sp}\,w\,[V,\ \hat{\overline{\zeta}}_\alpha(0)],\\ \hat{\overline{\zeta}}_\alpha(0)=\hat{\overline{\zeta}}_\alpha(x)|_{x=0},\quad \hat{\overline{\zeta}}_\alpha(x)=\int d^3x'R_{\alpha\beta}(x-x')\,\hat{\zeta}_\beta(x').\end{gathered}\tag{5.4.78}$$

La matrice $\dot{\mathcal{H}}_{\beta\alpha}(k)$ et par conséquent la matrice $\mathcal{H}_{\alpha\beta}(k, \tau)$ commute avec la matrice $R_{\alpha\beta}(k)$,

$$R\dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{H}} R, \quad R\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}(\tau) R. \tag{5.4.79}$$

En effet, en vertu de (5.4.78), les composantes de Fourier $\hat{\zeta}_\alpha(k)$ et $\bar{\zeta}_\alpha(k)$ des opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ et $\hat{\bar{\zeta}}_\alpha(x)$ sont liées entre elles par la relation suivante: $\hat{\bar{\zeta}}_\alpha(k) = R_{\alpha\beta}(k)\hat{\zeta}_\beta(k)$. D'un autre côté, en vertu de (5.4.5), pour les opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(k)$ on a la formule $\dot{\hat{\zeta}}_\alpha(k) \equiv i[\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(k)] = \dot{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(k)\hat{\zeta}_\beta(k)$. C'est pourquoi on a

$$\dot{\hat{\bar{\zeta}}}_\alpha(k) \equiv i[\mathcal{H}_0, \hat{\bar{\zeta}}_\alpha(k)] = (R(k)\dot{\mathcal{H}}(k)R^{-1}(k))_{\alpha\beta}\hat{\bar{\zeta}}_\beta(k) = \dot{\bar{\mathcal{H}}}_{\alpha\beta}(k)\hat{\bar{\zeta}}_\beta(k). \tag{5.4.80}$$

Vu l'expression explicite des opérateurs $\hat{\bar{\zeta}}_\alpha(x)$ (voir (5.4.78)):

$$\hat{\bar{f}}_p(x) = \hat{f}_p(x) - \left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} \int d^3y e^{ipy}\left(\hat{\psi}^+\left(x+\frac{y}{2}\right) + \hat{\psi}\left(x-\frac{y}{2}\right)\right),$$

$$\hat{\bar{w}}_p(x) = \hat{w}_p(x) - \left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} \int d^3y e^{iyp}\left(\hat{\psi}\left(x+\frac{y}{2}\right) + \hat{\psi}\left(x-\frac{y}{2}\right)\right), \tag{5.4.81}$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \hat{\psi}(x)$$

on a immédiatement

$$\dot{\hat{\bar{\zeta}}}_\alpha(x) \equiv i[\mathcal{H}_0, \hat{\bar{\zeta}}_\alpha(x)] = \int d^3x' \dot{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(x-x')\hat{\bar{\zeta}}_\beta(x').$$

Comparant cette formule avec (5.4.80), on obtient l'égalité $\dot{\bar{\mathcal{H}}} = \dot{\mathcal{H}}$. Cette relation démontre les formules (5.4.79).

Nous allons transformer maintenant les équations (5.4.56), (5.4.53). Introduisant les fonctions

$$\bar{h}_\alpha(k, \omega) = R_{\alpha\beta}(k)h_\beta(k, \omega), \quad \bar{Q}_\alpha(k, \omega) = R_{\alpha\beta}(k)Q_\beta(k, \omega), \tag{5.4.82}$$

on obtient en vertu de (5.4.56)

$$\{-i\omega - \dot{\mathcal{H}}(k) - \bar{N}(k)\}_{\alpha\beta}\bar{h}_\beta(k, \omega) = \bar{Q}_\alpha(k, \omega). \tag{5.4.83}$$

La grandeur $\bar{Q}_\alpha(k, \omega)$ est, de toute évidence, liée avec $\rho(k, \omega)$ par la relation

$$\bar{Q}_\alpha(k, \omega) = i\,\mathrm{Sp}\,w[\hat{\xi}(-k), \hat{\bar{\zeta}}_\alpha(0)] + i\,\mathrm{Sp}\,\rho(-k, \omega)[V, \hat{\bar{\zeta}}_\alpha(0)], \tag{5.4.84}$$

où l'opérateur $\rho(k, \omega)$ est donné par l'équation intégrale (5.4.53) qui en vertu de (5.4.82), (5.4.75) peut s'écrire comme

$$\rho(k, \omega) = -i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau}\{[V, \rho(k, \omega)] + [\xi(k), w] -$$

$$- \omega\rho(k, \omega) - i\bar{\sigma}_\alpha(k)\bar{Q}_\alpha(-k, \omega)\}e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \tag{5.4.85}$$

Il est facile de voir que la formule (5.4.41) donnant la fonction de Green $\mathcal{G}^{(+)}_{\xi', \xi}(k, \omega)$ est maintenant remplacée par la formule

$$\mathcal{G}^{(+)}_{\xi', \xi}(k, \omega) = \bar{h}_\alpha(k, \omega)\,\mathrm{Sp}\,\bar{\sigma}_\alpha(-k)\hat{\xi}'(0) + \mathrm{Sp}\,\rho(-k, \omega)\hat{\xi}'(0). \tag{5.4.86}$$

Remarquons qu'en vertu de (5.4.51), on a les formules

$$\mathrm{Sp}\,\bar{\sigma}_\alpha(x)\hat{\bar{\zeta}}_\beta(x') = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-x'), \quad \mathrm{Sp}\,\bar{\sigma}_\alpha(x)\hat{\zeta}_\beta^{T}(x') = R^{-1}_{\beta\alpha}(x'-x). \tag{5.4.87}$$

5.4.5. Fonctions de Green dans le cas d'une interaction faible entre les quasi-particules. Dans le paragraphe précédent nous avons établi les équations intégrales pour les opérateurs $\bar{\sigma}_\alpha(k)$ et $\rho(k, \omega)$. Connaissant ces équations, on peut en principe trouver les fonctions de Green $\mathcal{G}^{(+)}_{\ldots}(k, \omega)$. On peut résoudre ces équations par la méthode de la théorie des perturbations dans le cas où l'interaction entre les particules est faible. Cependant une telle théorie est dénuée de sens physique pour des systèmes de Bose dégénérés, car son approximation zéro correspond à un gaz parfait de particules et non de quasi-particules. Le cas de l'interaction faible entre les quasi-particules et non entre les particules est particulièrement intéressant. C'est pourquoi on doit transformer les équations intégrales (5.4.76), (5.4.85) de sorte à élaborer une théorie simple des perturbations basée sur l'hypothèse que l'interaction entre les quasi-particules est faible.

La forme du hamiltonien (3.2.4) et le spectre des quasi-particules (3.2.19) montrent qu'il y a lieu de considérer que $\nu(k)$ est le paramètre petit de la théorie des perturbations. La densité des particules du condensat doit être inversement proportionnelle à $\nu(k)$, $n_0 \sim \nu^{-1}(k)$ (le potentiel chimique μ est déterminé par la grandeur n_0). Ainsi il s'agit d'élaborer une théorie des perturbations dans laquelle la grandeur $n_0\nu(k)$ n'est pas petite malgré que $\nu(k)$ le soit. A cet effet, au lieu des opérateurs $\bar{\sigma}_\alpha(k)$ on introduit les opérateurs $\sigma'_\alpha(k)$

$$\sigma'_\alpha(k) = U_0 \bar{\sigma}_\alpha(k) U_0^+. \tag{5.4.88}$$

En vertu de (5.4.76) ces opérateurs satisfont à l'équation

$$\sigma'_\alpha(k) = \sigma^{(0)\prime}_\alpha(k) - i \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \{[V', \sigma'_\beta(k)] -$$

$$- i\sigma'_\gamma(k) \bar{N}_{\gamma\beta}(-k) - i\bar{L}_\gamma(\zeta^0)\sigma^{(0)\prime}_{\gamma\beta}(0, k)\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} (e^{\tau\mathcal{K}(-k)})_{\beta\alpha}, \tag{5.4.89}$$

où $\sigma^{(0)\prime}_\alpha(k)$ sont les composantes de Fourier des opérateurs $\sigma^{(0)\prime}_\alpha(x)$,

$$\sigma^{(0)\prime}_\psi(x) = \sigma^{(0)\prime}_{\psi^*}(x)^+ = [\hat{\psi}^+(x), \rho^{(0)}(g, \varphi)],$$

$$\sigma^{(0)\prime}_{\varphi_p}(x) = \sigma^{(0)\prime}_{\varphi^*_p}(x)^+ = \left(\frac{\delta\rho^{(0)}(g, \varphi)}{\delta\varphi_p(x)}\right)_0, \quad \sigma^{(0)\prime}_{g_p}(x) = \left(\frac{\delta\rho^{(0)}(g, \varphi)}{\delta g_p(x)}\right)_0,$$

$$\sigma^{(0)\prime}_{\alpha\beta}(k, k') = U_0 \bar{\sigma}^{(0)}_{\alpha\beta}(k, k') U_0^+. \tag{5.4.90}$$

et $V' = U_0 V U_0^+$. Si pour $\mathcal{H}_{\text{int}}$ on prend le hamiltonien de l'interaction binaire introduit dans 3.2.2, on peut décomposer V' en deux termes $V' = V'_2(n_0) + V'_{\text{eff}}(n_0)$, où

$$V'_2(n_0) = \frac{n_0}{2\mathcal{V}} \sum_{1 \neq 0} \nu(1)(a_1^+ a_1 + a_1^+ a_{-1}^+) + \text{c.h.} + \frac{n_0^2}{2\mathcal{V}} \nu(0),$$

$$V'_{\text{eff}}(n_0) = -\left(\mu - \frac{n_0}{\mathcal{V}}\nu(0)\right) \sum_{1 \neq 0} a_1^+ a_1 + n_0^{1/2} V_3 + V_4 \tag{5.4.91}$$

et V_3, V_4 sont donnés par les formules (3.2.4) (à la limite $\mathcal{V} \to \infty$ on peut négliger la mode $1 \equiv p_1 = 0$, car pour l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(g, \varphi)$ on a la relation $\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(g, \varphi) a_0 = 0$).

Vu la décomposition de V' en deux termes, on peut également écrire la grandeur $\overline{N}_{\alpha\beta}(k)=i\,\mathrm{Sp}\,\overline{\sigma}_\beta(-k)\,[V,\ \hat{\overline{\zeta}}_\alpha(0)]\equiv i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(-k)\,[V',\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)]$ sous la forme de deux termes

$$\overline{N}_{\alpha\beta}(k)=N^0_{\alpha\beta}(k)+N'_{\alpha\beta}(k),$$
$$N^0_{\alpha\beta}(k)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(-k)\,[V'_2(n_0),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)], \tag{5.4.92}$$
$$N'_{\alpha\beta}(k)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(-k)\,[V'_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)],$$

où $\hat{\zeta}'_\alpha(x)=U_0\hat{\overline{\zeta}}_\alpha(x)\,U_0^+$. En vertu des formules (5.4.81) l'opérateur $\hat{\zeta}'_\alpha$ diffère de l'opérateur $\hat{\zeta}_\alpha$ d'un certain c-nombre. Comme $[V'_2(n_0),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)]$ est une certaine forme quadratique par rapport aux opérateurs a, a^+ pouvant toujours s'exprimer en fonction des opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$, on a en vertu de (5.4.87) $\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(-k)\,[V'_2,\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)]=\mathrm{Sp}\,\sigma^{(0)\prime}_\beta(-k)\,[V'_2,\ \hat{\zeta}_\alpha(0)]$. C'est pourquoi les formules (5.4.92) peuvent s'écrire comme

$$N^0_{\alpha\beta}(k)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma^{(0)\prime}_\beta(-k)\,[V'_2(n_0),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)],$$
$$N'_{\alpha\beta}(k)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(-k)\,[V'_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)]. \tag{5.4.93}$$

Il y a lieu de transformer l'équation (5.4.89) de telle sorte que dans l'exponentielle $\exp\mp i\mathscr{H}_0\tau$ au lieu du hamiltonien des particules libres $\mathscr{H}_0$ on ait le hamiltonien des quasi-particules $\mathscr{H}_q(n_0)=\mathscr{H}_0+V'_2(n_0)$. A cet effet, tout comme dans le paragraphe 5.2.1, on doit utiliser une formule du type (5.1.18"). A savoir, si

$$\hat{B}_\alpha=\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}e^{i\hat{H}\tau}\hat{A}_\beta e^{-i\hat{H}\tau}(e^{\tau M})_{\beta\alpha}$$

ou plus simplement

$$\hat{B}=\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}e^{i\hat{H}\tau}\hat{A}e^{-i\hat{H}\tau}e^{\tau M}, \tag{5.4.94}$$

où $\hat{A}_\alpha$ est un certain ensemble d'opérateurs agissant dans l'espace hilbertien des vecteurs d'état et M une matrice c-numérique agissant sur l'indice α, l'ensemble des opérateurs $\hat{B}_\alpha$ satisfait aux équations intégrales

$$\hat{B}=\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}e^{i\hat{H}_0\tau}\{\hat{A}-i\,[\hat{W},\ \hat{B}]-\hat{B}m\}\,e^{-iH_0\tau}e^{\tau M_0}, \tag{5.4.95}$$

où $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{W}$, $M=M_0+m$, la décomposition de $\hat{H}$ en $\hat{H}_0$ et $\hat{W}$ et de M en M_0 et m étant arbitraire. Cette formule peut être démontrée d'une manière analogue à (5.1.18") et nous ne donnerons pas ici cette démonstration.

En posant dans (5.4.94) $\hat{B}=i\,(\sigma'-\sigma^{(0)\prime})$, $\hat{H}=\mathscr{H}_0$, $M=\dot{\mathscr{K}}(-k)$, $\hat{W}=-V'_2(n_0)$, $m=-N^0(-k)$, $\hat{A}$ étant l'opérateur entre accolades dans l'ex-

pression de σ', on obtient au lieu de (5.4.95), (5.4.89) la relation

$$i\,(\sigma'_{\alpha}(k)-\sigma^{(0)\prime}_{\alpha}(k))=\int\limits_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau H_q}\{[V'_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \sigma'_{\beta}(k)]-$$

$$-i\sigma'_{\gamma}(k)\,N'_{\gamma\beta}(-k)+[V'_2(n_0),\ \sigma^{(0)\prime}_{\beta}(k)]-i\sigma^{(0)\prime}_{\gamma}(k)\,N^0_{\gamma\beta}(-k)-$$

$$-i\overline{L}_{\gamma}(\zeta^0)\,\sigma^{(0)\prime}_{\gamma\beta}(0,\ k)\}\,(e^{\tau(\dot{\mathscr{K}}(-k)+N^0(-k))})_{\beta\alpha}\cdot e^{-i\tau\mathscr{H}_q}, \qquad (5.4.96)$$

où $\mathscr{H}_q=\mathscr{H}_0+V'_2(n_0)$ est le hamiltonien des quasi-particules libres (voir 3.2.11).

Remarquons maintenant que l'équation (5.4.47), où $\mathscr{L}^{(0)}_{\alpha}(x;\ \zeta)=$ $=i\mathrm{Sp}\rho^{(0)}(\zeta)\,[\mathscr{H}_0,\ \hat{\zeta}_{\alpha}(x)]$, est vraie indépendamment de la structure concrète de l'opérateur $\mathscr{H}_0$, il suffit que cet opérateur $\mathscr{H}_0$ soit une forme quadratique par rapport aux opérateurs a, a^+ (l'opérateur $[\mathscr{H}_0,\ \hat{\zeta}_{\alpha}(x)]$ s'exprime alors linéairement en fonction des opérateurs $\hat{\zeta}_{\alpha}(x)$). Entendant dans (5.4.47) par $\mathscr{H}_0$ l'opérateur V'_2, on peut alors écrire la relation

$$[V'_2(n_0),\ \rho^{(0)}(\zeta)]=i\int d^3x\,\frac{\delta\rho^{(0)}(\zeta)}{\delta\zeta_{\alpha}(x)}\,i\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\zeta)\,[V'_2(n_0),\ \hat{\zeta}_{\alpha}(x)].$$

En faisant varier cette relation par rapport à $\zeta_{\alpha}(x)$ et en remplaçant les grandeurs $\zeta_{\alpha}(x)$ par leurs valeurs d'équilibre, on obtient en vertu de (5.4.90)

$$[V'_2(n_0),\ \sigma^{(0)\prime}_{\beta}(k)]=i\sigma^{(0)\prime}_{\gamma}(k)\,N^0_{\gamma\beta}(-k)-\sigma^{(0)\prime}_{\gamma\beta}(0;\ k)\cdot\mathrm{Sp}\,w(n_0)\,[V'_2,\ \hat{\zeta}_{\gamma}(0)].$$

C'est pourquoi l'équation (5.4.96) s'écrit

$$\sigma'_{\alpha}(k)=\sigma^{(0)\prime}_{\alpha}(k)-i\int\limits_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\mathscr{H}_q}\{[V'_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \sigma'_{\beta}(k)]-$$

$$-i\sigma'_{\gamma}(k)\,N'_{\gamma\beta}(-k)-iL'_{\gamma}(\zeta^0)\,\sigma^{(0)\prime}_{\gamma\beta}(0,\ k)\}\,(e^{\tau\dot{\mathscr{K}}'(-k)})_{\beta\alpha}\,e^{-i\tau\mathscr{H}_q}, \qquad (5.4.97)$$

$$\dot{\mathscr{K}}'(k)=\dot{\mathscr{K}}(k)+N^0(k),\quad L'_{\alpha}(\zeta^0)=i\,\mathrm{Sp}\,w(n_0)\,[V'_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \hat{\zeta}_{\alpha}(0)].$$

Dans cette équation le hamiltonien des quasi-particules $\mathscr{H}_q$ n'est pas diagonal par rapport aux opérateurs a, a^+, et la matrice $\dot{\mathscr{K}}'(-k)$ « combine » les composantes $\alpha=\psi,\ g,\ \varphi$. Pour écrire l'équation (5.4.97) sous une forme dans laquelle le hamiltonien des quasi-particules est diagonal par rapport aux opérateurs a, a^+, et la matrice $\dot{\mathscr{K}}'$ ne « combine » pas les composantes de σ'_{α} ($\alpha=$ $=\psi,\ g,\ \varphi$), introduisons au lieu de $\sigma'_{\alpha}(k)$ les opérateurs $\tilde{\sigma}_{\alpha}(k)$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha}(k)=U\sigma'_{\beta}(k)\,U^+\Lambda_{\beta\alpha}(-k), \qquad (5.4.98)$$

où U est l'opérateur unitaire introduit dans le paragraphe 3.2.2, qui diagonalise le hamiltonien des quasi-particules (voir les formules (3.2.12), (3.2.13)) et $\Lambda_{\alpha\beta}(k)$ une matrice déterminée par la relation

$$\Lambda^{-1}_{\alpha\beta}(k)=\mathrm{Sp}\,U\sigma'_{\beta}(-k)\,U^+\hat{\zeta}_{\alpha}(0),$$

ou, ce qui est équivalent, par la relation

$$\mathrm{Sp}\,\tilde{\sigma}_{\alpha}(k)\,\hat{\zeta}_{\beta}(0)=\delta_{\alpha\beta}. \qquad (5.4.99)$$

Les opérateurs $\widetilde{\sigma}_\alpha(k)$ satisferont alors, en vertu de (5.4.97), aux équations suivantes

$$\widetilde{\sigma}_\alpha(k)=\widetilde{\sigma}^{(0)}_\alpha(k)-i\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}e^{i\tau\widetilde{\mathscr{H}}_q}\{[\widetilde{V}_{\rm eff}(n_0),\ \widetilde{\sigma}_\beta(k)]-$$

$$-i\widetilde{\sigma}_\gamma(k)\widetilde{N}_{\gamma\beta}(-k)-i\widetilde{L}_\gamma(\zeta^0)\widetilde{\sigma}^{(0)}_{\gamma\beta}(0,\ k)\}(e^{\tau\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}(-k)})_{\beta\alpha}e^{-i\tau\widetilde{\mathscr{H}}_q},\quad(5.4.100)$$

où $\widetilde{V}_{\rm eff}(n_0)=UV'_{\rm eff}(n_0)U^+$ et

$$\widetilde{\sigma}^{(0)}_\alpha(k)=U\sigma^{(0)\prime}_\beta(k)U^+\Lambda_{\beta\alpha}(-k),\qquad\widetilde{L}(\zeta^0)=\Lambda^{-1}(0)L'(\zeta^0),$$

$$\widetilde{N}(k)=\Lambda^{-1}(k)N'(k)\Lambda(k),\qquad\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}(k)=\Lambda^{-1}(k)\dot{\mathscr{K}}'(k)\Lambda(k),\qquad(5.4.101)$$

$$\widetilde{\sigma}^{(0)}_{\alpha\beta}(k,\ k')=\sigma^{(0)\prime}_{\alpha'\beta'}(k,\ k')\Lambda_{\alpha'\alpha}(-k)\Lambda_{\beta'\beta}(-k')$$

et $\widetilde{\mathscr{H}}_q=U\mathscr{H}_qU^+=\sum_1\omega_1a_1^+a_1+E_0$ est le hamiltonien des quasi-particules libres, diagonal par rapport aux opérateurs a, a^+ (voir (3.2.12)).

Il est facile de voir que la matrice $\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}(k)$ ne « combine » pas les composantes g_p, φ_p, ψ. En effet la matrice $\dot{\mathscr{K}}'(k)$, en vertu de (5.4.97), (5.4.93), peut s'écrire comme *)

$$\dot{\mathscr{K}}'_{\alpha\beta}(k)=i\,{\rm Sp}\,\sigma'_\beta(-k)[\mathscr{H}_q,\ \hat{\zeta}_\alpha(0)]=$$

$$=i\,{\rm Sp}\,U\sigma'_\beta(-k)U^+[\widetilde{\mathscr{H}}_q,\ U\hat{\zeta}_\alpha(0)U^+].\quad(5.4.102)$$

Remarquons maintenant que l'opérateur $U\hat{\zeta}_\alpha(k)U^+$ est quadratique par rapport aux opérateurs a, a^+ et, par conséquent, peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des opérateurs $\hat{\zeta}_\beta(k)$, $U\hat{\zeta}_\alpha(k)U^+=\Lambda'_{\alpha\beta}(k)\hat{\zeta}_\beta(k)+$ $+c_\alpha$ (c_α étant des c-nombres). En vertu de (5.4.87)

$${\rm Sp}\,\sigma'_\beta(-k)\hat{\zeta}_\alpha(k')=(2\pi)^3\delta_{\alpha\beta}\delta(k-k'),\ {\rm Sp}\,\sigma'_\beta(-k)=0,$$

c'est pourquoi en utilisant la définition (5.4.99) des grandeurs $\Lambda_{\alpha\beta}(k)$ on a $\Lambda'_{\alpha\beta}(k)=\Lambda_{\alpha\beta}(k)$. Il en résulte

$$i[\widetilde{\mathscr{H}}_q,\ U\hat{\zeta}_\alpha(k)U^+]=(\Lambda(k)\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}'(k)\Lambda^{-1}(k))_{\alpha\beta}\{U\hat{\zeta}_\beta(k)U^+-c_\beta\},$$

où $\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}'(k)$ est donné par la formule

$$i[\widetilde{\mathscr{H}}_q,\ \hat{\zeta}_\alpha(k)]=\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}'_{\alpha\beta}(k)\hat{\zeta}_\beta(k).\qquad(5.4.103)$$

Comme $\widetilde{\mathscr{H}}_q=\sum_1\omega_1a_1^+a_1+E_0$, la matrice $\widetilde{\dot{\mathscr{K}}}'(k)$ ne « combine » pas les composantes g_p, φ_p, ψ. En substituant l'expression de $i[\widetilde{\mathscr{H}}_q,\ U\hat{\zeta}_\alpha(k)U^+]$

*) Dans cette formule et dans les suivantes on entend par $\hat{\zeta}(0)$ $\hat{\zeta}(x)|_{x=0}$.

dans (5.4.102) et en remarquant de nouveau que $\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(\boldsymbol{k})=0$, $\mathrm{Sp}\,\sigma'_\beta(-\boldsymbol{k})\times$ $\times\hat{\zeta}_\alpha(\boldsymbol{k}')=(2\pi)^3\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$, on obtient $\dot{\mathcal{K}}'(\boldsymbol{k})=\Lambda(\boldsymbol{k})\dot{\tilde{\mathcal{K}}}'(\boldsymbol{k})\Lambda^{-1}(\boldsymbol{k})$. En comparant cette formule avec (5.4.101), on voit que $\dot{\tilde{\mathcal{K}}}'(\boldsymbol{k})=\dot{\tilde{\mathcal{K}}}(\boldsymbol{k})$ et par conséquent la matrice $\dot{\tilde{\mathcal{K}}}(\boldsymbol{k})$ ne « combine » pas les composantes g_p, φ_p, ψ comme affirmé ci-dessus.

A partir de la relation $U\hat{\zeta}_\alpha(\boldsymbol{k})U^+=\Lambda_{\alpha\beta}\hat{\zeta}_\beta(\boldsymbol{k})+c_\alpha$ et de (5.4.101), on voit également que

$$\tilde{L}_\alpha(\zeta^0)=i\,\mathrm{Sp}\,\tilde{w}(n_0)[\tilde{V}_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \tilde{\hat{\zeta}}_\alpha(0)],\qquad \tilde{w}(n_0)=Uw(n_0)U^+,$$
$$\tilde{N}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})=i\,\mathrm{Sp}\,\tilde{\sigma}_\beta(-\boldsymbol{k})[\tilde{V}_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)]. \qquad (5.4.104)$$

Nous avons obtenu une équation intégrale pour les opérateurs $\tilde{\sigma}_\alpha(\boldsymbol{k})$. Pour trouver la fonction de Green $\mathcal{G}^{(+)}_{\xi\xi}(\boldsymbol{k},\omega)$ il faut connaître encore l'opérateur $\rho(\boldsymbol{k},\omega)$ ou l'opérateur $\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)$, lié avec ce dernier:

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)=UU_0\rho(\boldsymbol{k},\omega)U_0^+U^+.$$

Il est facile de voir à partir de (5.4.85) et de la relation (5.4.95) avec $M=M_0=$ $=0$ que l'opérateur $\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)$ satisfait à l'équation intégrale

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)=-i\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{\eta\tau}e^{i\tilde{\mathcal{H}}_q\tau}\{[\tilde{V}_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)]-$$
$$-\omega\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)+[\tilde{\xi}(\boldsymbol{k},n_0),\ \tilde{w}(n_0)]-i\tilde{\sigma}_\alpha(\boldsymbol{k})\tilde{Q}_\alpha(-\boldsymbol{k},\omega)\}e^{-i\tilde{\mathcal{H}}_q\tau}, \qquad (5.4.105)$$

où $\tilde{\xi}(\boldsymbol{k};n_0)=UU_0\xi(\boldsymbol{k})U_0^+U^+$, la grandeur $\tilde{Q}_\alpha(\boldsymbol{k},\omega)$ étant donnée par la formule suivante

$$\tilde{Q}_\alpha(\boldsymbol{k},\omega)=\Lambda^{-1}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\bar{Q}_\beta(\boldsymbol{k},\omega)=i\,\mathrm{Sp}\,\tilde{w}(n_0)[\tilde{\xi}(-\boldsymbol{k},n_0),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)]+$$
$$+i\,\mathrm{Sp}\,\tilde{\rho}(-\boldsymbol{k},\omega)[\tilde{V}_{\mathrm{eff}}(n_0),\ \hat{\zeta}_\alpha(0)] \qquad (5.4.106)$$

et $\tilde{w}(n_0)=UU_0wU_0^+U^+$. Les composantes de Fourier des fonctions de Green $\mathcal{G}^{(+)}_{\xi\xi}(\boldsymbol{k},\omega)$ sont égales en vertu de (5.4.86) à

$$\mathcal{G}^{(+)}_{\xi\xi}(\boldsymbol{k},\omega)=\tilde{h}_\alpha(\boldsymbol{k},\omega)\,\mathrm{Sp}\,\tilde{\sigma}_\alpha(-\boldsymbol{k})\tilde{\xi}'(0;\ n_0)+\mathrm{Sp}\,\tilde{\rho}(-\boldsymbol{k},\omega)\tilde{\xi}'(0,\ n_0),$$
$$\tilde{\xi}'(\boldsymbol{x};\ n_0)=UU_0\xi'(\boldsymbol{x})U_0^+U^+,\qquad \tilde{h}(\boldsymbol{k},\omega)=\Lambda^{-1}(\boldsymbol{k})\bar{h}(\boldsymbol{k},\omega). \qquad (5.4.107)$$

Vu (5.4.83), (5.4.101), les fonctions $\tilde{h}=\Lambda^{-1}\bar{h}$ satisfont aux équations

$$\{-i\omega-\dot{\tilde{\mathcal{K}}}(\boldsymbol{k})-\tilde{N}(\boldsymbol{k})\}_{\alpha\beta}\tilde{h}_\beta(\boldsymbol{k},\omega)=\tilde{Q}_\alpha(\boldsymbol{k},\omega). \qquad (5.4.108)$$

Les équations (5.4.100), (5.4.105), (5.4.108) permettent d'utiliser la théorie des perturbations pour trouver $\tilde{\sigma}_\alpha(\boldsymbol{k})$, $\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\omega)$, $\tilde{h}(\boldsymbol{k},\omega)$ dans le cas où l'interaction entre les quasi-particules $\tilde{V}_{\mathrm{eff}}$ est faible (c'est-à-dire que $\nu(\boldsymbol{k})$ est petit), mais la grandeur $n_0\nu(\boldsymbol{k})$ n'est pas petite. On peut ainsi, en vertu de (5.4.107), trouver également la fonction de Green $\mathcal{G}^{(+)}_{\xi\xi}(\boldsymbol{k},\omega)$ en approximation cinétique pour un gaz de quasi-particules.

Jusqu'à présent, nous avons envisagé le cas où l'interaction entre les quasi-particules était faible vu la petitesse de la grandeur $\nu(\boldsymbol{k})$. Considérons maintenant le cas où l'interaction entre les quasi-particules est également petite, ce qui

est due cette fois non pas à la petitesse de $\nu(k)$, mais à la petitesse du rayon d'action des forces r_0 par rapport à la longueur moyenne d'onde de de Broglie des quasi-particules λ, et par rapport à la distance moyenne entre les particules du condensat $(\mathcal{V}/n_0)^{1/3}$, $r_0 \ll \lambda$, $(\mathcal{V}/n_0)^{1/3}$. On peut utiliser une méthode analogue à celle du paragraphe 5.2.3 pour le développement quantique du viriel pour les équations cinétiques des systèmes normaux.

Revenons à l'équation (5.4.76). En utilisant la formule (5.4.94), on obtient en vertu de (5.4.95)

$$\bar{\sigma}_\alpha(k) = \dot{\bar{\sigma}}_\alpha^{(0)}(k) - i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau}\{[V, \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(k)] - \\ - i\bar{\sigma}_\gamma^{(0)}(k)\bar{N}_{\gamma\beta}(-k) - i\bar{L}_\gamma(\zeta^0)\bar{\sigma}_{\gamma\beta}^{(0)}(0;\, k)\}\,(e^{\tau(\dot{\mathcal{H}}(-k)+\bar{N}(-k))})_{\beta\alpha}\, e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau}, \tag{5.4.109}$$

où $\bar{\mathcal{H}}$ est le hamiltonien total du système. Puis nous allons tenir compte de ce que

$$[\mathcal{H}_0, \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(k)] = i\bar{\sigma}_\beta^{(0)}(k)\dot{\mathcal{H}}_{\beta\alpha}(-k) - i\bar{L}_\beta(\zeta^0)\bar{\sigma}_{\beta\alpha}^{(0)}(0,\, k)$$

(voir (5.4.49) et (5.4.74), (5.4.78)). En utilisant cette égalité, on peut écrire (5.4.109) sous la forme

$$\bar{\sigma}_\alpha(k) = \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(k) - \int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau}\bar{\sigma}_\beta^{(0)}(k)\, e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau}(e^{\tau(\dot{\mathcal{H}}(-k)+\bar{N}(-k))})_{\beta\alpha},$$

d'où en intégrant par parties, on obtient

$$\bar{\sigma}(k) = \eta\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau}\bar{\sigma}^{(0)}(k)\, e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} e^{\tau(\dot{\mathcal{H}}(-k)+\bar{N}(-k))}. \tag{5.4.110}$$

Cette équation permet de trouver $\bar{\sigma}_\alpha(k)$ si l'on connaît $\bar{N}(k)$. Pour trouver $\bar{N}_{\alpha\beta}(k)$, on utilise la formule (5.4.78) à partir de laquelle on a conformément à (5.4.110)

$$\bar{N}_{\alpha\beta}(k) = i\eta\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}\,\mathrm{Sp}\,\bar{\sigma}_\gamma^{(0)}(-k)\, e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau}[V, \hat{\zeta}_\alpha(0)]\, e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau}(e^{\tau(\dot{\mathcal{H}}(k)+\bar{N}(k))})_{\gamma\beta}. \tag{5.4.111}$$

Cette équation contient une seule grandeur inconnue $\bar{N}(k)$ et peut être résolue par la méthode de la théorie des perturbations si la densité des particules du condensat est petite (le rayon d'action des forces doit alors être petit, non seulement par rapport à la distance moyenne entre les particules du condensat, mais également par rapport à la longueur d'onde de de Broglie des quasi-particules). Au paragraphe suivant, nous allons revenir à la résolution de cette équation, ici nous allons obtenir l'équation pour $\rho(k, \omega)$, $\bar{Q}_\alpha(k, \omega)$.

En utilisant les formules (5.4.94), (5.4.95), avec $M = M_0 = 0$, il est facile d'écrire l'équation (5.4.85) pour $\rho(k, \omega)$ sous la forme

$$\rho(k, \omega) = -i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau}\{[\hat{\xi}(k), w] - \omega\rho(k, \omega) - i\bar{\sigma}_\alpha(k)\bar{Q}_\alpha(-k, \omega)\}\, e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau}, \tag{5.4.112}$$

où la grandeur $\overline{Q}_\alpha$ $(\boldsymbol{k}, \omega)$ est liée à ρ $(\boldsymbol{k}, \omega)$ par la relation (5.4.84). Cette équation permet d'utiliser la théorie des perturbations pour trouver $\overline{Q}_\alpha$ $(\boldsymbol{k}, \omega)$ et ρ $(\boldsymbol{k}, \omega)$ dans le cas où le rayon d'action des forces entre les particules est petit.

Connaissant les grandeurs $\overline{N}$ et $\overline{Q}$ on peut trouver à son tour la grandeur h (voir (5.4.83)) et par là même la fonction de Green $\mathcal{G}^{(+)}_{\xi'\xi}(\boldsymbol{k}, \omega)$.

5.4.6. Fonctions de Green à une particule des systèmes de Bose dégénérés en approximation cinétique. Nous allons maintenant passer à la recherche des fonctions de Green à une particule des systèmes de Bose dégénérés $\mathcal{G}^{(+)}_{\psi^+\psi}(\boldsymbol{k}, \omega)$. $\mathcal{G}^{(+)}_{\psi\psi}(\boldsymbol{k}, \omega)$ en approximation cinétique. Ces fonctions sont données par les formules

$$\mathcal{G}^{(+)}_{\psi^+\psi}(\boldsymbol{x}, t) = -i\theta(t) \left\langle [e^{i\mathcal{H}t}\hat{\psi}^+(\boldsymbol{x})\, e^{-i\mathcal{H}t}, \hat{\psi}(0)] \right\rangle,$$
$$\mathcal{G}^{(+)}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}, t) = -i\theta(t) \left\langle [e^{i\mathcal{H}t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\, e^{-i\mathcal{H}t}, \hat{\psi}(0)] \right\rangle. \tag{5.4.113}$$

Tout comme dans le paragraphe précédent, nous allons supposer que l'interaction entre les particules est faible. Cette interaction est décrite par le hamiltonien V_{eff} contenant en vertu de (5.4.91) des termes proportionnels à $n_0^{1/2}\nu(\boldsymbol{k})$ et à $\nu(\boldsymbol{k})$. Comme nous l'avons déjà remarqué, la grandeur n_0 est supposée être inversement proportionnelle à $\nu(\boldsymbol{k})$; c'est pourquoi les termes proportionnels à $n_0^{1/2}\nu(\boldsymbol{k})$ (ces termes forment le hamiltonien V_3) contiennent en fait $\nu(\boldsymbol{k})^{1/2}$. Ainsi, nous avons dans notre problème un paramètre petit proportionnel à $\nu(\boldsymbol{k})^{1/2}$ que nous désignerons par λ. Le hamiltonien V_3 sera alors proportionnel à λ, et le hamiltonien V_4 proportionnel à λ^2 (voir (3.2.4)).

Nous allons montrer que les fonctions de Green (5.4.113) peuvent s'exprimer par deux fonctions $\widetilde{h}_\psi(\boldsymbol{k}, \omega)$, $\widetilde{h}_{\psi^*}(\boldsymbol{k}, \omega)$ déjà introduites, soit :

$$\mathcal{G}^{(+)}_{\psi^+\psi}(\boldsymbol{k}, \omega) = \operatorname{sh}\varphi_k \widetilde{h}_\psi(\boldsymbol{k}, \omega) + \operatorname{ch}\varphi_k \widetilde{h}_{\psi^*}(\boldsymbol{k}, \omega),$$
$$\mathcal{G}^{(+)}_{\psi\psi}(\boldsymbol{k}, \omega) = \operatorname{ch}\varphi_k \widetilde{h}_\psi(\boldsymbol{k}, \omega) + \operatorname{sh}\varphi_k \widetilde{h}_{\psi^*}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{5.4.114}$$

où φ_k sont des grandeurs qui déterminent une transformation unitaire (voir (3.2.13), (3.2.14)). Remarquons à cet effet, qu'en vertu de (5.4.54), (5.4.99) $\operatorname{Sp}\widetilde{\rho}(\boldsymbol{k}, \omega)\hat{\psi} = 0$, $\operatorname{Sp}\widetilde{\sigma}_\alpha(\boldsymbol{k})\,\hat{\zeta}_\beta(0) = \delta_{\alpha\beta}$. Puis, compte tenu de (5.4.107) et vu (3.2.12), on obtient les formules (5.4.114).

Les fonctions $\widetilde{h}_\psi$, $\widetilde{h}_{\psi^*}$ sont données par les équations (5.4.108) et peuvent être trouvées dans le cadre de la théorie des perturbations suivant le paramètre λ. En approximation zéro par rapport à λ les grandeurs $\widetilde{N}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)$ figurant dans (5.4.108) sont nulles $\widetilde{N}^{(0)}_{\alpha\beta} = 0$. C'est pourquoi les équations (5.4.108) pour $\widetilde{h}_\psi$ et $\widetilde{h}_{\psi^*}$ en approximation zéro peuvent s'écrire comme

$$-i(\omega - \omega_k)\widetilde{h}_\psi(\boldsymbol{k}, \omega) = \widetilde{Q}_\psi(\boldsymbol{k}, \omega), \qquad -i(\omega + \omega_k)\widetilde{h}_{\psi^*}(\boldsymbol{k}, \omega) = \widetilde{Q}_{\psi^*}(\boldsymbol{k}, \omega)$$

(on a tenu compte de ce que $\dot{\widetilde{\mathcal{H}}}_{\psi\psi}(\boldsymbol{k}) = -i\omega_k$, $\dot{\widetilde{\mathcal{H}}}_{\psi^*\psi^*}(\boldsymbol{k}) = i\omega_k$ en vertu de (5.4.104)).

Remarquant que $\mathrm{Sp}\,\widetilde{w}\,(n_0)\hat{\psi} = 0$, il est facile de voir que conformément aux formules (5.4.106), (5.4.54) les sources $\widetilde{Q}_\alpha\,(k, \omega)$ pour $\xi = \hat{\psi}$ sont données par les formules suivantes:

$$\widetilde{Q}_\psi\,(k, \omega) = i\,\mathrm{Sp}\,\widetilde{\rho}\,(-k, \omega)\,[\widetilde{V}_4, \hat{\psi}\,(0)] - i\,\mathrm{sh}\,\varphi_k,$$

$$\widetilde{Q}_{\psi^*}\,(k, \omega) = i\,\mathrm{Sp}\,\widetilde{\rho}\,(-k, \omega)\,[\widetilde{V}_4, \hat{\psi}^+\,(0)] + i\,\mathrm{ch}\,\varphi_k,$$

$$\widetilde{Q}_{g_p}\,(k, \omega) = i\,\mathrm{Sp}\,\widetilde{\rho}\,(-k, \omega)\,[n_0^{1/2}\widetilde{V}_3 + \widetilde{V}_4, \hat{f}_p\,(0)],$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi_p}\,(k, \omega) = i\,\mathrm{Sp}\,\widetilde{\rho}\,(-k, \omega)\,[n_0^{1/2}\widetilde{V}_3 + \widetilde{V}_4, \hat{w}_p\,(0)]$$

et par conséquent, en approximation zéro par rapport à λ, seuls diffèrent de zéro les termes $\widetilde{Q}_\psi^{(0)}\,(k, \omega) = -i\,\mathrm{sh}\,\varphi_k$ et $\widetilde{Q}_{\psi^*}^{(0)}\,(k, \omega) = i\,\mathrm{ch}\,\varphi_k$. C'est pourquoi les fonctions de Green $\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}$, $\mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}$ en approximation zéro par rapport à λ sont égales à

$$\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}\,(k, \omega) = \frac{-\omega + \varepsilon_k + \mathcal{V}^{-1} n_0 \nu\,(k)}{\omega^2 - \omega_k^2}, \qquad \mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}\,(k, \omega) = -\frac{\mathcal{V}^{-1} n_0 \nu\,(k)}{\omega^2 - \omega_k^2}. \tag{5.4.115}$$

Les pôles de ces fonctions donnent le spectre des quasi-particules dans un gaz de bosons dégénéré.

Nous allons maintenant montrer comment on peut trouver les fonctions de Green $\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}$, $\mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}$ compte tenu des termes de l'ordre de λ et de λ^2. Remarquons à cet effet que les grandeurs $\widetilde{N}_{\psi\psi}$, $\widetilde{N}_{\psi\psi^*}$ en première approximation par rapport à λ sont nulles, $\widetilde{N}_{\psi\psi}^{(1)} = \widetilde{N}_{\psi\psi^*}^{(1)} = 0$. En effet, en utilisant les formules (5.4.101), on a

$$\widetilde{N}_{\psi\psi}^{(1)}\,(k) = i\,\mathrm{Sp}\,\widetilde{\sigma}_\psi^{(0)}\,(-k)\,[n_0^{1/2}\widetilde{V}_3 - \mu^{(1)}\hat{\widetilde{N}}, \hat{\psi}\,(0)],$$

$$\widetilde{N}_{\psi\psi^*}^{(1)}\,(k) = i\,\mathrm{Sp}\,\widetilde{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}\,(-k)\,[n_0^{1/2}\widetilde{V}_3 - \mu^{(1)}\hat{\widetilde{N}}, \hat{\psi}\,(0)],$$

où $\hat{\widetilde{N}} = U \sum\limits_{1 \neq 0} a_1^+ a_1 U^+$ et $\mu^{(1)}$ est un terme correctif du premier ordre par rapport à λ au potentiel chimique (comme nous l'avons déjà noté, on prend ici pour variable indépendante n_0 et non μ). Il est facile de voir qu'en vertu de (5.4.101) les termes contenant V_3 n'ont pas d'influence sur $\widetilde{N}^{(1)}$. C'est pourquoi à partir de (5.4.99) on a

$$\widetilde{N}_{\psi\psi}^{(1)}\,(k) = i\mu^{(1)}\,(\mathrm{ch}^2\,\varphi_k + \mathrm{sh}^2\,\varphi_k), \quad N_{\psi\psi^*}^{(1)}\,(k) = 2i\mu^{(1)}\,\mathrm{ch}\,\varphi_k\,\mathrm{sh}\,\varphi_k.$$

Rappelons maintenant qu'à partir de l'équation (3.2.6), on peut trouver le potentiel chimique comme une fonction de n_0. Il est facile de montrer que la première correction à μ par rapport au paramètre λ sera alors nulle $\mu^{(1)} = 0$. (On peut également obtenir ce résultat en utilisant la relation (5.4.57) qui découle de l'invariance du hamiltonien par rapport aux transformations du gradient.)

On voit aisément que les équations (5.4.108) pour $\widetilde{h}_\alpha$, aux termes quadratiques par rapport à λ près peuvent s'écrire comme

$$-i\left(\omega+\omega_{p-\frac{k}{2}}-\omega_{p+\frac{k}{2}}\right)\widetilde{h}_{g_p}(k,\ \omega)-\widetilde{N}^{(1)}_{g_p\psi}(k)\,\widetilde{h}_\psi(k,\ \omega)-$$
$$-\widetilde{N}^{(1)}_{g_p\psi^*}(k)\,\widetilde{h}_{\psi^*}(k,\ \omega)=0,$$

$$-i\left(\omega-\omega_{p-\frac{k}{2}}-\omega_{p+\frac{k}{2}}\right)\widetilde{h}_{\varphi_p}(k,\ \omega)-\widetilde{N}^{(1)}_{\varphi_p\psi}(k)\,\widetilde{h}_\psi(k,\ \omega)-$$
$$-\widetilde{N}^{(1)}_{\varphi_p\psi^*}(k)\,\widetilde{h}_{\psi^*}(k,\ \omega)=0,$$

$$-i\left(\omega-\omega_k-i\widetilde{N}^{(2)}_{\psi\psi}(k)\right)\widetilde{h}_\psi(k,\ \omega)-\widetilde{N}^{(2)}_{\psi\psi^*}(k)\,\widetilde{h}_{\psi^*}(k,\ \omega)-$$
$$-\sum_p\widetilde{N}^{(1)}_{\psi g_p}(k)\,\widetilde{h}_{g_p}(k,\ \omega)-\sum_p\widetilde{N}^{(1)}_{\psi\varphi_p}(k)\,\widetilde{h}_{\varphi_p}(k,\ \omega)-$$
$$-\sum_p\widetilde{N}^{(1)}_{\psi\varphi^*_p}(k)\,\widetilde{h}_{\varphi^*_p}(k,\ \omega)=\operatorname{sh}\varphi_k, \qquad (5.4.116)$$

$$-i\left(\omega+\omega_k-i\widetilde{N}^{(2)}_{\psi^*\psi^*}(k)\right)\widetilde{h}_{\psi^*}(k,\ \omega)-\widetilde{N}^{(2)}_{\psi^*\psi}(k)\,\widetilde{h}_\psi(k,\ \omega)-$$
$$-\sum_p\widetilde{N}^{(1)}_{\psi^*g_p}(k)\,\widetilde{h}_{g_p}(k,\ \omega)-\sum_p\widetilde{N}^{(1)}_{\psi^*\varphi_p}(k)\,\widetilde{h}_{\varphi_p}(k,\ \omega)-$$
$$-\sum_p\widetilde{N}^{(1)}_{\psi^*\varphi^*_p}(k)\,\widetilde{h}_{\varphi^*_p}(k,\ \omega)=\operatorname{ch}\varphi_k.$$

On voit que ces équations contiennent les grandeurs $\widetilde{N}^{(1)}_{\alpha\beta}$ données par la formule

$$\widetilde{N}^{(1)}_{\alpha\beta}(k)=i\operatorname{Sp}\widetilde{\sigma}^{(0)}_\beta(-k)\,[n_0^{1/2}\widetilde{V}_3,\ \zeta_\alpha(0)],$$

et la grandeur $\widetilde{N}^{(2)}_{\psi\psi^*}(k)$ donnée par la formule

$$\widetilde{N}^{(2)}_{\psi\psi^*}(k)=i\operatorname{Sp}\widetilde{\sigma}^{(0)}_{\psi^*}(-k)\ [\hat{V}_4,\ \psi(0)]-i\mu^{(2)}\operatorname{Sp}\widetilde{\sigma}^{(0)}_{\psi^*}(-k)\,[\hat{\widetilde{N}},\ \psi(0)]$$

(compte tenu de ce qu'en vertu de (5.4.99) on a $\operatorname{Sp}\widetilde{\sigma}^{(1)}_{\psi^*}(k)\zeta_\alpha(0)=0$ où $\widetilde{\sigma}^{(1)}_{\psi^*}(k)$ est la correction à $\widetilde{\sigma}^{(0)}_{\psi^*}(k)$ du premier ordre par rapport à λ). Soulignons que les coefficients $\widetilde{N}_{\alpha,\beta}$ dans l'équation (5.4.116) dépendent seulement de l'opérateur $\widetilde{\sigma}^{(0)}_\alpha(k)$ correspondant à l'approximation zéro par rapport à λ pour les opérateurs $\widetilde{\sigma}_\alpha(k)$. En résolvant les deux premières équations (5.4.116) par rapport à $\widetilde{h}_g$ et $\widetilde{h}_\varphi$ et en substituant la solution dans la troisième et la quatrième équation, on trouve les équations donnant $\widetilde{h}_\psi$, $\widetilde{h}_{\psi^*}$. En calculant $\widetilde{h}_\psi$ et $\widetilde{h}_{\psi^*}$, on peut, à l'aide de la formule (5.4.114), trouver les fonctions de Green (5.4.113), compte tenu des termes proportionnels à λ^2:

$$\mathcal{G}^{(+)}_{\psi^+\psi}(k,\ \omega)=\frac{\omega-\varepsilon_k-\mathcal{V}^{-1}n_0\nu(k)}{(\omega-\Omega_k+i\gamma_k)\,(-\omega-\Omega_k-i\gamma_k)},$$
$$(5.4.117)$$
$$\mathcal{G}^{+}_{\psi\psi}(k,\ \omega)=\frac{\mathcal{V}^{-1}n_0\nu(k)}{(\omega-\Omega_k+i\gamma_k)\,(-\omega-\Omega_k-i\gamma_k)},$$

où $\Omega_k = \omega_k + \omega_k^{(2)}$ est l'énergie des quasi-particules compte tenu de l'interaction entre elles (nous n'écrirons pas ici la correction à l'énergie des quasi-particules $\omega_k^{(2)}$ proportionnelle à λ^2) et γ_k l'inverse du temps de vie des quasi-particules déterminé par la formule

$$\gamma_k = (e^{\beta\omega_k} - 1)\frac{\pi n_0}{\mathcal{V}^2}\sum_{12}\{F_I^2(1;\ 2,\ k)\,\delta(\omega_k + \omega_2 - \omega_1)\,n_1(1+n_2) +$$

$$+ F_I^2(k;\ 1,\ 2)\,\delta(\omega_k - \omega_1 - \omega_2)\,n_1 n_2\}, \qquad n_1 = (e^{\beta\omega_1} - 1)^{-1}.$$

$F_I(1;2,3)$ est ici l'amplitude des processus d'interaction de trois quasi-particules, à savoir
$F_I(1;2,3) = \operatorname{ch}\varphi_1 \operatorname{ch}\varphi_2 \operatorname{ch}\varphi_3\,\{(\nu(2)+\nu(3))\,(1 + \operatorname{th}\varphi_1 \operatorname{th}\varphi_2 \operatorname{th}\varphi_3) +$
$+ (\nu(1)+\nu(3))\,(\operatorname{th}\varphi_3 + \operatorname{th}\varphi_1 \operatorname{th}\varphi_2) + (\nu(1) + \nu(2))\,(\operatorname{th}\varphi_2 + \operatorname{th}\varphi_1 \operatorname{th}\varphi_3)\}\delta_{2+3,1}$.

Nous allons maintenant passer à la recherche des fonctions de Green (5.4.113) en approximation cinétique dans le cas où ce n'est pas l'amplitude de l'interaction qui est petite, mais le rayon d'interaction entre les particules. Dans ce cas, lors du calcul des grandeurs $\overline{N}_{\alpha\beta}(k)$ (voir 5.4.111)), en approximation zéro on peut négliger les termes contenant les fonctions de corrélation g_p, φ_p, par rapport aux termes contenant n_0. Ceci est lié à ce que pour $r_0 \ll \lambda$ (c'est-à-dire dans le domaine des basses températures), les fonctions g_p, φ_p sont différentes de zéro seulement dans un domaine restreint de l'espace des impulsions tendant vers zéro avec la température. En plus du paramètre petit r_0/λ, nous avons encore à notre disposition un paramètre petit, à savoir $n_0 r_0^3/\mathcal{V} \ll 1$. Il est facile de voir que si on néglige ces paramètres, les grandeurs $\overline{N}_{\alpha\beta}(k)$ s'annulent. C'est pourquoi en première approximation non nulle par rapport à n_0 on peut écrire la formule (5.4.111) sous la forme suivante

$$\overline{N}_{\alpha\beta}(k) = -i\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}\,\mathrm{Sp}_0\,\sigma_\gamma^{(0)}(-k)\,e^{-i\mathcal{H}\tau}[V,\ \hat{\xi}_\alpha(0)]\,e^{i\mathcal{H}\tau}\,(e^{\tau\mathcal{K}(k)})_{\gamma\beta}, \tag{5.4.118}$$

où Sp_0 désigne que la trace est calculée en première approximation non nulle par rapport à n_0, en négligeant les fonctions de corrélations g_p, φ_p.

Nous allons montrer que si on néglige les fonctions de corrélation g_p, φ_p les premiers termes des grandeurs $\overline{N}_{g_p\psi}$, $\overline{N}_{g_p\psi^*}$ sont d'ordre plus élevé que n_0. Comme en vertu de (3.1.33) on a le développement

$$\rho^{(0)}(g,\ \varphi) = |0\rangle\langle 0| + \sum_1 |1\rangle g_1 \langle 1| - \sum_1 |0\rangle g_1 \langle 0| + \ \ldots,$$

en négligeant les grandeurs g_1, φ_1 on peut remplacer l'opérateur statistique $\rho^{(0)}(g,\varphi)$ par le projecteur de vide $|0\rangle\langle 0|$, les formules (5.4.71) s'écrivent alors comme suit:

$$\bar{\sigma}_\psi^{(0)}(-k) \approx \mathcal{V}^{1/2}\,U_0^+ a_k^+\,|0\rangle\langle 0|\,U_0, \qquad \bar{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(-k) \approx \mathcal{V}^{1/2} U_0^+\,|0\rangle\langle 0|\,a_{-k} U_0. \tag{5.4.119}$$

En utilisant ces formules, on peut en vertu de (5.4.118) écrire $\overline{N}_{g_p\psi^*}$ sous la forme

$$\overline{N}_{g_p\psi^*}(k) = -i\eta\mathcal{V}^{1/2}\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}\,e^{i\tau\varepsilon_k}\,\langle -k|\,U_0 e^{-i\mathcal{H}\tau}[V,\ \hat{\gamma}_p(0)]\,e^{i\mathcal{H}\tau} U_0^+\,|0\rangle.$$

(l'indice 0 de l'élément matriciel signifie qu'il est calculé en première approximation par rapport à n_0 ne disparaissant pas). En remplaçant sous le signe du commutateur V par $\bar{\mathscr{H}} - \mathscr{H}_0$ ($\bar{\mathscr{H}} = \mathscr{H} - \mu N$) et en remarquant que

$$[\mathscr{H}_0, \hat{\bar{f}}_p(0)] = -\sum_k kv\hat{\bar{f}}_p(k),$$

$$e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}[\bar{\mathscr{H}}, \hat{\bar{f}}_p(0)]\, e^{i\bar{\mathscr{H}}\tau} = i\frac{\partial}{\partial\tau} e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}\hat{\bar{f}}_p(0)\, e^{i\bar{\mathscr{H}}\tau},$$

on obtient, après intégration par parties

$$\bar{N}_{g_p\psi^*}(k) = -\eta(\eta + i\varepsilon_k + ikv)\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\varepsilon_k} \langle -k \,|\, U_0 e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}\hat{\bar{f}}_p(k)\, e^{i\bar{\mathscr{H}}\tau} U_0^+ \,|0\rangle_0,$$

où $\hat{\bar{f}}_p(k) = a^+_{p-\frac{k}{2}} a_{p+\frac{k}{2}} - n_0^{1/2}\delta_{p+\frac{k}{2},\,0}\, a^+_{-k} - n_0^{1/2}\delta_{p+\frac{k}{2},\,0}\, a_k$ et $v = p/m$.

En développant l'opérateur U_0 en série suivant les puissances de n_0:

$$U_0 = 1 - n_0^{1/2}(a_0^+ - a_0) + \frac{1}{2} n_0 (a_0^+ - a_0)^2 + \ldots \tag{5.4.120}$$

(voir (5.4.73)), il est facile de voir qu'aux termes linéaires par rapport à n_0 près inclus, on a l'égalité

$$\bar{N}_{g_p}(k) = -\eta(\eta + i\varepsilon_k + ikv)\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\varepsilon_k} n_0^{1/2} \times$$

$$\times \{\langle -k \,|\, e^{-i\mathscr{H}\tau} a^+_{p-\frac{k}{2}} a_{p+\frac{k}{2}} e^{i\mathscr{H}t} a_0^+ \,|\, 0\rangle - \delta_{p+\frac{k}{2},\,0} \langle -k \,|\, e^{-i\mathscr{H}\tau} a^+_{-k} \times$$

$$\times e^{i\mathscr{H}\tau} \,|\, 0\rangle\},$$

d'où $\bar{N}_{g_p\psi^*}(k) = 0$ et par conséquent

$$\bar{N}_{g_p\psi} = \bar{N}^*_{g_p\psi^*} = 0. \tag{5.4.121}$$

D'une manière analogue, on peut montrer qu'en approximation envisagée on a

$$\bar{N}_{\varphi_p\psi} = \bar{N}_{\varphi_p\psi^*} = 0.$$

De plus, il est facile de montrer que si on néglige les grandeurs g_p, φ_p, n_0, on a $\bar{Q}_{g_p} = \bar{Q}_{\varphi_p} = 0$ (voir (5.4.84)). Nous allons voir plus loin que les grandeurs $\bar{N}_{\psi\psi}$, $\bar{N}_{\psi\psi^*}$ sont proportionnelles à n_0. C'est pourquoi il résulte de (5.4.121), (5.4.83) que dans les équations pour $\bar{h}_\psi \bar{h}_{\psi^*}$ on peut négliger les termes contenant $\bar{h}_{g_p} \bar{h}_{\varphi_p}$.

Comme en vertu des formules (5.4.84) négligeant les grandeurs g_p, φ_p, n_0, on a $\bar{Q}_{\psi^*}(k, \omega)=i$, $\bar{Q}_{\psi}(k, \omega)=0$, les équations (5.4.83) s'écrivent sous la forme suivante

$$(-\omega-\varepsilon_k+i\bar{N}_{\psi^*\psi^*}(k))\,\bar{h}_{\psi^*}(k, \omega)+i\bar{N}_{\psi^*\psi}(k)\,\bar{h}_{\psi}(k, \omega)=1,$$
$$(\omega-\varepsilon_k-i\bar{N}_{\psi\psi}(k))\,\bar{h}_{\psi}(k, \omega)-i\bar{N}_{\psi\psi^*}(k)\,\bar{h}_{\psi^*}(k, \omega)=0. \qquad (5.4.122)$$

Nous allons passer au calcul des grandeurs $\bar{N}_{\psi\psi}=\bar{N}^*_{\psi^*\psi^*}$ et $\bar{N}_{\psi\psi^*}=\bar{N}^*_{\psi^*\psi}$ figurant dans cette équation. A partir de (5.4.118), (5.4.119) on a

$$\bar{N}_{\psi\psi}(k)=i\eta\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}e^{-i\varepsilon_k\tau}\langle 0\,|\,U_0e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}[\bar{\mathscr{H}}-\mathscr{H}_0,\ a_k]\,e^{i\bar{\mathscr{H}}\tau}U_0^+\,|\,k\rangle_0.$$

Comme $e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}[\bar{\mathscr{H}},\ a_k]\,e^{i\bar{\mathscr{H}}\tau}=i\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}a_ke^{i\bar{\mathscr{H}}\tau}$, $[\mathscr{H}_0,\ a_k]=-\varepsilon_ka_k$,

il est facile de voir que

$$\bar{N}_{\psi\psi}(k)=\eta^2\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}e^{-i\varepsilon_k\tau}\langle 0\,|\,U_0e^{-i\bar{\mathscr{H}}\tau}a_ke^{i\bar{\mathscr{H}}\tau}U_0^+\,|\,k\rangle.$$

En utilisant la formule (5.4.120), on obtient

$$\bar{N}_{\psi\psi}(k)=\eta^2\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}(1-i\mu_1\tau)+$$
$$+\eta^2n_0\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}e^{-i\varepsilon_k\tau}\langle k,\ 0\,|\,e^{i\bar{\mathscr{H}}\tau}\,|\,k,\ 0\rangle-\eta^2n_0\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{\eta\tau}(\delta_{k,\,0}+1),$$
$$|\,k,\ 0\rangle=a_k^+a_0\,|\,0\rangle.$$

(Nous avons tenu compte ici de ce que le développement du potentiel chimique μ en série suivant les puissances de n_0, $\mu=\mu_1+\ldots$, commence par des termes linéaires par rapport à n_0, voir (5.4.123).) Notons que les termes quadratiques par rapport à n_0 ne peuvent être obtenus à l'aide des formules (5.4.118), car dans l'expression (5.4.111), nous avons rejeté l'exponentielle $\exp\tau\bar{N}$ qui joue un rôle important lors de l'élimination des termes séculaires dans les approximations d'ordre supérieur.

Remarquant que

$$e^{\eta\tau}e^{\mp i\bar{\mathscr{H}}\tau}\theta(-\tau)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dER_{\mp}(E)\,e^{\mp iE\tau}, \qquad (5.4.123)$$

où $R_{\mp}(E)=E-\bar{\mathscr{H}}\mp i\eta)^{-1}$ est la résolvante de l'opérateur $\bar{\mathscr{H}}$, on obtient

$$\bar{N}_{\psi\psi}(k)=\eta+i\mu_1-\eta n_0-\eta n_0\delta_{k,\,0}+i\eta^2n_0\langle k,\ 0\,|\,R_+(\varepsilon_k)\,|\,k,\ 0\rangle.$$

Comme en vertu de (2.1.22) $R_{\pm}(E) = R^0_{\pm}(E) + R^0_{\pm}(E)\, T_{\pm}(E)\, R^0_{\pm}(E)$, on a

$$\overline{N}_{\psi\psi}(k) = \eta + i\mu_1 - \eta n_0 \delta_{k,\,0} - i n_0 \langle k,\ 0 \,|\, T_+(\varepsilon_k) \,|\, k,\ 0 \rangle .$$

En passant dans cette formule à la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$ (avec $n_0 \delta_{k,0} \to n_0/\mathcal{V} \cdot (2\pi)^3 \delta(k)$) et en faisant tendre η vers zéro, $\eta \to +0$, on trouve

$$\overline{N}_{\psi\psi}(k) = i\mu_1 - i n_0 \langle k,\ 0 \,|\, T_+(\varepsilon_k) \,|\, k,\ 0 \rangle . \qquad (5.4.124)$$

D'une manière analogue, on peut trouver

$$\overline{N}_{\psi\psi^*}(k) = \eta(\eta + 2i\varepsilon_k) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\eta\tau}\, e^{i\tau\varepsilon_k} \langle -k \,|\, U_0 e^{-i\mathcal{H}\tau} a_k e^{\mathcal{H}\tau} U_0^+ \,|\, 0 \rangle_0 ,$$

d'où en vertu de (5.4.120)

$$\overline{N}_{\psi\psi^*}(k) = \frac{n_0}{2}\eta(\eta + 2i\varepsilon_k) \int_{-\infty}^{0} d\tau\, e^{\eta\tau} \langle -k,\ k \,|\, e^{i\mathcal{H}\tau} \,|\, 0,\ 0 \rangle .$$

En utilisant les formules (5.4.123), (2.1.22), il est facile d'écrire cette expression comme suit

$$\overline{N}_{\psi\psi^*}(k) = -\frac{i}{2} n_0 \langle -k,\ k \,|\, T_+(0) \,|\, 0,\ 0 \rangle + \frac{1}{2}\eta n_0 \delta_{\kappa,\,0},$$

d'où après les passages à la limite $\mathcal{V} \to \infty$, $\eta \to +0$ on trouve

$$\overline{N}_{\psi\psi^*}(k) = -\frac{i}{2} n_0 \langle -k,\ k \,|\, T_+(0) \,|\, 0,\ 0 \rangle . \qquad (5.4.125)$$

Nous allons maintenant passer à la recherche du potentiel chimique $\mu \approx \mu_1$ dans le domaine des valeurs petites de $n_0/\mathcal{V}$. A cet effet on fait appel à la formule (5.4.57) où l'on pose $f_p(x) = f_p^0$, $w_p(x) = w_p^0$, $\psi(x) = (n_0/\mathcal{V})^{1/2}$ (f_p^0, w_p^0 sont les valeurs d'équilibre des fonctions f_p, w_p) et comme pour les états d'équilibre f_p, w_p, ψ l'opérateur statistique $\sigma(\zeta) \equiv \sigma(f, w, \psi)$ coïncide avec la distribution de Gibbs w, on obtient

$$[\hat{N},\ w] = \left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} (\sigma_\psi(0) - \sigma_{\psi^*}(0)) + 2\sum_p \{w_p^0 \sigma_{w_p}(0) - w_p^{0*} \sigma_{w_p^*}(0)\},$$

d'où en vertu de (5.4.75), (5.4.68)

$$[\hat{N},\ w] = \left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} (\bar{\sigma}_\psi(0) - \bar{\sigma}_{\psi^*}(0)) + 2\sum_p \{\varphi_p^0 \bar{\sigma}_{\varphi_p}(0) - \varphi_p^{0*} \bar{\sigma}_{\varphi_p^*}(0)\}.$$
$$(5.4.126)$$

En utilisant cette formule et la définition (5.4.78) des grandeurs $\overline{N}_{\alpha\beta}(k)$, on obtient:

$$\overline{N}_{\psi\psi}(0) - \overline{N}_{\psi\psi^*}(0) = -i\left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{-1/2} \operatorname{Sp} w\,[\hat{N},\ [V,\ \hat{\varphi}(0)]] +$$
$$+ 2\left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{-1/2} \sum_p (\varphi_p^{0*}\, \overline{N}_{\psi\varphi_p^*}(0) - \varphi_p^0 \overline{N}_{\psi\varphi_p}(0)).$$

Comme $[\hat{N}, [V, a_0]] = [V, a_0] = [\mathcal{H} - \mu\hat{N}, a_0]$ on a compte tenu de ce que $[w, \mathcal{H} - \mu\hat{N}] = 0$ (voir (5.4.62)):

$$\overline{N}_{\psi\psi}(0) - \overline{N}_{\psi\psi^*}(0) = 2\left(\frac{n_0}{\mathcal{V}}\right)^{-1/2} \sum_p \left(\varphi_p^{0*}\, \overline{N}_{\psi\varphi_p^*}(0) - \varphi_p^0\, \overline{N}_{\psi\varphi_p}(0)\right). \quad (5.4.127)$$

Cette formule est exacte. En y négligeant la fonction de corrélation φ_p^0 et en utilisant les formules approchées (5.4.124), (5.4.125) pour $\overline{N}_{\psi\psi}$ et $\overline{N}_{\psi\psi^*}$ on trouve

$$\mu_1 = \frac{1}{2} n_0 \langle 0,\ 0 \mid T_+(0) \mid 0,\ 0\rangle. \quad (5.4.128)$$

(Comme nous l'avons déjà mentionné, on peut trouver d'une manière analogue le potentiel chimique en approximation de λ petit, $\lambda \sim \nu^{1/2}$.)

On a ainsi les formules suivantes pour les grandeurs $\overline{N}$:

$$\overline{N}_{\psi\psi}(k) = \overline{N}^*_{\psi^*\psi^*}(-k) = -in_0 \langle k,\ 0 \mid T_+(\varepsilon_\kappa) \mid k,\ 0\rangle + i\,\frac{n_0}{2} \langle 0,\ 0 \mid T_+(0) \mid 0,\ 0\rangle,$$

$$\overline{N}_{\psi\psi^*}(k) = \overline{N}^*_{\psi^*\psi}(-k) = -\frac{i}{2} n_0 \langle k,\ -k \mid T_+(0) \mid 0,\ 0\rangle. \quad (5.4.129)$$

En vertu de (5.4.122) et (5.4.86) les fonctions de Green $\mathcal{G}^+_{\psi^+\psi}$ et $\mathcal{G}^+_{\psi\psi}$ en approximation cinétique dans le cas d'un rayon d'action des forces petit sont déterminées par les formules suivantes

$$\mathcal{G}^+_{\psi^+\psi}(k,\ \omega) = \frac{-\omega + \varepsilon_\kappa + i\overline{N}_{\psi\psi}(k)}{\Delta(k,\ \omega)}, \quad \mathcal{G}^{(+)}_{\psi\psi}(k,\ \omega) = -i\,\frac{\overline{N}_{\psi\psi^*}(k)}{\Delta(k,\ \omega)}, \quad (5.4.130)$$

$$\Delta(k,\ \omega) = (\omega + \varepsilon_\kappa - i\overline{N}_{\psi^*\psi^*}(k))\,(\omega - \varepsilon_\kappa - i\overline{N}_{\psi\psi}(k)) + \overline{N}_{\psi\psi^*}(k)\,\overline{N}_{\psi^*\psi}k$$

(les grandeurs $\overline{N}$ sont données par les formules (5.4.129)).

Le spectre des oscillations dans un système de bosons peut être trouvé à partir de l'équation de dispersion

$$\Delta(k,\ \omega) = 0. \quad (5.4.131)$$

Dans le domaine des k petits sa solution s'écrit $\omega = \omega - i\gamma_k$, où

$$\omega^0_\kappa = \{\varepsilon_\kappa^2 + n_0\varepsilon_\kappa \langle 0,\ 0 \mid T_+(0) \mid 0,\ 0\rangle\}^{1/2},$$

$$\gamma_\kappa = \pi n_0 \sum_p |\langle p,\ k-p \mid T_-(\varepsilon_\kappa) \mid k,\ 0\rangle|^2\, \delta(\varepsilon_\kappa - \varepsilon_p - \varepsilon_{\kappa-p}).$$

La grandeur ω^0_k détermine l'énergie, et la grandeur γ_k^{-1} la durée de vie des quasi-particules.

La formule pour ω^0_k a la même structure que la formule (3.2.19) avec cette seule différence qu'au lieu des composantes de Fourier du potentiel, elle contient l'amplitude exacte de la diffusion des bosons d'énergie nulle.

Le coefficient d'amortissement γ_k est égal à la probabilité de la transition $|k,\ 0\rangle \to |p,\ k-p\rangle$ pour laquelle une particule d'impulsion k a une collision avec une particule du condensat, ce qui entraîne la création de particules d'impulsions p, $k-p$. Il y a lieu de remarquer qu'en approximation envisagée

(lorsqu'on développe $\overline{N}$ en série suivant les puissances de n_0) l'amortissement est dû aux collisions des particules réelles d'énergie $\varepsilon_p = p^2/2m$ et non des quasi-particules d'énergie ω_p^0 à la différence du cas étudié ci-dessus, où $\lambda = \nu\,(k)^{1/2}$ était le paramètre petit.

Tout comme dans le cas de λ petit, dans le cas envisagé d'un rayon d'action des forces r_0 petit, l'équation de dispersion (5.4.131) pour $k = 0$ a la solution $\omega = 0$. On peut montrer que cette propriété n'est pas liée à l'application de la théorie des perturbations, mais est liée à l'invariance par rapport au gradient du hamiltonien d'un système de Bose. (La démonstration est basée sur la relation (5.4.57) [94]; nous ne la donnerons pas ici.)

Soulignons une fois de plus que la propriété mentionnée du spectre de quasi-particules est liée, tout d'abord, à l'invariance par rapport au gradient du hamiltonien du système, c'est-à-dire à ce que le hamiltonien du système $\mathcal{H}$ commute avec l'opérateur du nombre de particules, et ensuite à ce que la symétrie de l'état d'équilibre statistique par rapport aux transformations de gradient est spontanément perturbée, c'est-à-dire que $\langle\psi\rangle \neq 0$. Lorsque ces deux conditions sont vérifiées, dans un système de bosons en interaction on voit apparaître une branche sans action des oscillations, c'est-à-dire la branche des oscillations $\omega = \omega\,(k)$ pour laquelle $\omega\,(0) = 0$. Cette propriété est un cas particulier d'un théorème plus général, dit *théorème de Bogolioubov-Goldstone* affirmant que lorsque la symétrie est spontanément perturbée une branche sans action des oscillations apparaît [19, 48].

La méthode exposée dans les deux derniers paragraphes permettant d'étudier le comportement asymptotique des fonctions de Green des systèmes de Bose dégénérés peut également être généralisée au cas des systèmes de Fermi dégénérés (superfluides), mais il y a lieu d'introduire alors des champs extérieurs anticommutants. Nous n'allons pas nous arrêter ici sur cette question.

§ 5.5. Intégrales des collisions pour les phonons et théorie de la conductibilité thermique des corps diélectriques

Dans le paragraphe 5.1.2. nous avons déduit les intégrales des collisions pour les particules en supposant que deux particules prennent part au processus d'interaction et qu'elles suivent la même statistique (de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac). D'une manière analogue, on peut obtenir les intégrales des collisions correspondant à d'autres types d'interaction, de plus il n'est pas indispensable de supposer que toutes les particules (ou les quasi-particules) participant au processus d'interaction suivent la même statistique.

Dans ce paragraphe nous allons trouver l'intégrale des collisions pour les phonons, c'est-à-dire pour les quasi-particules correspondant aux ondes sonores se propageant dans les cristaux. Rappelons préalablement que par suite de l'interaction non linéaire entre les ondes sonores, on peut avoir différents processus de diffusion des ondes sonores les unes sur les autres, ainsi que des processus de naissance de nouvelles ondes et de destruction des anciennes. Dans la langue des quasi-particules — des phonons — ceci signifie que la diffusion est possible, ainsi que la naissance ou la destruction des phonons. Les processus les plus simples que nous envisagerons ici

sont la désintégration d'un phonon en deux phonons et la réunion de deux phonons en un seul phonon. Dans ces processus sont respectées la loi de la conservation de l'énergie

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$$

qui relie les énergies des phonons ω_i, ainsi que la loi

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 + 2\pi\boldsymbol{\tau},$$

qui relie les quasi-impulsions des phonons $\boldsymbol{k}_i$ et est analogue à la loi de la conservation de l'impulsion. Mais à la différence de la loi exacte de la conservation, ici on a un vecteur arbitraire du réseau réciproque $\boldsymbol{\tau}$ [55]

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{b}_1 n_1 + \boldsymbol{b}_2 n_2 + \boldsymbol{b}_3 n_3,$$

où $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ sont les vecteurs de base du réseau réciproque, liés aux vecteurs de base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ du réseau cristallin par les relations

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]}{(\boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3])}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1]}{(\boldsymbol{a}_2 [\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1])}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]}{(\boldsymbol{a}_3 [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2])},$$

et n_1, n_2, n_3 des nombres arbitraires. On suppose que le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ posé se trouve dans les limites de la première zone de Brillouin, c'est-à-dire qu'il satisfait aux conditions $|\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_i| \leqslant \pi$ $(i = 1, 2, 3)$.

Pour écrire l'intégrale des collisions pour les phonons, nous allons utiliser la formule générale (5.1.19) et supposer que le hamiltonien de l'interaction des phonons entre eux, peut s'écrire comme

$$V = \mathscr{V}^{-1/2} \sum_{123\tau} \Phi^{\tau}(1, 2; 3) c_1^{+} c_2^{+} c_3 + \text{c.h.} \qquad (5.5.1)$$

(pour plus de simplicité on ne tient pas compte ici de la polarisation des phonons), où $\Phi^{\tau}(12; 3)$ est l'amplitude de la transition $3 \to \to 2 + 1$;

$$\Phi^{\tau}(1, 2; 3) \equiv \Phi(1, 2; 3)\, \Delta(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3 + 2\pi\boldsymbol{\tau}),$$

$$\Delta(\boldsymbol{k}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{k} = 0, \\ 0, & \boldsymbol{k} \neq 0 \end{cases} \qquad (5.5.2)$$

et c_i^{+}, c_i sont les opérateurs de création et d'annihilation des phonons. (Pour $\boldsymbol{k}_i$ petits ($|\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_i| \ll 1$), la grandeur $|\Phi|^2$ est proportionnelle au produit des fréquences des trois phonons participant au processus.) On obtient ainsi l'expression suivante pour l'intégrale des collisions $L_k(N)$ des phonons les uns avec les autres

$$L_k N = -\frac{2}{\mathscr{V}} \operatorname{Re} \sum_{123\tau} \sum_{1'2'3'\tau'} \int_{-\infty}^{0} dt\, e^{\eta t} \Phi^{\tau}(1, 2; 3)\, \Phi^{\tau'}(1', 2'; 3')^{*} \times$$
$$\times e^{it(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)} \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(N) [c_1^{+} c_2^{+} c_3, [c_{3'}^{+} c_{2'} c_{1'}, c_k^{+} c_k]],$$

où N_k est la fonction de distribution des phonons et $\rho^{(0)}(N)$ l'opérateur statistique d'un gaz parfait de phonons hors d'équilibre.

Remarquant que

$$[c_{3'}^{+}c_{2'}^{+}c_{1'},\ c_k^{+}c_k]=c_{3'}^{+}c_{2'}c_{1'}(\delta_{k,1'}+\delta_{k,2'}-\delta_{k,3'}),$$

on obtient en utilisant les règles de Vick (voir le paragraphe 5.1.2):

$$L_k^{\eta}(N)=-\frac{2}{\mathcal{V}}\operatorname{Re}\sum_{123\tau}\ \sum_{1'2'3'\tau'}\int_{-\infty}^{0}dt e^{\eta t}\Phi^{\tau}(1,2;3)\,\Phi^{\tau'}(1',2';3')^{*}\times$$
$$\times e^{it(\omega_1+\omega_2-\omega_3)}(\delta_{k,1'}+\delta_{k,2'}-\delta_{k,3'})\,2\,[c_1^{+}c_2c_3,\ c_{3'}^{+}c_{2'}c_{1'}].$$

(Nous avons utilisé ici la symétrie de l'amplitude Φ (1, 2; 3) par rapport à la permutation des indices 1, 2.) Finalement on trouve

$$L_k(N)=\frac{4\pi}{\mathcal{V}}\sum_{123\tau}|\Phi^{\tau}(1,2;3)|^2\,\delta(\omega_1+\omega_2-\omega_3)\times$$
$$\times(\delta_{k,1}+\delta_{k,2}-\delta_{k,3})\{N_1N_2(1+N_3)-N_3(1+N_1)(1+N_2)\}. \tag{5.5.3}$$

Nous allons montrer maintenant que connaissant l'intégrale des collisions des phonons, on peut élaborer la théorie de la conductibilité thermique des diélectriques dans lesquels la chaleur est transmise par les phonons *).

La densité $\boldsymbol{q}$ du flux d'énergie transmise par les phonons est égale à

$$\boldsymbol{q}=\mathcal{V}^{-1}\sum_{1}\boldsymbol{v}_1\omega_1N_1, \tag{5.5.4}$$

où $\boldsymbol{v}_1=\partial\omega_1/\partial\boldsymbol{k}_1$ est la vitesse de groupe des phonons. C'est pourquoi, pour trouver $\boldsymbol{q}$, il y a lieu de trouver la fonction de distribution des phonons dans le cas où dans le corps il y a un gradient de température. La distribution des phonons ne sera alors pas spatialement homogène et la fonction de distribution des phonons satisfera à l'équation cinétique

$$\frac{\partial N_1}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\nabla N_1=L_1(N). \tag{5.5.5}$$

Dans le cas stationnaire que nous envisagerons ci-dessous, on a $\partial N_1/\partial t=0$.

En passant à l'étude de l'équation cinétique pour les phonons, on doit tout d'abord envisager l'équation pour la distribution d'équilibre

$$L_1(N)=0. \tag{5.5.6}$$

---

*) Ci-dessous nous suivrons [7], [8].

On voit aisément que si dans les processus envisagés de désintégration et de réunion des phonons, en plus de la loi de la conservation de l'énergie, la loi de la conservation de la quasi-impulsion était respectée d'une manière exacte, la solution générale de (5.5.6) serait de la forme

$$N_1^0 = (e^{\beta\omega_1 + \boldsymbol{u}\boldsymbol{k}_1} - 1)^{-1}, \tag{5.5.7}$$

où β^{-1} est la température du gaz de phonons et $\boldsymbol{u}$ un vecteur arbitraire. (Ce vecteur donne de toute évidence l'impulsion totale des phonons.) Il est évident que si l'on substitue la distribution (5.5.7) dans l'expression de $\boldsymbol{q}$, on obtient un résultat différent de zéro. Ceci signifie que la distribution (5.5.7) donne un flux de chaleur fini même en l'absence de gradient de température, c'est-à-dire qu'on a une conductibilité thermique infinie du cristal. Mais pour la quasi-impulsion il n'y a pas de loi de la conservation rigoureuse, car l'amplitude de l'interaction (5.5.2) contient le vecteur arbitraire du réseau réciproque τ. C'est pourquoi le vecteur arbitraire $\boldsymbol{u}$ ne peut figurer dans la distribution d'équilibre des phonons et à l'équilibre, on a une distribution de Planck pure, à savoir

$$N_1^0 = (e^{\beta\omega_1} - 1)^{-1}, \quad \beta = T^{-1}. \tag{5.5.8}$$

Nous allons supposer maintenant que le gradient de température est suffisamment petit. La fonction de distribution des phonons N_1 diffère alors peu de la fonction de distribution à l'équilibre, $N_1 = N_1^0 + \delta N_1$ ($|\delta N_1| \ll N_1^0$), et l'équation cinétique (5.5.5.) peut être linéarisée par rapport à δN. Vu que $L_1(N^0) = 0$, on obtient l'équation suivante

$$v\nabla T \frac{\partial N_1^0}{\partial T} = L_1(\delta N) \equiv \int d^3k' \left(\frac{\delta L_k}{\delta N_{k'}}\right)_{N=N^0} \delta N_{k'}, \tag{5.5.9}$$

où $L_1(\delta N)$ est l'intégrale linéarisée des collisions. Il est commode de chercher la correction à apporter dans la fonction de distribution à l'équilibre sous la forme

$$\delta N_1 = \beta (N_1^0 + 1) N_1^0 \chi_1,$$

où χ_1 est une fonction inconnue de la quasi-impulsion du phonon $\boldsymbol{k}_1$. L'équation cinétique (5.5.9) s'écrit alors

$$L_1(\delta N) = \beta^2 N_1^0 (1 + N_1^0)\, \omega_1 (v_1, \nabla T),$$

où

$$L_k(\delta N) = \frac{\beta}{\mathcal{V}} \sum_{123\tau} w^{\tau}_{1\,;\,23} \frac{(\chi_2 + \chi_3 - \chi_1)\, \delta(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)}{(e^{-\beta\omega_1} - 1)(e^{\beta\omega_2} - 1)(e^{\beta\omega_3} - 1)} (\delta_{k,2} + \delta_{k,3} - \delta_{k,1}),$$

$$w^{\tau}_{1\,;\,23} = 4\pi\, |\Phi(2, 3\,;\, 1)|^2\, \Delta(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3 + 2\pi\tau).$$

Il est évident que si $\tau \neq 0$, toutes les quasi-impulsions $\boldsymbol{k}_i$ ne peuvent être petites et par conséquent les énergies de tous les phonons ω_i ne peuvent pas également être petites. D'autre part, $\omega_i \leqslant T_D$, où T_D est la température de Debye. C'est pourquoi, si $T \ll T_D$, la partie de l'intégrale des collisions $L_k(\delta N)$ correspondant à $\tau \neq 0$ contiendra de toute évidence le facteur $\exp(-\gamma T_D/T)$, où γ est une grandeur numérique de l'ordre de l'unité.

C'est pourquoi, l'apport des processus d'interaction des phonons, dont les quasi-impulsions ne se conservent pas (ces processus sont appelés *processus de « basculement »*), dans l'intégrale des collisions $L_k(\delta N)$, aux basses températures ($T \ll T_D$) est exponentiellement petit. Au contraire, pour des températures élevées ($T \gg T_D$), les apports des processus avec $\tau = 0$ et $\tau \neq 0$ sont du même ordre de grandeur. Cependant, il est impossible de ne pas tenir compte des processus de « basculement », car alors dans le réseau la distribution de Planck pour les phonons ne s'établira pas. Compte tenu de ce qui vient d'être dit nous écrivons l'intégrale des collisions $L_k(\delta N)$ comme la somme de deux termes L^0 et L^u correspondant à $\tau = 0$ et $\tau \neq 0$:

$$L_k(\delta N) = L_k^0(\chi) + \xi L_k^u(\chi),$$

où le facteur ξ caractérisant le processus de « basculement » figure d'une manière explicite. Aux basses températures il décroît exponentiellement ($\xi \approx \exp(-\gamma T_D/T)$), et aux températures élevées, il est de l'ordre de l'unité.

Ainsi

$$L_k^0(\chi) + L_k^u(\chi)\cdot\xi = \beta^2\omega_k \frac{\boldsymbol{v}_k \nabla T}{(e^{\beta\omega_k}-1)(1-e^{-\beta\omega_k})}. \tag{5.5.10}$$

En posant ici $\xi = 0$, on obtient une équation qui n'a pas de solution. En effet, l'équation homogène $L_k^0(\chi) = 0$ admet un nombre infini de solutions du type $\chi_k = \boldsymbol{g}\boldsymbol{k}$, où $\boldsymbol{g}$ est un vecteur constant, solutions qui ne sont pas de toute évidence orthogonales au second membre de (5.5.10).

On peut trouver la solution de l'équation (5.5.10) pour χ (plus exactement la dépendance de χ de la température) dans deux cas limites des hautes et des basses températures. Dans le premier cas ($T \gg T_D$, $\xi \sim 1$) on peut remplacer la fonction de Planck par T/ω. Comme il est facile de le voir à partir de (5.5.10), la fonction χ_k sera alors inversement proportionnelle à T. C'est pourquoi le flux de chaleur $\boldsymbol{q}$ et le coefficient de conductibilité thermique $\varkappa$ seront inversement proportionnels à la température.

Dans le second cas (lorsque $T \ll T_D$), $\xi \ll 1$, et il faut chercher la solution de l'équation intégrale (5.5.10) sous la forme

$$\chi_1 = \chi_1^0 + \chi_1',$$

où χ_1^0 est une grandeur de l'ordre de ξ^{-1} et χ_1' une grandeur de l'ordre de l'unité. Pour χ_1^0 et χ_1' on trouve de toute évidence les équations

$$L_k^0(\chi^0)=0,$$

$$\xi L_k^u(\chi^0)+L_k^0(\chi')=\beta^2\omega_k(e^{\beta\omega_k}-1)^{-1}(1-e^{-\beta\omega_k})^{-1}v_k\nabla T.$$

A partir de la première équation on obtient:

$$\chi_k^0=gk,$$

où g est un vecteur constant. Ce vecteur peut être trouvé à partir de la condition de solubilité des équations pour χ_k'. En effet, en remarquant que

$$\sum_k kL_k^0(\chi')=0,$$

pour χ' arbitraire, on a

$$\xi\sum_k kL_k^u(gk)=\beta^2\sum_k \omega_k\frac{v_k\nabla T}{(e^{\beta\omega_k}-1)(1-e^{-\beta\omega_k})}. \qquad (5.5.11)$$

Le premier membre de cette équation donne la variation de la quasi-impulsion des phonons par unité de temps, due aux collisions des phonons, et le second membre la variation de la quasi-impulsion des phonons due au gradient de température.

Ainsi dans le domaine des températures basses la fonction $\chi_k^0 = gk$ avec le vecteur g déterminé par (5.5.11) sera la partie principale de la fonction χ_k. C'est pourquoi le flux thermique q aux basses températures peut être calculé en supposant que $\chi_k \approx \chi_k^0$. Ce calcul est élémentaire et donne le résultat suivant pour le coefficient de conductibilité thermique $\varkappa$ (c'est-à-dire le coefficient dans l'expression de q pour $-\nabla T$):

$$\varkappa\approx\frac{Ms^2}{a}c^2\exp(\gamma T_D/T), \qquad (5.5.12)$$

où M est la masse d'une cellule élémentaire, a la constante du réseau, s la vitesse du son et c_l la capacité calorifique du réseau (en supposant que la loi linéaire de dispersion est vraie jusqu'à $k_l = \pi/a$, la grandeur γ sera égale à π).

CHAPITRE 6

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MACROSCOPIQUE

§ 6.1. Equations de l'hydrodynamique d'un liquide normal

6.1.1. Equations de l'hydrodynamique d'un liquide parfait. Au paragraphe 1.3.3. nous avons trouvé les équations de la dynamique des gaz à partir de l'équation de Boltzmann *). Des équations analogues sont vraies non seulement pour les gaz, mais également pour les liquides. Cependant la méthode utilisée dans le § 1.3 pour trouver ces équations n'est pas applicable dans le cas des liquides. En effet, comme nous l'avons mentionné au paragraphe 4.2.2, pour les liquides, l'étape cinétique de l'évolution n'existe pas et seule l'étape hydrodynamique de l'évolution a un sens. C'est pourquoi, dans le présent paragraphe, nous allons trouver les équations de l'hydrodynamique directement à l'étape hydrodynamique de l'évolution.

Dans le hamiltonien d'un liquide, on ne peut isoler une interaction faible et, les seuls paramètres petits du problème sont les gradients spatiaux des grandeurs physiques. C'est pourquoi, nous allons utiliser les résultats du paragraphe 4.2.2. Pour les paramètres $\zeta_\alpha(x)$ caractérisant l'état hors d'équilibre d'un liquide, il y a lieu de prendre les densités d'énergie $\varepsilon(x, t)$ et de l'impulsion $\pi(x, t)$, ainsi que les densités des masses $\rho_a^{(m)}(x, t) \equiv \rho_a(x, t)$ des différents composants d'un liquide (on suppose que le liquide a plusieurs composants, l'indice a correspond au numéro du composant). En vertu de paragraphe 4.2.2, un tel choix des paramètres est imposé par le fait que la relation ergodique pour un opérateur statistique quelconque d'un système spatialement homogène satisfaisant au principe d'affaiblissement des corrélations s'écrit comme

$$e^{-i\mathcal{H}\tau}\rho e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \exp\left\{\Omega - Y_0\int d^3x\hat{\varepsilon}(x) - Y_k\int d^3x\hat{\pi}_k(x) - \sum_a Y_a\int d^3x\hat{\rho}_a(x)\right\},$$

où $\hat{\varepsilon}(x)$, $\hat{\pi}_k(x)$, $\hat{\rho}_a(x)$ sont les opérateurs des densités de l'énergie,

*) Pour les équations de l'hydrodynamique fondées sur les équations cinétiques quantiques voir [47], [17].

de l'impulsion et de la masse de a-ième composant; Y_0, Y_k, Y_a les forces thermodynamiques généralisées correspondantes et Ω est le potentiel thermodynamique.

En vertu du paragraphe 4.2.2, nous désignerons par $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ l'ensemble des opérateurs $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\pi}_k$, $\hat{\rho}_a$, $\alpha = 0$ correspondant à la densité d'énergie, $\alpha = 1, 2, 3$ aux trois projections de la densité de l'impulsion et $\alpha = 4, 5, \ldots,$ aux densités de la masse des différents composants du liquide.

Les paramètres $\zeta_\alpha(x, t) \equiv \zeta_\alpha(x)$ satisfont aux équations du mouvement

$$\dot{\zeta}_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{\alpha k}(x), \tag{6.1.1}$$

où $\zeta_{\alpha k}(x) \equiv \zeta_{\alpha k}(x, t)$ sont les densités des flux des grandeurs $\zeta_\alpha(x)$. Aux termes quadratiques par rapport aux gradients près, les grandeurs $\zeta_{\alpha k}(x)$ sont données par les formules (voir le paragraphe 4.2.2)

$$\zeta_{\alpha k}(x) = \zeta_{\alpha k}^{(0)}(x) + \zeta_{\alpha k}^{(1)}(x) + \ldots, \tag{6.1.2}$$

$$\zeta_{\alpha k}^{(0)}(x) = \operatorname{Sp} w(x)\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(0), \qquad \zeta_{\alpha k}^{(1)}(x) = \operatorname{Sp} \sigma_0^{(1)}(x)\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(0).$$

$\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)$ sont ici les opérateurs des flux, $w(x)$ est la distribution locale de Gibbs

$$w(x) = \exp\left\{\Omega - Y_\alpha(x)\int d^3x'\hat{\zeta}_\alpha(x')\right\} \equiv w(Y(x)), \tag{6.1.3}$$

$Y_\alpha(x)$ sont les forces thermodynamiques généralisées correspondant aux paramètres $\zeta_\alpha(x)$ et déterminées à partir des relations

$$\operatorname{Sp} w(x)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(x) \tag{6.1.4}$$

et, enfin, l'opérateur $\sigma_0^{(1)}(x)$ est donné par les formules (4.2.42), (4.2.37).

Si dans (6.1.2) on néglige les termes linéaires par rapport aux gradients, on obtient les équations de l'hydrodynamique d'un liquide parfait

$$\dot{\zeta}_\alpha(x) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{\alpha k}^{(0)}(x). \tag{6.1.5}$$

Pour calculer $\zeta_{\alpha k}^{(0)}(x)$, il y a lieu de remarquer que l'on a la relation suivante

$$U_u w(Y) U_u^+ = w(Y'),$$

$$Y_0' = Y_0, \quad Y_k' = Y_k + Y_0 u_k, \quad Y_a' = Y_a + Y_k u_k + Y_0\frac{u^2}{2}, \tag{6.1.6}$$

où U_u est un opérateur unitaire correspondant aux transformations de Galilée. Il est donné par la formule (2.3.25)

$$U_u = \exp\left\{-iu\int d^3x\,x\hat{\rho}(x)\right\}, \tag{6.1.7}$$

où $\hat{\rho}(x) = \sum_a \hat{\rho}_a(x)$ est l'opérateur de densité de masse et u un vecteur arbitraire. La relation (6.1.6) découle directement des propriétés de transformation (2.3.26) des opérateurs de densités lors des transformations de Galilée

$$U_u\hat{\rho}_a(x)U_u^+ = \hat{\rho}_a(x), \quad U_u\hat{\pi}_k(x)U_u^+ = \hat{\pi}_k(x) + u_k\hat{\rho}(x),$$
$$U_u\hat{\varepsilon}(x)U_u^+ = \hat{\varepsilon}(x) + u_k\hat{\pi}_k(x) + \frac{u^2}{2}\hat{\rho}(x). \tag{6.1.8}$$

Remarquons qu'en vertu de la formule (6.1.6) le potentiel thermodynamique Ω est invariant par rapport aux transformations des forces thermodynamiques Y_α:

$$Y_0 \to Y_0' = Y_0, \quad Y_k \to Y_k' = Y_k + Y_0 u_k, \quad Y_a \to Y_a' =$$
$$= Y_a + Y_k u_k + Y_0\frac{u^2}{2}, \tag{6.1.9}$$

c'est-à-dire $\Omega(Y) = \Omega(Y')$. Par conséquent $\Omega(Y)$ dépend seulement des variables Y_0, $Y_a - \frac{1}{2}Y_0^{-1}Y_k^2$:

$$\Omega(Y) = \Omega\left(Y_0, Y_a - \frac{1}{2}Y_0^{-1}Y_k^2\right). \tag{6.1.10}$$

Comme en vertu de (6.1.3), (6.1.4)

$$\partial\Omega/\partial Y_a = \rho_a, \quad \partial\Omega/\partial Y_k = \pi_k,$$

on a

$$\pi_k = \sum_a \frac{\partial\Omega}{\partial Y_a}\left(-\frac{Y_k}{Y_0}\right) = -\frac{Y_k}{Y_0}\rho. \tag{6.1.11}$$

La grandeur $\pi_k(x)/\rho(x)$ est la vitesse locale du liquide $u_k(x)$. Ainsi on a

$$u_k(x) = -Y_k(x)/Y_0(x). \tag{6.1.12}$$

Par conséquent la transformation (6.1.9) équivaut au changement $\bar{u} \to \bar{u}' = \bar{u} - u$, $\bar{u}_k = -Y_k/Y_0$.

En posant dans la formule (6.1.6) $u = u(x)$, on obtient

$$U_{u(x)}w(x)U_{u(x)}^+ \equiv w_0(x) = \exp\left\{\Omega - \beta(x)\int d^3x'\hat{\varepsilon}(x') + \right.$$
$$\left. + \beta(x)\sum_a \nu_a(x)\int d^3x'\hat{\rho}_a(x')\right\}, \tag{6.1.13}$$

où

$$\beta(x) = Y_0(x), \quad \nu_a(x) = \frac{1}{2}\frac{Y_k^2(x)}{Y_0^2(x)} - \frac{Y_a(x)}{Y_0(x)}$$

(la grandeur $\beta^{-1}(x)$ est la température locale, $m_a\nu_a(x)$ le potentiel chimique local, m_a étant la masse d'une particule de l'a-ième composant). C'est pourquoi, on peut écrire $\zeta_{ak}^{(0)}(x)$ comme

$$\zeta_{ak}^{(0)}(x)=\operatorname{Sp} w_0(x)\,U_{u(x)}\,\hat{\zeta}_{ak}(0)\,U_{u(x)}^{+}.$$

En utilisant les propriétés des transformations de Galilée des opérateurs des densités des flux de masse de l'a-ième composant $j_{ak}^{(m)}\equiv j_{ak}$, de l'impulsion t_{ik} et de l'énergie q_k (2.3.28), on a

$$\begin{aligned}
&U_u\hat{j}_{ak}(x)U_u^{+}=\hat{j}_{ak}(x)+u_k\hat{\rho}_a(x),\\
&U_u\hat{t}_{ik}(x)U_u^{+}=\hat{t}_{ik}(x)+u_i\hat{\pi}_k(x)+u_k\hat{\pi}_i(x)+u_iu_k\hat{\rho}(x),\qquad(6.1.14)\\
&U_u\hat{q}_k(x)U_u^{+}=\hat{q}_k(x)+u_i\hat{t}_{ik}(x)+u_k\hat{\varepsilon}(x)+u_ku_i\hat{\pi}_i(x)+\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}u^2(\hat{\pi}_k(x)+u_k\rho(x))
\end{aligned}$$

et en remarquant que $\operatorname{Sp} w_0\hat{q}_k=\operatorname{Sp} w_0\hat{j}_{ak}=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&j_{ak}^{(0)}(x)=\rho_a(x)\,u_k(x),\\
&t_{ik}^{(0)}(x)=p(x)\,\delta_{ik}+\rho(x)\,u_i(x)\,u_k(x),\qquad(6.1.15)\\
&q_k^{(0)}(x)=p(x)\,u_k(x)+\varepsilon_0(x)\,u_k(x)+\frac{1}{2}\rho(x)\,u^2(x)\,u_k(x),
\end{aligned}$$

où $p(x)$ est la pression donnée par la formule

$$\operatorname{Sp} w_0(x)\,\hat{t}_{ik}(0)=p(x)\,\delta_{ik}.$$

Comme nous allons le voir au paragraphe suivant, cette pression est égale à $p=-\frac{\Omega}{\mathcal{V}}\beta^{-1}$ et

$$\varepsilon_0(x)=\operatorname{Sp} w_0(x)\,\hat{\varepsilon}(0).$$

En vertu de (6.1.8), (6.1.13) la densité de l'énergie $\varepsilon(x)$ est liée à $\varepsilon_0(x)$ par la relation

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0(x)+\frac{1}{2}\rho(x)\,u^2(x).$$

Ainsi $\varepsilon_0(x)$ est la densité de l'énergie de l'élément de liquide dans le système de référence où cet élément est au repos.

En utilisant les formules (6.1.15) pour $j_{ak}^{(0)}$, $t_{ik}^{(0)}$, $q_k^{(0)}$, on peut récrire les équations (6.1.5) comme suit

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k},\quad \frac{\partial\rho_a}{\partial t}+\frac{\partial\rho_a u_k}{\partial x_k}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0+\frac{1}{2}\rho u^2\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\rho u_k\left(\gamma+\frac{1}{2}u^2\right),
\end{aligned}\qquad(6.1.16)$$

où γ est l'enthalpie de l'unité de masse

$$\gamma=(p+\varepsilon_0)/\rho.$$

La dernière de ces équations peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_k} = -\gamma\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \qquad (6.1.17)$$

Les équations (6.1.16) sont les *équations de l'hydrodynamique d'un liquide parfait* (la première est appelée *équation d'Euler*).

La troisième des équations (6.1.16) (ou l'équation équivalente (6.1.17)) peut également s'écrire comme (voir le paragraphe 4.2.2)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (6.1.18)$$

où s est l'entropie de l'unité de volume du liquide

$$s = -\mathcal{V}^{-1}\,\mathrm{Sp}\, w_0 \ln w_0 = \beta\rho\left(\gamma - \sum_a \nu_a \frac{\rho_a}{\rho}\right).$$

L'équation (6.1.18) signifie que l'entropie de l'unité de masse d'un liquide lors de son mouvement ne change pas: en d'autres termes, le mouvement du liquide s'effectue sans dissipation d'énergie.

6.1.2. Equations de l'hydrodynamique d'un liquide non parfait. Nous allons maintenant passer au calcul des grandeurs $\zeta_{\alpha k}^{(1)}(x)$ figurant dans l'expression (6.1.2) pour $\zeta_{\alpha k}(x)$:

$$\zeta_{\alpha k}^{(1)}(x) = \mathrm{Sp}\, \sigma_0^{(1)}(x)\, \hat{\zeta}_{\alpha k}(0).$$

Nous allons montrer préalablement que pour l'opérateur

$$w^{(1)}(x) = -\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} w \int_0^1 d\lambda \int d^3x' x'_j \left(\hat{\zeta}_\alpha(x';\lambda) - \langle \hat{\zeta}_\alpha \rangle\right)$$

figurant dans l'expression de $\sigma_0^{(1)}(x)$ on a les relations

$$\mathrm{Sp}\, w^{(1)}(x)\, \hat{\zeta}_\alpha(0) = 0, \quad \mathrm{Sp}\, w^{(1)}(x)\, \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = 0. \qquad (6.1.19)$$

Remarquons à cet effet que si le hamiltonien est invariant par rapport à la réflexion de l'espace et à l'inversion du temps, on doit avoir les relations suivantes (voir le paragraphe 2.3.2)

$$T\mathcal{P}\hat{\zeta}_\alpha(x)(T\mathcal{P})^{-1} = \hat{\zeta}_\alpha^*(-x), \qquad (6.1.20)$$

où $\mathcal{P}$ et T sont les opérateurs de l'inversion spatiale et temporelle (pour $\alpha = 0$, cette relation équivaut à l'invariance du hamiltonien par rapport aux transformations $\mathcal{P}$ et T; pour $\alpha = 1, 2, \ldots,$ elle peut être vérifiée directement si l'on utilise l'expression explicite des opérateurs $\hat{\pi}_k(x)$, $\hat{\rho}_a(x)$).

En vertu des formules (2.2.39)-(2.2.41) reliant les opérateurs $\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)$ aux opérateurs $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ et à partir de (6.1.20) on voit que les opérateurs $\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)$ satisfont à des relations analogues à (6.1.20):

$$T\mathcal{P}\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)(T\mathcal{P})^{-1} = \hat{\zeta}^*_{\alpha k}(-x). \quad (6.1.21)$$

C'est pourquoi, à partir de (4.2.37) et (6.1.20), on a

$$\mathrm{Sp}\, w^{(1)}\hat{\zeta}_\alpha(0) = \mathrm{Sp}\, T\mathcal{P}w^{(1)}(T\mathcal{P})^{-1}\, T\mathcal{P}\hat{\zeta}_\alpha(0)(T\mathcal{P})^{-1} = -(\mathrm{Sp}\, w^{(1)}\hat{\zeta}_\alpha(0))^*,$$

et comme la grandeur $\mathrm{Sp}\, w^{(1)}\hat{\zeta}_\alpha(0)$ est réelle, on a $\mathrm{Sp}\, w^{(1)}(x)\hat{\zeta}_\alpha(0) = 0$. D'une manière analogue, on peut montrer que $\mathrm{Sp}\, w^{(1)}(x)\hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = 0$.

Ainsi, en vertu de (6.1.19), (4.2.42) la grandeur $\zeta^{(1)}_{\alpha k}(x)$ peut s'écrire comme suit

$$\zeta^{(1)}_{\alpha k}(x) = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{Sp}\, e^{i\mathcal{H}\tau}\hat{Q}(Y)\, e^{-i\mathcal{H}\tau}\hat{\zeta}_{\alpha k}(0), \quad (6.1.22)$$

où

$$\hat{Q}(Y) = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j}\int_0^1 d\lambda \int d^3x' w(x)\,(\hat{\zeta}_{\alpha j}(x'; \lambda) - \langle\hat{\zeta}_{\alpha j}\rangle).$$

L'opérateur $\hat{Q}$ dépend des forces thermodynamiques Y_α.

Nous allons montrer que

$$U_u\hat{Q}(Y)U_u^+ = \hat{Q}(Y'), \quad (6.1.23)$$

où U_u est l'opérateur unitaire donné par la formule (6.1.7), et les forces thermodynamiques Y'_α sont liées à Y_α par les relations (6.1.6). Notons à cet effet qu'en vertu de (4.2.41),

$$\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial \zeta^{(0)}_{\alpha j}}{\partial \zeta_\beta} = -\left(\frac{\partial Y_\beta}{\partial t}\right)^{(1)}, \quad (6.1.24)$$

où les grandeurs $\left(\frac{\partial Y_\beta}{\partial t}\right)^{(1)} \equiv \frac{\partial Y_\beta}{\partial \zeta_\alpha}\left(\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t}\right)^{(1)}$ sont obtenues à l'aide des équations de l'hydrodynamique d'un liquide parfait:

$$\left(\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t}\right)^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta^{(0)}_{\alpha k}(x). \quad (6.1.25)$$

En utilisant les formules (6.1.24), (6.1.8), (6.1.6), il est facile de voir que

$$U_u\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j}\hat{\zeta}_{\alpha j}(x)U_u^+ = \frac{\partial Y'_\alpha}{\partial x_j}\hat{\zeta}_{\alpha j}(x) + u_j\frac{\partial Y'_\alpha}{\partial x_j}\hat{\zeta}_\alpha(x),$$

$$U_u\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial \zeta^{(0)}_{\alpha j}}{\partial \zeta_\beta}\hat{\zeta}_\beta(x)U_u^+ = -\left(\frac{\partial Y'_\alpha}{\partial t}\right)^{(1)}\hat{\zeta}_\alpha(x)$$

et par conséquent

$$U_u \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} \hat{\zeta}_{\alpha j}(x) U_u^+ = \frac{\partial Y'_\alpha}{\partial x_j} \hat{\zeta}_{\alpha j}(x) - \hat{\zeta}_\alpha(x) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(1)} + u \frac{\partial}{\partial x} \right\} Y'_\alpha,$$

où l'on a adopté la désignation abrégée $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(1)} A = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{(1)}$. Comme en vertu des équations (6.1.16), (6.1.25)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(1)} + u' \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(1)} \Big|_{u(x) \to u(x) - u'},$$

on a

$$U_u \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k} \hat{\zeta}'_{\alpha k}(x) U_u^+ = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k} \hat{\zeta}'_{\alpha k}(x) \Big|_{Y \to Y'},$$

d'où la formule (6.1.23).

Nous allons maintenant prendre pour u la vitesse $u(x)$. En vertu de (6.1.22), (6.1.23), on a alors

$$U_{u(x)} \hat{Q}(Y) U_{u(x)}^+ = \hat{Q}(Y) \,|_{u(x)=0} \equiv \hat{Q}_0. \qquad (6.1.26)$$

Soulignons que dans cette formule, pour calculer $\hat{Q}|_{u(x)=0}$, nous supposons que $u(x) = 0$, mais nous n'avons pas le droit de supposer que $\partial u(x)/\partial x_k$ est nul. Pour trouver l'opérateur $\hat{Q}_0$, il y a lieu de trouver les grandeurs $\hat{\zeta}_\beta(x)\,(\partial \zeta_{\alpha j}^{(0)}/\partial \zeta_\beta)_{u(x)=0}$ qui déterminent les opérateurs $\hat{\zeta}'_{\alpha l}$ pour $u(x) = 0$. Il est facile de voir qu'en vertu de (6.1.15), on a

$$\frac{\partial q_k^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \Big|_{u(x)=0} \hat{\zeta}_\alpha(x) = \gamma \hat{\pi}_k(x), \qquad \frac{\partial j_{ak}^{(0)}}{\partial \zeta_\beta} \Big|_{u(x)=0} \hat{\zeta}_\beta(x) = \frac{\rho_a}{\rho} \hat{\pi}_k(x),$$

$$\frac{\partial t_{ik}^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \Big|_{u(x)=0} \hat{\zeta}_\alpha(x) = \delta_{ik} \left(\sum_a \frac{\partial p}{\partial \rho_a} \hat{\rho}_a(x) + \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon}(x) \right),$$

où γ est l'enthalpie de l'unité de masse et p la pression (les dérivées $\partial p/\partial \zeta_\alpha$ sont calculées pour des valeurs fixes des densités $\zeta_{\alpha'}$, $\alpha' \neq \alpha$). C'est pourquoi, on peut écrire $\hat{Q}_0$ comme suit :

$$\hat{Q}_0 = w_0 \int_0^1 d\lambda \int d^3x' \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \hat{q}'_k(x'; \lambda) - \sum_a \frac{\partial \beta \nu_a}{\partial x_k} \hat{j}'_{ak}(x'; \lambda) - \right.$$
$$- \frac{1}{2} \beta \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) (\hat{t}_{lk}(x'; \lambda) - \langle \hat{t}_{lk} \rangle_0) -$$
$$\left. - \beta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\hat{t}(x'; \lambda) - \langle \hat{t} \rangle_0) \right\}, \qquad (6.1.27)$$

où

$$\hat{q}'_k(x) = \hat{q}_k(x) - \gamma\hat{\pi}_k(x), \quad \hat{j}'_{ak}(x) = \hat{j}_{ak}(x) - \frac{\rho_a}{\rho}\hat{\pi}_k(x),$$
$$\hat{t}(x) = \frac{1}{3}\hat{t}_{kk}(x) - \sum_a \frac{\partial p}{\partial \rho_a}\hat{\rho}_a(x) - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\hat{\varepsilon}(x)$$

et

$$\hat{a}(x;\lambda) = w_0^{-\lambda}\hat{a}(x)w_0^{\lambda}, \quad \langle\hat{a}\rangle_0 = \mathrm{Sp}\, w_0\hat{a}$$

pour chacun des opérateurs $\hat{a}(x) = \hat{q}'_k(x), \hat{j}'_{ak}(x), \hat{t}_{lk}(x)$.

Calculons les grandeurs $\zeta^{(1)}_{ak}(x)$ que nous appellerons *densités des flux dissipatifs*. En vertu de (6.1.22), (6.1.26) on a

$$\zeta^{(1)}_{ak}(x) = \int_{-\infty}^{0} d\tau\, \mathrm{Sp}\, e^{i\mathscr{H}\tau}\hat{Q}_0 e^{-i\mathscr{H}\tau} U_{u(x)}\zeta_{ak}(0) U^+_{u(x)}.$$

En utilisant les propriétés de transformation (6.1.14) des densités des flux pour les transformations de Galilée et l'expression (6.1.27), on obtient compte tenu de l'isotropie du liquide:

$$t^{(1)}_{ik}(x) = -\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) - \zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l},$$
$$j^{(1)}_{ak}(x) = A'_a\frac{\partial\beta}{\partial x_k} - \sum_{a'} A_{aa'}\frac{\partial \beta \nu_{a'}}{\partial x_k}, \qquad (6.1.28)$$
$$q^{(1)}_k(x) = u_i t^{(1)}_{ik}(x) + q'_k, \quad q'_k = \frac{\bar{\varkappa}}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial x_k} - \sum_a A_a\frac{\partial\beta\nu_a}{\partial x_k}.$$

Dans les formules (6.1.28) les grandeurs η, ζ qui sont les *coefficients de première et de deuxième viscosité* sont données par

$$\eta = (\hat{t}_{12};\hat{t}_{12}), \quad \zeta = (\hat{t};\hat{t}), \qquad (6.1.29)$$

où l'on a utilisé la désignation générale (voir la formule (4.4.20))

$$(\hat{a};\hat{b}) = \beta\int_{-\infty}^{0} d\tau \int d^3x \int_0^1 \mathrm{Sp}\, e^{i\mathscr{H}\tau}\hat{a}'(x;\lambda)e^{-i\mathscr{H}\tau}\hat{b}(0)w_0\,d\lambda,$$
$$\hat{a}'(x) = \hat{a}(x) - \beta\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\hat{\zeta}_\alpha(x).$$

Comme nous allons le voir plus loin, les grandeurs A_a, A'_a, $A_{aa'}$, $\bar{\varkappa}$ sont liées aux coefficients de diffusion, de diffusion thermique et de conductibilité thermique. Elles sont déterminées par les formules suivantes

$$A_a = \beta^{-1}(\hat{j}_{a1};\hat{q}_1), \quad A'_a = \beta^{-1}(\hat{q}_1;\hat{j}_{a1}),$$
$$A_{aa'} = \beta^{-1}(\hat{j}_{a'1};\hat{j}_{a1}), \quad \bar{\varkappa} = \beta(\hat{q}_1;\hat{q}_1). \qquad (6.1.30)$$

Il y a lieu de noter que dans les coefficients cinétiques figurent les fonctions de corrélation non pas des densités de flux $\langle\hat{\zeta}_{ak}(x, \tau; \lambda)\, \hat{\zeta}_{a'k'}(0)\rangle$ mais les grandeurs $\langle\hat{\zeta}'_{ak}(x, \tau; \lambda)\, \hat{\zeta}'_{a'k'}(0)\rangle$, où $\hat{\zeta}'_{ak}$ sont liés à $\hat{\zeta}_{ak}$ par les relations (6.1.27) (ici $\langle ab\rangle = \mathrm{Sp} w \times (a - \langle a\rangle)\, b$, $\langle a\rangle = \mathrm{Sp} wa$). Ceci est lié à ce que les grandeurs

$$K(\tau) \equiv \int d^3x \int_0^1 d\lambda\, \langle\hat{\zeta}_{ak}(x, \tau; \lambda)\, \hat{\zeta}_{a'k'}(0)\rangle,$$

à la différence des grandeurs

$$K'(\tau) \equiv \int d^3x \int_0^1 d\lambda\, \langle\hat{\zeta}'_{ak}(x, \tau; \lambda)\, \hat{\zeta}_{a'k'}(0)\rangle,$$

ne tendent pas vers zéro pour $\tau \to -\infty$. On peut s'en rendre compte en utilisant la relation ergodique

$$e^{-i\mathscr{H}\tau} w \int_0^1 d\lambda \int d^3x\, (\hat{\zeta}_{ak}(x, \lambda) - \langle\hat{\zeta}_{ak}\rangle)\, e^{i\mathscr{H}\tau} \xrightarrow[\tau \to -\infty]{} -\frac{\partial w}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta^{(0)}_{ak}}{\partial Y_\beta}$$

qui découle de la relation ergodique fondamentale (2.4.24) pour l'opérateur statistique d'un système spatialement homogène [89]. En effet, il en résulte

$$K(\tau) \xrightarrow[\tau \to -\infty]{} -\frac{\partial \zeta^{(0)}_{a'k'}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta^{(0)}_{ak}}{\partial Y_\beta} \equiv C, \qquad (6.1.31)$$

et par conséquent, en vertu de (6.1.31), on a

$$K'(\tau) = K(\tau) - C \xrightarrow[\tau \to -\infty]{} 0.$$

C'est pourquoi les intégrales $\int_{-\infty}^{0} d\tau K'(\tau)$, donnant les coefficients cinétiques ne contiennent pas de grandeurs divergentes (de termes séculaires).

Nous allons montrer que

$$A'_a = A_a, \quad A_{aa'} = A_{a'a}. \qquad (6.1.32)$$

Remarquant que lors de la réflexion de l'espace-temps, les opérateurs j_{ak} et q_k sont transformés suivant les formules (6.1.21), on a

$$\mathrm{Sp}\, w_0 e^{i\mathscr{H}\tau} \hat{\zeta}_{ak}(x; \lambda)\, e^{-i\mathscr{H}\tau} \hat{\zeta}_{\beta l}(0) =$$
$$= (\mathrm{Sp}\, w_0 \hat{\zeta}_{ak}(-x, \lambda)\, e^{i\mathscr{H}\tau} \hat{\zeta}_{\beta l}(0)\, e^{-i\mathscr{H}\tau})^* =$$
$$= \mathrm{Sp}\, w_0 e^{i\mathscr{H}\tau} \hat{\zeta}_{\beta l}(0)\, e^{-i\mathscr{H}\tau} w_0^{\lambda} \hat{\zeta}_{ak}(-x)\, w_0^{-\lambda}$$

et par conséquent,

$$\operatorname{Sp} w_0 e^{i\mathcal{H}\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(x;\ \lambda)\, e^{-i\mathcal{H}\tau} \hat{\zeta}_{\beta l}(0) = \operatorname{Sp} w_0 e^{i\mathcal{H}\tau} \hat{\zeta}_{\beta l}(x;\ \lambda)\, e^{-i\mathcal{H}\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(0),$$

d'où l'on obtient les formules (6.1.32).

Les relations (6.1.32) expriment le *principe de symétrie des coefficients cinétiques d'Onsager.*

Les formules (6.1.29), (6.1.30) se simplifient si l'on utilise la relation

$$\int_{-\infty}^{0} d\tau \int_{0}^{1} d\lambda \operatorname{Sp} w_0 \{e^{i\mathcal{H}\tau} A(\lambda)\, e^{-i\mathcal{H}\tau} B + e^{i\mathcal{H}\tau} B(\lambda)\, e^{-i\mathcal{H}\tau} A\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \operatorname{Sp} w_0 e^{i\mathcal{H}\tau} A e^{-i\mathcal{H}\tau} B, \quad A(\lambda) = w_0^{-\lambda} A w_0^{\lambda} \qquad (6.1.33)$$

que l'on peut facilement démontrer en écrivant l'expression des traces dans le système des vecteurs propres du hamiltonien total $\mathcal{H}$.

En introduisant la désignation

$$\langle ab\rangle_{x,\,t} = \operatorname{Sp} w_0 (a(x,\ t) - \langle a\rangle_0)(b(0) - \langle b\rangle_0), \qquad (6.1.34)$$

les formules (6.1.29), (6.1.30), en vertu de (6.1.32), (6.1.33), peuvent s'écrire comme *)

$$\eta = \frac{1}{2}\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x\, \langle t_{12} t_{12}\rangle_{x,\,\tau}, \qquad \zeta = \frac{1}{2}\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x\, \langle tt\rangle_{x,\,\tau},$$

$$A_a = A'_a = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x\, \langle q'_1 j'_{a1}\rangle_{x,\,\tau}, \qquad (6.1.35)$$

$$A_{aa'} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x\, \langle j'_{1a} j'_{1a'}\rangle_{x,\,\tau}, \qquad \overline{\varkappa} = \frac{\beta^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x\, \langle q'_1 q'_1\rangle_{x,\,\tau}.$$

En vertu de (6.1.31), la composante de Fourier $K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} K(\tau)$ a une singularité en forme de delta pour $\omega = 0$:

$$K(\omega) \approx C\delta(\omega).$$

C'est pourquoi on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau K'(\tau) = \lim_{\omega \to \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} K(\tau).$$

*) Les formules du type (6.1.35) donnant les coefficients cinétiques ont été obtenues dans [61], [82], [57], [95].

Cette relation permet d'exprimer les coefficients cinétiques à l'aide des fonctions de corrélation des flux $\hat{\zeta}_{ak}$. Par exemple:

$$\bar{\varkappa} = \frac{\beta^2}{2} \lim_{\omega \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int d^3x \langle q_1 q_1 \rangle_{x, \tau}.$$

Il est facile de montrer, à partir de (6.1.35), que les grandeurs η, ζ, $\ddot{\varkappa}$ sont positives.

Comme les opérateurs des densités des flux de masse sont égaux à

$$\hat{j}_{ak}(x) = -\frac{i}{2}\left(\psi_a^+(x)\frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_a^+(x)}{\partial x_k}\psi_a(x)\right)$$

(ψ_a, ψ_a^+ étant les opérateurs de création et d'annihilation des particules du type a), on a

$$\hat{\pi}_k(x) = \sum_a \hat{j}_{ak}(x).$$

Compte tenu de ce que $\sum_c \rho_a = \rho$, on a

$$\sum_a \hat{\hat{j}}_{ak}(x) = 0.$$

C'est pourquoi les coefficients cinétiques A_a, $A_{aa'}$ satisfont aux relations suivantes

$$\sum_a A_a = 0, \qquad \sum_{a'} A_{aa'} = 0. \tag{6.1.36}$$

Ainsi tous les coefficients A_a, $A_{aa'}$ ne sont pas indépendants.

En utilisant les expressions (6.1.28) pour les densités dissipatives des flux, on peut récrire les équations (6.1.1) comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l},$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho_a}{\partial x_k} = -\rho_a \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(A_a \frac{\partial \beta}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{a'} A_{aa'}\frac{\partial \beta \nu_{a'}}{\partial x_k}, \tag{6.1.37}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_k} = -\rho\gamma \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \\ - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} t_{ik}^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\bar{\varkappa}}{\beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_a A_a \frac{\partial \beta \nu_a}{\partial x_k}.$$

Ces équations forment le système d'équations de l'hydrodynamique d'un liquide à composants multiples. (La première de ces équations est appelée *équation de Navier-Stokes.*) Ces équations tiennent compte des processus dissipatifs ayant lieu dans les liquides en approxima-

tion quadratique par rapport au gradient, et, par conséquent, elles ne sont vraies que dans le cas où les gradients sont petits.

On voit que les coefficients de transfert η, ζ, $\bar{\varkappa}$, A_a, $A_{aa'}$, s'expriment sous une forme générale par des fonctions de corrélation temporelles d'équilibre (6.1.34). Le calcul de ces grandeurs dans le cas d'un liquide est encore plus compliqué que celui du potentiel thermodynamique d'un liquide. Cependant, il est important qu'il existe des relations générales reliant les coefficients de transfert aux fonctions de corrélation. Si l'interaction entre les particules est faible (ou si la densité des particules est faible), on peut, pour le calcul des fonctions de corrélation, utiliser la méthode exposée dans le paragraphe 5.4.3. Comme nous l'avons vu, le problème revient alors à la résolution de l'équation cinétique. Ceci se trouve en accord avec le fait que pour les gaz, le calcul des coefficients cinétiques revient à la résolution de l'équation de Boltzmann.

Pour un liquide à un composant, les équations (6.1.37) s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l},\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_k}{\partial x_k}=0, \tag{6.1.38}$$
$$\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t}+u_k\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x_k}=-\rho\gamma\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}t_{ik}^{(1)}-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\varkappa}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial x_k},$$

où $\varkappa=\bar{\varkappa}$, η, ζ sont donnés par les formules (6.1.35). (Pour les liquides à un composant, la grandeur $\varkappa$ est le coefficient de conductibilité thermique.)

Considérons enfin les équations de l'hydrodynamique d'un liquide à deux composants [76]. En vertu des formules (6.1.36), la densité des flux de masse des deux composants du liquide peut s'écrire comme suit

$$j_{1k}=\rho Cu_k+i_k,\quad j_{2k}=\rho(1-C)u_k-i_k, \tag{6.1.39}$$

où $C=\rho_1/\rho$ est la concentration du premier composant et i_k le flux dissipatif de masse du premier composant, qui peut s'écrire comme suit

$$i_k=-\rho\mathscr{D}\left(\frac{\partial C}{\partial x_k}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x_k}+\frac{k_p}{p}\frac{\partial p}{\partial x_k}\right), \tag{6.1.40}$$
$$\mathscr{D}=\frac{\beta}{\rho}A_{11}\left(\frac{\partial\nu}{\partial C}\right)_{p,\,T},\quad k_p=p\left(\frac{\partial\nu}{\partial p}\right)_{C,\,T}\Big/\left(\frac{\partial\nu}{\partial C}\right)_{p,\,T},$$
$$k_T\mathscr{D}=\frac{\beta}{\rho}A_1-\frac{1}{\rho}A_{11}\left(\beta\nu-\left(\frac{\partial\nu}{\partial T}\right)_{p,\,C}\right),\quad \nu=\nu_1-\nu_2,\quad \beta=T^{-1}.$$

(Nous avons tenu compte du fait que pour un liquide à deux composants, en vertu de (6.1.36), on a $A_{11}=-A_{12}=-A_{21}=A_{22}$, $A_1=-A_2$ et la grandeur ν est une fonction de trois variables

indépendantes C, p, T.) La grandeur $\mathcal{D}$ est appelée *coefficient de diffusion*, la grandeur $k_T\mathcal{D}$ le *coefficient de diffusion thermique* et $k_p\mathcal{D}$ le *coefficient de diffusion barométrique*.

En vertu de (6.1.28), la densité du flux dissipatif d'énergie q'_k est donnée par la formule suivante

$$q'_k = \left\{k_T\left(\frac{\partial \nu}{\partial C}\right)_{p,\,T} - T\left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_{p,\,C} + \nu\right\} i_k - \varkappa \frac{\partial T}{\partial x_k}, \qquad (6.1.41)$$

où $\varkappa$ est le coefficient de conductibilité thermique égal à

$$\varkappa = \frac{\bar{\varkappa} A_{11} T^2 - A_1^2}{A_{11} T^2}$$

($-\varkappa \nabla T$ est la densité du flux dissipatif d'énergie pour $i_k = 0$). Il est facile de voir à partir de la définition de A_1, A_{11} que $\varkappa > 0$.

Compte tenu de l'expression de la densité des flux dissipatifs (6.1.39)-(6.1.41), on peut, conformément à (6.1.37), écrire l'équation de l'hydrodynamique d'un liquide à deux composants sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial t} + u_k \frac{\partial C}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial i_k}{\partial x_k}, \qquad (6.1.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 + \rho\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\rho u_i\left(\gamma + \frac{u^2}{2}\right) + u_k t_{ki}^{(1)} + q'_i\right\}.$$

La dernière expression qui est la loi de la conservation de l'énergie, peut s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{s} = \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\zeta}{T}(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + \frac{\varkappa}{T^2}(\Delta T)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial C}\right)_{p,\,T}(T\rho\mathcal{D})^{-1} i^2,$$

$$\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{u} - \frac{\varkappa}{T}\nabla T + \left\{\left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_{p,\,C} - \frac{k_T}{T}\left(\frac{\partial \nu}{\partial C}\right)_{p,\,T}\right\}\boldsymbol{i}.$$

Cette relation exprime la loi de l'augmentation de l'entropie: la grandeur s représente la densité volumique de l'entropie, $\boldsymbol{s}$ étant la densité du flux d'entropie. Le second membre détermine la production de l'entropie.

6.1.3. Expression asymptotique basse fréquence des fonctions de Green hydrodynamiques. Dans le paragraphe 4.4.2 nous avons obtenu les formules générales permettant de trouver les expressions asymptotiques des fonctions de Green $G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$,

$$G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{0} dt \int d^3x \operatorname{Sp} w\,[\xi_i(\boldsymbol{x}, t), \xi_j(0)]$$

dans le domaine des ω et k petits. Dans le cas où les grandeurs ε_i coïncident avec les opérateurs des densités $\hat{\zeta}_\alpha(x)$ correspondant aux intégrales additives du mouvement $\int d^3x\hat{\zeta}_\alpha(x)$, la fonction de Green $G^{(+)}_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(k, \omega) \equiv G^+_{\alpha\beta}(k, \omega)$ est déterminée, en vertu de (4.4.32), dans le domaine des ω et k petits par la formule

$$G^{(+)}_{\alpha\beta}(k, \omega) \approx -Y_0 \frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\rho}\left(\frac{T(k)}{\omega - T(k) + i0}\right)_{\beta\rho} =$$
$$= Y_0 \frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\beta} - Y_0\omega\,(\omega - T(k) + i0)^{-1}_{\beta\rho}\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\rho}, \qquad (6.1.43)$$

où $\zeta_\alpha = \mathrm{Sp}\, w\hat{\zeta}_\alpha$ et la matrice $T(k)$ est trouvée en résolvant ensemble les équations (4.4.9), (4.4.7).

Considérons maintenant un liquide à un composant. Les grandeurs $\zeta_\alpha(x)$ seront alors des densités ε, π_k, ρ. Les grandeurs $\partial\zeta_\alpha/\partial Y_\rho$ figurant dans (6.1.43) peuvent s'exprimer en fonction du potentiel thermodynamique $\Omega = \Omega(Y_0, Y_4 - Y_k^2/2Y_0)$ (voir (6.1.10)). Comme $\zeta_\alpha = \partial \frac{\Omega}{\mathcal{V}} \Big/ \partial Y_\alpha$, on a

$$\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\rho} = \frac{\partial^2}{\partial Y_\rho\,\partial Y_\alpha}\frac{\Omega}{\mathcal{V}} \qquad (6.1.44)$$

Le problème revient alors à la recherche de la matrice $T_{\alpha\beta}(k)$ dans le domaine des k petits. A cet effet considérons les équations (4.4.7), (4.4.9) pour $\sigma_\alpha(k)$ et $T_{\alpha\beta}(k)$ dans lesquelles on développe ces grandeurs en série suivant les puissances de k:

$$\sigma_\alpha(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}_\alpha(k), \quad T_{\alpha\beta}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n)}_{\alpha\beta}(k),$$

où $\sigma^{(n)}_\alpha$, $T^{(n)}_{\alpha\beta}$ sont proportionnels à k^n. En substituant ces développements dans (4.4.7), (4.4.9), il est facile de voir que

$$\left.\begin{aligned} T^{(1)}_{\alpha\beta}(k) &= k_i \frac{\partial\zeta_{\alpha i}}{\partial\zeta_\beta}, \quad \zeta_{\alpha i} = \mathrm{Sp}\, w\hat{\zeta}_{\alpha i}(0), \\ T^{(2)}_{\alpha\beta}(k) &= ik_ik_lY_0^{-1}\frac{\partial Y_\beta}{\partial\zeta_\rho}(\zeta_{\alpha i};\ \zeta_{\rho l}). \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.45)$$

Puis, en utilisant les formules (6.1.29), (6.1.30) pour les coefficients cinétiques, on montre aisément que

$$\begin{aligned} T^{(2)}_{0\alpha}(k) &= ik^2Y_0^{-2}\varkappa\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\zeta_0}, \qquad T^{(2)}_{4\alpha}(k) = 0, \\ T^{(2)}_{j\alpha}(k) &= iY_0^{-1}\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\zeta_l}\left\{\eta\,(k^2\delta_{jl} - k_jk_l) = \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)k_jk_l\right\}. \end{aligned} \qquad (6.1.46)$$

En vertu de (6.1.15), les densités des flux à l'état d'équilibre statistique sont données par les formules

$$\zeta_{0k}=\frac{\Omega}{\mathcal{V}}\frac{Y_k}{Y_0^2}-\varepsilon_0\frac{Y_k}{Y_0}-\frac{1}{2}\rho Y_k Y_0^{-3}Y_l^2,$$

$$\zeta_{lk}=\frac{\Omega}{\mathcal{V}}Y_0^{-1}\delta_{lk}+\rho Y_k Y_l Y_0^{-2},\quad \zeta_{4k}=-\rho Y_k Y_0^{-1}$$

ou

$$\zeta_{\alpha k}=-\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{\Omega}{\mathcal{V}}\frac{Y_k}{Y_0}. \qquad (6.1.47)$$

Ainsi, la matrice $T^{(1)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ n'est déterminée que par le potentiel thermodynamique Ω. Quant à la matrice $T^{(2)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$, en vertu de (6.1.46), elle est donnée, non seulement par le potentiel thermodynamique Ω, mais également par les coefficients cinétiques, à savoir les coefficients de première et de deuxième viscosité η, ζ et le coefficient de conductibilité thermique $\varkappa$.

Comme on peut le voir à partir de (6.1.43), les pôles des fonctions de Green (par rapport à la variable ω) sont les zéros de l'équation

$$\det(\omega-T(\boldsymbol{k}))\equiv\left(\omega-\frac{ik^2\eta}{\rho}\right)^2\Delta(\boldsymbol{k},\ \omega)=0,$$

$$\Delta(\boldsymbol{k},\ \omega)=\omega^3-\omega\left\{S^2-\frac{i\varkappa\omega}{\rho C_V}-\frac{i\omega}{\rho}\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\right\}k^2-$$
$$-\varkappa\left\{\omega\frac{\frac{4}{3}\eta+\zeta}{\rho^2 C_V}-\frac{iS^2}{\rho C_p}\right\}k^4, \qquad (6.1.48)$$

où S est la vitesse du son et C_V, C_p sont les capacités calorifiques à volume constant et à pression constante

$$S=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{s/\rho},\quad C_V=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho,\quad C_p=\left(\frac{\partial\rho\gamma}{\partial T}\right)_p.$$

La solution des équations (6.1.48) par rapport à k s'écrit pour ω petits

$$k=\omega/S+ik',\ k'=\frac{i\omega^2}{2\rho S^3}\left\{\frac{4}{3}\eta+\zeta+\varkappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\right\}. \qquad (6.1.49)$$

Cette grandeur donne l'amortissement du son, dû à la viscosité et à la conductibilité thermique.

On voit que les fonctions de Green dans le domaine des ω et $\boldsymbol{k}$ petits ont des pôles correspondant aux ondes sonores faiblement amorties qui se propagent dans un liquide.

Les formules (6.1.43), (6.1.44), (6.1.45) déterminent entièrement le comportement asymptotique de la fonction de Green $G^{(+)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ dans le domaine des ω et $\boldsymbol{k}$ petits. Nous allons écrire ici

l'expression explicite des fonctions de Green $G_{\rho\rho}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$, $G_{\rho\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ [50]:

$$G_{\rho\rho}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{k^2\rho}{\Delta(\boldsymbol{k}, \omega)}\left(\omega + ik^2\frac{\varkappa}{\rho C_V}\right),$$
$$G_{\rho\varepsilon}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{k^2}{\Delta(\boldsymbol{k}, \omega)}\left\{\omega\gamma\rho + \frac{ik^2\varkappa}{\rho C_V}\left(\gamma\rho - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\right)\right\}. \quad (6.1.50)$$

Soulignons que les formules asymptotiques (6.1.50) sont vraies à la limite thermodynamique, lorsque $\omega \ll \tau_r^{-1}$ et $k \ll l^{-1}$ où τ_r est le temps d'établissement de l'équilibre statistique local et l la longueur du libre parcours moyen des particules (égale dans le cas d'un liquide à la distance moyenne entre les particules).

§ 6.2. Equations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide

6.2.1. Flux des grandeurs hydrodynamiques. Dans le paragraphe précédent, en utilisant l'idée générale de la description abrégée de l'état d'un système, nous avons obtenu les équations de l'hydrodynamique d'un liquide normal. D'une manière analogue, nous allons obtenir maintenant les équations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide (la démonstration microscopique de ces équations a pour la première fois été donnée par Bogolioubov [29]).

A la différence d'un liquide normal, un liquide superfluide est caractérisé par le fait que le nombre de particules avec une certaine impulsion (qui est nulle si le condensat est au repos) dans un certain intervalle de température est macroscopiquement grand. C'est pourquoi, l'état d'équilibre statistique d'un liquide superfluide est un état dont la symétrie par rapport aux transformations de gradient est spontanément perturbée (voir 2.3.1). La symétrie de l'état d'équilibre statistique d'un liquide superfluide étant perturbée, on ne peut utiliser pour décrire ce dernier, les équations de l'hydrodynamique d'un liquide normal.

Pour un liquide normal, nous avons obtenu les équations du mouvement en utilisant les propriétés de transformation par rapport aux transformations de Galilée des densités des flux de différentes grandeurs hydrodynamiques, liées aux propriétés de transformation (6.1.13) de l'opérateur statistique d'équilibre d'un liquide normal. Pour un liquide superfluide, la situation se complique notablement, car son opérateur statistique n'a pas de telles propriétés.

Comme l'état d'équilibre statistique d'un liquide superfluide est un état dont la symétrie est spontanément perturbée, il est tout naturel de le décrire en utilisant la méthode des valeurs quasi moyennes. A cet effet il y a lieu, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.2.1, d'introduire dans le hamiltonien figurant dans la distribution de

Gibbs le terme supplémentaire $\delta\mathcal{H} = \bar{\nu} \int d^3x \hat{f}(x)$, où $\hat{f}(x)$ est un certain opérateur (voir le § 3.2) tel que le hamiltonien modifié $\mathcal{H}_{\bar{\nu}} = \mathcal{H} + \delta\mathcal{H}$ ne commute pas avec l'opérateur du nombre de particules N, $[N, \mathcal{H}_{\bar{\nu}}] \neq 0$. La symétrie de l'état d'équilibre statistique par rapport aux transformations de Galilée sera alors perturbée (le hamiltonien $\mathcal{H}_{\bar{\nu}}$ n'aura pas les propriétés de transformation (2.3.26) par rapport aux transformations de Galilée), et c'est la raison pour laquelle dans le cas d'un liquide superfluide on ne peut utiliser la méthode du paragraphe précédent pour calculer des densités des flux qu'on doit connaître pour obtenir les équations de l'hydrodynamique.

Nous allons supposer que $\mathcal{H}_{\bar{\nu}}$, tout comme $\mathcal{H}$, commute avec l'opérateur de l'impulsion $[P_k, \mathcal{H}_{\bar{\nu}}] = 0$ (c'est-à-dire que la densité $\bar{\nu}\hat{f}(x)$ de la grandeur $\delta\mathcal{H}$ est un opérateur invariant par rapport à la translation). On a alors $[P_k, w] = 0$, où w est l'opérateur statistique d'équilibre correspondant au hamiltonien $\mathcal{H}_{\bar{\nu}}$:

$$w = \exp\{\Omega - Y_0\mathcal{H}' - Y_k P_k\}, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}_{\bar{\nu}} - \nu M, \quad \nu = \frac{\mu}{m} \tag{6.2.1}$$

(Y_0, Y_k, $-\nu Y_0 = Y_4$ sont les forces thermodynamiques caractérisant l'état d'équilibre statistique). Il est facile de voir que l'état décrit par l'opérateur statistique correspond au repos du condensat. En effet,

$$\mathrm{Sp}\, w\, [P_k, a_p^+] = p_k\, \mathrm{Sp}\, w\, a_p^+,$$

et comme le premier membre de l'égalité est nul, un nombre macroscopique de particules ne peut se trouver que dans un état avec une impulsion $p = 0$ (ce nombre est égal à $|\,\mathrm{Sp}\, w a_p^+\,|^2$, voir 3.2.1). Il y a lieu maintenant de trouver les valeurs moyennes des opérateurs des densités des flux de l'énergie q_k, de l'impulsion t_{ik} et de la masse j_k à l'état d'équilibre statistique, plus exactement, d'établir une relation entre ces grandeurs et le potentiel thermodynamique $\omega = \lim_{\bar{\nu}\to 0} \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \Omega/\mathcal{V}$ [85].

L'état (6.2.1) étant invariant par rapport à la translation ($[P_k, w] = 0$), les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{q}_k$, $\hat{t}_{ik}$, $\hat{j}_k$ sont déterminées en vertu de (2.2.39) - (2.2.41) par les formules

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{i}{2} \int d^3x\, x_k \langle [\hat{\varepsilon}(x), \hat{\varepsilon}(0)] \rangle, \\ t_{ik} &= -\langle \hat{\varepsilon}(0) \rangle \delta_{ik} - i \int d^3x\, x_k \langle [\hat{\varepsilon}(x), \pi_i(0)] \rangle \\ j_k &= -i \int d^3x\, x_k \langle [\hat{\varepsilon}(x), \hat{\rho}(0)] \rangle, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

où $\langle \ldots \rangle = \mathrm{Sp}\, w \ldots$ Cependant il est plus commode de calculer d'abord les grandeurs

$$t'_{ik} = -\langle \hat{\varepsilon}'(0)\rangle \delta_{ik} - i \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}'(x), \hat{\pi}_i(0)]\rangle,$$
$$q'_k = -\frac{i}{2} \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}'(x), \hat{\varepsilon}'(0)]\rangle, \quad (6.2.3)$$

où

$$\hat{\varepsilon}'(x) = \hat{\varepsilon}_{\bar{v}}(x) - \frac{\mu}{m}\hat{\rho}(x)$$

et $\hat{\varepsilon}_{\bar{v}}(x)$ est l'opérateur de densité d'« énergie » correspondant au « hamiltonien » $\mathscr{H}_{\bar{v}}$. Nous allons tout d'abord trouver t'_{ik}. Préalablement nous allons montrer que l'intégrale $\int d^3x x_k \hat{\pi}_i(x)$ figurant dans la formule pour t'_{ik} est un générateur du groupe des transformations linéaires arbitraires

$$x_i \to x'_i = a_{ik}x_k. \quad (6.2.4)$$

Remarquons à cet effet que les opérateurs $\psi(x)$ et $\psi'(x) = \psi(ax)|\det a|^{1/2}$ satisfont aux mêmes relations de permutation. C'est pourquoi elles sont liées entre elles par la transformation unitaire U_a qui agit dans l'espace de Hilbert

$$U_a\psi(x)U_a^+ = \psi'(x) = |\det a|^{1/2}\psi(ax). \quad (6.2.5)$$

Cette transformation n'est pas liée aux propriétés de symétrie des équations du mouvement et ne donne donc pas lieu à des lois de la conservation. Considérant les transformations infinitésimales (6.2.4)

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}, \quad |\xi| \ll 1$$

et en supposant que

$$U_a = 1 - i\xi_{ki}\Gamma_{ik},$$

(où Γ_{ik} est le générateur du groupe de transformations (6.2.4)), on trouve à partir de (6.2.5)

$$[\Gamma_{ik}, \psi(x)] = ix_i\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\psi(x),$$

d'où

$$\Gamma_{ik} = \int d^3x x_i \hat{\pi}_k(x). \quad (6.2.6)$$

Compte tenu de (6.2.6), on peut écrire la formule (6.2.3) pour t'_{ik} comme suit

$$t'_{ik} = -\langle \hat{\varepsilon}'(0)\rangle\delta_{ik} - i\langle[\Gamma_{ki}, \hat{\varepsilon}'(0)]\rangle. \quad (6.2.7)$$

Le potentiel thermodynamique Ω, en vertu de (6.2.1), est déterminé par la formule

$$e^{-\Omega} = \mathrm{Sp}\exp\left\{-\int_{\mathcal{V}} d^3x\hat{h}(x)\right\}, \quad \hat{h}(x) = Y_0\hat{\varepsilon}'(x) + Y_k\hat{\pi}_k(x).$$

Pour calculer t'_{ik} considérons la transformation unitaire de l'opérateur $\hat{h}(x)$

$$U_a\hat{h}(x)U_a^+ \equiv \hat{h}_a(ax)|\det a|. \qquad (6.2.8)$$

(Cette formule permet de trouver l'opérateur $\hat{h}_a(x)$.) Il est évident que

$$e^{-\Omega} = \mathrm{Sp}\,U_a\exp\left\{-\int_{\mathcal{V}} d^3x\hat{h}(x)\right\}U_a^+ = \mathrm{Sp}\exp\left\{-\int_{\mathcal{V}_a} d^3x\,\hat{h}_a(x)\right\},$$

où $\mathcal{V}_a=\mathcal{V}\,|\det a|$. Comme Ω est proportionnel à $\mathcal{V}$, on a

$$\exp(-\Omega/|\det a|) = \mathrm{Sp}\exp\left\{-\int_{\mathcal{V}} d^3x\hat{h}_a(x)\right\}.$$

Compte tenu de ce que $a_{kl} = \delta_{kl} + \xi_{kl}$, $|\xi_{kl}| \ll 1$, on obtient

$$\left\langle\frac{\partial\hat{h}_a(0)}{\partial\xi_{kl}}\right\rangle_{\xi=0} = \omega_{\mathrm{v}}\delta_{kl}, \quad \omega_{\mathrm{v}} = \lim_{\mathcal{V}\to\infty}\Omega/\mathcal{V}.$$

D'un autre côté, comme pour des ξ_{kl} petits $U_a = 1 - i\xi_{kl}\Gamma_{lk}$, on a en vertu de (6.2.8)

$$i[\Gamma_{lk}, \hat{h}(0)] = \left(\frac{\partial\hat{h}_a(0)}{\partial\xi_{kl}}\right)_{\xi=0} - \delta_{kl}\hat{h}(0).$$

Donc

$$i\langle[\Gamma_{lk}, \hat{h}(0)]\rangle + \delta_{kl}\langle\hat{h}(0)\rangle = \omega_{\mathrm{v}}\delta_{kl}.$$

En y substituant l'expression ci-dessus pour $\hat{h}(x)$ et compte tenu de (6.2.7), on trouve

$$t'_{ik} = -\frac{\omega_{\mathrm{v}}}{Y_0}\delta_{ik} + \frac{Y_l}{Y_0}\{\delta_{ik}\langle\hat{\pi}_l(0)\rangle + i\langle[\Gamma_{ki}, \hat{\pi}_l(0)]\rangle\}.$$

A partir de la relation (2.3.27) on obtient immédiatement que

$$\langle[\Gamma_{ki}, \hat{\pi}_l(0)]\rangle = i\delta_{kl}\langle\hat{\pi}_i(0)\rangle + i\delta_{ik}\langle\hat{\pi}_l(0)\rangle.$$

Puis en remarquant que

$$\langle\hat{\pi}_i(0)\rangle = \partial\omega_{\mathrm{v}}/\partial Y_i,$$

on trouve finalement

$$t'_{ik} = -\frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega_{\mathrm{v}}Y_k}{Y_0}. \qquad (6.2.9)$$

Nous allons maintenant passer au calcul de q'_k. En utilisant à cet effet la formule

$$[w,\ a(x)] = -w\int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda}a(x;\ \lambda), \quad a(x;\ \lambda) = w^{-\lambda}a(x)\,w^{\lambda}$$

ou

$$[w,\ a(x)] = w\int_0^1 d\lambda\,[\ln w,\ a(x;\ \lambda)],$$

on trouve

$$[w,\ \hat{\varepsilon}'(x)] = w\int_0^1 d\lambda\{-Y_0[\mathscr{H}',\ \hat{\varepsilon}'(x;\ \lambda)] - Y_k[P_k,\ \hat{\varepsilon}'(x;\ \lambda)]\}. \tag{6.2.10}$$

En vertu de (2.2.37)

$$i[\mathscr{H}',\ \hat{\varepsilon}'(x)] = -\partial\hat{q}'_k(x)/\partial x_k,$$

$$\hat{q}'_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\xi\,[\hat{\varepsilon}'(x-(1-\xi)x'),\ \hat{\varepsilon}'(x+\xi x')].$$

Comme $[w,\ P_k] = 0$, en vertu de (6.2.3) $q'_k = \operatorname{Sp} w\hat{q}'_k(x)$. Puis compte tenu de ce que

$$[P_k,\ \hat{\varepsilon}'(x)] = i\frac{\partial\hat{\varepsilon}'(x)}{\partial x_k},$$

on peut récrire la formule (6.2.10) comme suit

$$[w,\ \hat{\varepsilon}'(x)] =$$
$$= -i\frac{\partial}{\partial x_k}w\int_0^1 d\lambda\{Y_0(\hat{q}'_k(x;\ \lambda) - \langle\hat{q}'_k\rangle) + Y_k(\hat{\varepsilon}'(x;\ \lambda) - \langle\hat{\varepsilon}'\rangle)\}. \tag{6.2.11}$$

Remarquons maintenant que

$$i\int d^3x x_l\langle[\hat{\varepsilon}'(x),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)]\rangle = i\int d^3x x_l \operatorname{Sp}[w,\ \hat{\varepsilon}'(x)]\,\hat{\zeta}'_\alpha(0), \tag{6.2.12}$$

où $\hat{\zeta}'_0(x) = \hat{\varepsilon}'(x)$, $\hat{\zeta}'_k(x) = \hat{\pi}_k(x)$.

En substituant (6.2.11) à (6.2.12) et en intégrant par parties, on obtient compte tenu du principe d'affaiblissement des corrélations

$$-i\int d^3x x_l\langle[\hat{\varepsilon}'(x),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)]\rangle =$$
$$= \int_0^1 d\lambda\int d^3x \operatorname{Sp} w(\hat{\zeta}'_\alpha(x;\ \lambda) - \langle\hat{\zeta}'_\alpha\rangle)(Y_0\hat{q}'_l(0) + Y_l\hat{\varepsilon}'(0)).$$

Comme

$$\frac{\partial w}{\partial Y_\alpha} = -\int_0^1 d\lambda w\,(\hat{\zeta}'_\alpha(x,\lambda) - \langle\hat{\zeta}'_\alpha\rangle), \quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

on a

$$i\int d^3x x_l\,\langle[\hat{\varepsilon}'(x),\ \hat{\zeta}'_\alpha(0)]\rangle = Y_0 \frac{\partial q'_l}{\partial Y_\alpha} + Y_l \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_\alpha}, \qquad \varepsilon' = \langle\hat{\varepsilon}'(0)\rangle.$$

En posant dans cette formule $\alpha = 0$, $\alpha = k$, on obtient à partir des définitions (6.2.3)

$$-Y_0 \frac{\partial q'_l}{\partial Y_0} - Y_l \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_0} = 2q'_l, \qquad -Y_0 \frac{\partial q'_l}{\partial Y_k} - Y_l \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_k} = t'_{kl} + \varepsilon'\delta_{kl}. \tag{6.2.13}$$

La première de ces équations peut être envisagée comme une équation différentielle pour q'_l. En remarquant que $\varepsilon' = \partial\omega_{\bar{\nu}}/\partial Y_0$, on trouve

$$q'_l = -Y_l \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega_{\bar{\nu}}}{Y_0} + \frac{C_l}{Y_0}, \tag{6.2.14}$$

où C_l sont des constantes d'intégration pouvant dépendre de Y_k. En substituant (6.2.14) dans la seconde des équations (6.2.13) et compte tenu de l'expression (6.2.9) pour t'_{kl}, on obtient $\partial C_l/\partial Y_k = 0$, c'est-à-dire que C_l ne dépend pas non seulement de Y_0, mais également de Y_k. Comme, de plus, Y_k est la seule grandeur vectorielle à notre disposition, il y a lieu de poser $C_l = 0$. Ainsi

$$q'_l = -\left(\frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega_{\bar{\nu}} Y_l}{Y_0}\right)_\mu. \tag{6.2.15}$$

Le potentiel $\omega_{\bar{\nu}}$ est une fonction des variables Y_0, Y_k, $\nu = \frac{\mu}{m}$. En supposant que les variables Y_0, Y_k et $Y_4 = -Y_0\nu$ sont indépendantes, on a

$$\omega_{\bar{\nu}} = \omega_{\bar{\nu}}(Y_0,\ Y_k,\ Y_4) \equiv \omega_{\bar{\nu}}(Y_0,\ Y_k,\ -Y_0\nu),$$

et, en remarquant que

$$\partial\omega_{\bar{\nu}}/\partial Y_4 = \rho$$

(ρ étant la densité d'un liquide superfluide), on peut écrire les formules (6.2.15), (6.2.9) comme suit

$$q'_l = -\frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega_{\bar{\nu}} Y_l}{Y_0} + \rho \frac{\mu}{m} \frac{Y_l}{Y_0}, \qquad t'_{lk} = -\frac{\partial}{\partial Y_l} \frac{\omega_{\bar{\nu}} Y_k}{Y_0}. \tag{6.2.16}$$

Nous allons maintenant passer à la définition des grandeurs q_k, t_{ik}, j_k. Compte tenu de (6.2.2) et de la définition de l'opérateur $\hat{\varepsilon}'(x)$, on a

$$\hat{\varepsilon}'(x) = \hat{\varepsilon}(x) + \bar{v}\hat{j}(x) - \frac{\mu}{m}\hat{\rho}(x),$$

($\hat{\varepsilon}(x)$ étant l'opérateur de la densité d'énergie), on obtient

$$q'_k = q_k - i\frac{\mu}{m}\langle[\hat{\varepsilon}(0), \Gamma_k]\rangle + \frac{i}{2}\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\langle[\hat{\rho}(0), \Gamma_k]\rangle + \bar{v}D_k,$$

$$t'_{ik} = t_{ik} + \frac{\mu}{m}\rho\delta_{ik} - i\frac{\mu}{m}\langle[\hat{\pi}_i(0), \Gamma_k]\rangle + \bar{v}D_{ik}, \qquad (6.2.17)$$

où

$$D_k = i\langle[\hat{\varepsilon}(0), \int d^3x x_k \hat{j}(x)]\rangle - i\frac{\mu}{m}\langle[\hat{j}(0), \Gamma_k]\rangle + $$
$$+ \frac{1}{2}i\bar{v}\langle[\hat{j}(0), \int d^3x x_k \hat{j}(x)]\rangle,$$

$$D_{ik} = -\delta_{ik}\langle\hat{j}(0)\rangle + i\langle[\hat{j}(0), \Gamma_{ki}]\rangle, \qquad \Gamma_k = \int d^3x x_k \hat{\rho}(x).$$

(La grandeur Γ_k est le générateur du groupe de transformations de Galilée, voir (2.3.25).) Les commutateurs figurant dans les grandeurs D_k et D_{ik} sont, vu les relations de permutation canoniques, des opérateurs quasi locaux. C'est pourquoi leurs valeurs moyennes, conformément à la méthode des quasi-moyennes, ont une limite finie pour $\mathcal{V} \to \infty$ et $\bar{v} \to 0$ (on effectue d'abord le passage à la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$). D'où en passant dans (6.2.17) à la limite thermodynamique $\mathcal{V} \to \infty$ et en faisant ensuite tendre $\bar{v}$ vers zéro, on obtient en vertu de (6.2.16) les expressions suivantes pour les valeurs moyennes des densités de flux de l'énergie et de l'impulsion d'un liquide superfluide à l'état d'équilibre statistique:

$$q_k \equiv \{\hat{q}_k\} = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \rho\frac{\mu}{m}\frac{Y_k}{Y_0} + i\frac{\mu}{m}\{[\hat{\varepsilon}(0), \Gamma_k]\} -$$
$$-\frac{i}{2}\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\{[\hat{\rho}(0), \Gamma_k]\},$$

$$t_{ik} \equiv \{\hat{t}_{ik}\} = -\frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega Y_k}{Y_0} - \rho\frac{\mu}{m}\delta_{ik} + i\frac{\mu}{m}\{[\hat{\pi}_i(0), \Gamma_k]\}.$$

Γ_k étant le générateur des transformations de Galilée, on a

$$i[\hat{\varepsilon}(0), \Gamma_k] = \hat{\pi}_k(0), \qquad i[\hat{\pi}_i(0), \Gamma_k] = \delta_{ik}\hat{\rho}(0), \qquad [\hat{\rho}(0), \Gamma_k] = 0$$

(voir les formules (2.3.26)). Donc

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \rho\frac{\mu}{m}\frac{Y_k}{Y_0} + \frac{\mu}{m}\pi_k, \quad t_{ik} = -\frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega Y_k}{Y_0}, \quad (6.2.18)$$

où π_k est la densité de l'impulsion d'un liquide superfluide.

L'opérateur de la densité du flux de masse coïncide avec l'opérateur de la densité de l'impulsion. Donc

$$j_k = \pi_k = \partial\omega/\partial Y_k, \tag{6.2.19}$$

(car la grandeur π_k en vertu de la définition du potentiel thermodynamique est égale à $\partial\omega/\partial Y_k$).

Les formules (6.2.18), (6.2.19) donnent une solution au problème posé: elles relient les flux à l'état d'équilibre statistique au potentiel thermodynamique $\omega(Y_0, Y_k, Y_4)$. Remarquons que ces formules sont dans une égale mesure vraies pour un liquide normal. Mais alors que pour un liquide normal ω n'est fonction que de deux variables Y_0, $Y_4 - \frac{1}{2} Y_0^{-1} Y_k^2$, $\omega = \omega\left(Y_0, Y_4 - \frac{1}{2} Y_0^{-1} Y_k^2\right)$, pour un liquide superfluide les variables Y_0, Y_4, Y_k^2 figurent dans le potentiel thermodynamique d'une manière indépendante, c'est-à-dire $\omega = \omega(Y_0, Y_4, Y_k^2)$. C'est pourquoi, la densité de l'impulsion d'un liquide normal peut, ne vertu de (6.2.19), s'écrire comme

$$\pi_k = -\frac{Y_k}{Y_0} \frac{\partial\omega}{\partial Y_4},$$

et comme $\partial\omega/\partial Y_4 = \rho$, on a $\pi_k = -\rho Y_k/Y_0$. Cette formule montre que la grandeur $-Y_k/Y_0$ est la vitesse du liquide u_k, de sorte que $\pi_k = \rho u_k$. La densité de flux d'énergie s'écrit alors

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0}.$$

Dans le cas d'un liquide superfluide, on peut seulement écrire

$$\pi_k = -\frac{Y_k}{Y_0}\left(-2Y_0 \frac{\partial\omega}{\partial Y_k^2}\right).$$

La grandeur $-Y/Y_0 \equiv u_n$ peut être interprétée comme la vitesse de la composante normale du liquide, et la grandeur

$$\rho_n = -2Y_0 \frac{\partial\omega}{\partial Y_k^2} \tag{6.2.20}$$

comme la densité de masse de la composante normale du liquide, de sorte que

$$\pi = \rho_n u_n. \tag{6.2.21}$$

Une telle interprétation, comme nous allons le voir au paragraphe 6.2.3, est conforme aux propriétés de transformation des densités de flux.

Il est évident que la grandeur ρ_n ne coïncide pas avec la densité otale du liquide ρ qui est toujours donnée par la formule

$$\rho = \partial\omega/\partial Y_4.$$

C'est pourquoi la grandeur

$$\rho_s = \rho - \rho_n \tag{6.2.22}$$

doit être interprétée comme la densité de la *composante superfluide* d'un liquide. Dans l'état décrit par l'opérateur statistique (6.2.1) la vitesse de la « composante superfluide » $\boldsymbol{u}_s$ est nulle. La densité de l'impulsion (ou la densité du flux de masse) est donc déterminée par la formule (6.2.21). Comme nous allons le voir dans le paragraphe 6.2.3, dans le cas général où $\boldsymbol{u}_s$ est différent de zéro, la grandeur $\boldsymbol{\pi}$ sera déterminée par la formule

$$\boldsymbol{\pi} = \rho_n \boldsymbol{u}_n + \rho_s \boldsymbol{u}_s. \tag{6.2.23}$$

Remarquons pour conclure ce paragraphe que les densités des flux de l'énergie $q_k = \zeta_{0k}$, de l'impulsion $t_{lk} = \zeta_{lk}$ et de la masse $j_k = \zeta_{4k}$ peuvent, en vertu de (6.2.18), (6.2.19), être écrites à l'aide de la formule générale suivante

$$\zeta_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + Y_k \rho_s \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{Y_4}{Y_0}. \tag{6.2.24}$$

Remarquons que les formules obtenues pour les flux sont vraies non seulement pour les systèmes de Bose dégénérés, mais également pour les systèmes de Fermi dégénérés.

6.2.2. Equation du mouvement pour l'opérateur statistique d'un liquide superfluide. Pour trouver les équations du mouvement d'un liquide superfluide il y a lieu, primo, d'introduire la vitesse de la composante superfluide et, secundo, d'être en mesure de décrire les états spatialement hétérogènes d'un liquide.

Nous allons avant tout montrer comment on peut décrire l'état d'équilibre statistique lorsque la vitesse de la composante superfluide est différente de zéro. A cet effet, il faut soumettre l'opérateur statistique w (6.2.1) à une transformation unitaire U_{u_s} correspondant à une transformation de Galilée à la vitesse $\boldsymbol{u}_s$:

$$w \to w_{u_s} \equiv U^{+}_{u_s} w U_{u_s}. \tag{6.2.25}$$

Il est facile de voir que dans l'état w_{u_s}, à la différence des états w, un nombre macroscopique de particules est doué non pas d'une vitesse nulle, mais de la vitesse $\boldsymbol{u}_s$. En effet

$$\mathcal{V}^{-1/2} \operatorname{Sp} w_{u_s} a^{+}_{p} = \mathcal{V}^{-1/2} \operatorname{Sp} w U_{u_s} a^{+}_{p} U^{+}_{u_s},$$

et comme

$$U_{u_s} a^{+}_{p} U^{+}_{u_s} = a^{+}_{p - m u_s},$$

on a en vertu de (6.2.1)

$$\mathcal{V}^{-1/2} \operatorname{Sp} w_{u_s} a^{+}_{p} \sim \delta_{p,\, m u_s}$$

ce qui démontre notre assertion.

Ainsi le paramètre $\boldsymbol{u}_s$ figurant dans l'opérateur statistique w_{u_s} peut être interprété comme la vitesse des particules du condensat ou comme la vitesse de la composante superfluide du liquide.

Remarquons que le nouvel opérateur statistique w_{u_s} ne commutera pas non seulement avec la masse, mais également avec l'opérateur de l'impulsion du système. Cependant il commutera avec l'opérateur $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{u}_s M$, où M est l'opérateur de la masse du système

$$[\boldsymbol{P} - \boldsymbol{u}_s M, w_{u_s}] = 0. \qquad (6.2.26)$$

En effet $[\boldsymbol{P}, w] = 0$, c'est-à-dire $[U^+_{u_s} \boldsymbol{P} U_{u_s}, w_{u_s}] = 0$. Mais $U^+_{u_s} \boldsymbol{P} U_{u_s} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{u}_s M$ (voir (2.3.26)), on obtient ainsi la formule (6.2.26).

Comme

$$U_{u_s} \psi(\boldsymbol{x}) U^+_{u_s} = \psi(\boldsymbol{x}) e^{im\boldsymbol{u}_s \boldsymbol{x}}, \qquad (6.2.27)$$

on a la relation

$$\boldsymbol{u}_s = \frac{1}{m} \nabla \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad (6.2.28)$$

où $\varphi(\boldsymbol{x})$ est la phase de la grandeur $\mathrm{Sp}\, w_{u_s} \psi(\boldsymbol{x})$:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Im} \ln \mathrm{Sp}\, w_{u_s} \psi(\boldsymbol{x}).$$

Nous allons maintenant passer à la description des états non homogènes hors d'équilibre d'un liquide superfluide. Nous avons vu que l'opérateur statistique w_{u_s} ne commute pas avec l'opérateur de l'impulsion. Pour cette raison les valeurs moyennes des combinaisons non invariantes par rapport au gradient des opérateurs de champ $\psi(\boldsymbol{x})$, $\psi^+(\boldsymbol{x})$ ne seront pas invariantes par rapport à la translation. En effet, considérons la grandeur

$$\mathrm{Sp}\, w_{u_s} \psi^+(\boldsymbol{x}_1) \ldots \psi^+(\boldsymbol{x}_k) \psi(\boldsymbol{y}_1) \ldots \psi(\boldsymbol{y}_l).$$

Elle peut s'écrire comme suit

$$\eta(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_l) \exp im\boldsymbol{u}_s (\boldsymbol{y}_1 + \ldots + \boldsymbol{y}_l - \boldsymbol{x}_1 - \ldots - \boldsymbol{x}_k),$$

où η est une grandeur invariante par rapport à la translation, c'est-à-dire

$$\eta(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{y}_l + \boldsymbol{a}) = \eta(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_l)$$

($\boldsymbol{a}$ est le vecteur de translation). Cette formule montre que les grandeurs non invariantes par rapport à la translation, apparaissant pour $k \neq l$, lors de la translation du système acquièrent un facteur de phase du type $\exp im\boldsymbol{u}_s \boldsymbol{a}(l - k)$. Quant aux grandeurs physi-

ques qui sont les valeurs moyennes des combinaisons invariantes par rapport au gradient des opérateurs de champ, elles seront invariantes par rapport à la translation.

Pour pouvoir, ultérieurement, élaborer la théorie des perturbations par rapport aux gradients, il y a lieu d'éliminer entre les fonctions de distribution à particules multiples les facteurs de phase $\exp imu_s x$ variant rapidement. A cet effet, au lieu des fonctions de distribution à particules multiples $\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi^+(x_1)\ldots\psi(y_l)$ il faut envisager les grandeurs

$$\eta_t(x_1,\ldots,x_k;\,y_1,\ldots,y_l)=\exp i\,(\varphi(x_1,t)+\ldots+\varphi(x_k,t)-\varphi(y_1,t)-\ldots-\varphi(y_l,t))\cdot\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi^+(x_1)\ldots\psi^+(x_k)\,\psi(y_1)\ldots\psi(y_l),$$

où $\rho(t)$ est l'opérateur statistique à l'instant t, $\eta_t(x)\equiv\eta(x,t)$ et $\varphi(x,t)$ sont le module et la phase de $\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi(x)$:

$$\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,\psi(x)=\eta(x,t)\exp i\varphi(x,t). \tag{6.2.29}$$

Pour l'état d'équilibre, les grandeurs $\eta_t(x_1,\ldots,;\ldots,y_l)$ ne changent pas lors de la translation du système, par contre, dans le cas des états hors d'équilibre spatialement non homogènes, elles varient lors de la translation, cette variation sera petite lorsque la non-homogénéité spatiale sera faible.

D'une manière analogue à (6.2.28) la grandeur

$$u_s(x,t)=\frac{1}{m}\nabla\varphi(x,t) \tag{6.2.30}$$

sera interprétée comme la vitesse locale de la composante superfluide.

La grandeur $\eta_t(x_1+x,\ldots;\ldots,y_l+x)$ peut être représentée comme la valeur moyenne d'un produit d'opérateurs ψ, ψ^+ avec un certain opérateur statistique $\tilde\rho$ différant de $\rho(t)$:

$$\eta_t(x_1+x,\ldots;\ldots,y_l+x)=\mathrm{Sp}\,\tilde\rho(x,t)\,\psi^+(x_1)\ldots\psi(y_l).$$

Il est facile de voir que

$$\begin{gathered}\tilde\rho(x,t)=e^{iPx}U_\varphi(t)\,\rho(t)\,U_\varphi^+(t)\,e^{-iPx},\\ U_\varphi(t)=\exp\left\{-\frac{i}{m}\int d^3x\varphi(x,t)\,\hat\rho^{(m)}(x)\right\}.\end{gathered} \tag{6.2.31}$$

Vu que, conformément à notre hypothèse, $\eta_t(x_1+x,\ldots;\ldots\ldots y_l+x)$ est une fonction de x variant lentement, l'opérateur statistique $\tilde\rho(x,t)$ sera doué de cette même propriété. L'opérateur $\tilde\rho(x,t)$ satisfait de toute évidence à l'équation

$$-i\frac{\partial\tilde\rho(x,t)}{\partial x_k}=[P_k,\tilde\rho(x,t)]. \tag{6.2.32}$$

Nous allons maintenant obtenir l'équation du mouvement pour $\tilde{\rho}$. A cet effet remarquons que le hamiltonien $\mathcal{H}$ est de la forme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \int d^3x \nabla\psi^+(x) \nabla\psi(x) + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^+(x_1) \psi^+(x_2) V(x_1 - x_2) \psi(x_2) \psi(x_1).$$

C'est pourquoi, compte tenu de ce que $U_\varphi \psi(x) U_\varphi^+ = \psi(x) \exp i\varphi(x)$, on a

$$e^{iPx} U_\varphi \mathcal{H} U_\varphi^+ e^{-iPx} = \mathcal{H} + \int d^3x' u_s(x+x') \hat{\pi}(x') + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x' u_s^2(x+x') \hat{\rho}^{(m)}(x').$$

Remarquant que

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho(t)], \qquad \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} = -\frac{i}{m} \int d^3x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \hat{\rho}^{(m)}(x) U_\varphi,$$

on obtient

$$i \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = [\tilde{\mathcal{H}}(x, t), \tilde{\rho}(x, t)], \tag{6.2.33}$$

où

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, t) = \mathcal{H} + \int d^3x' u_s(x+x', t) \hat{\pi}(x) + \\ + \frac{1}{m} \int d^3x' \left\{ \frac{\partial \varphi(x+x', t)}{\partial t} + \frac{1}{2} m u_s^2(x+x', t) \right\} \hat{\rho}^{(m)}(x').$$

Pour obtenir une équation fermée pour $\tilde{\rho}$, il faut exclure de $\tilde{\mathcal{H}}$ la phase φ et trouver de plus l'équation du mouvement pour la vitesse $u_s(x, t)$. Notons à cet effet qu'en vertu de (6.2.29), (6.2.31) on a

$$\eta(x, t) = \operatorname{Sp} \tilde{\rho}(x, t) \psi(0) > 0, \quad \operatorname{Im} \operatorname{Sp} \tilde{\rho}(x, t) \psi(0) = 0. \tag{6.2.34}$$

En dérivant la seconde de ces relations par rapport à t et en tenant compte de (6.2.33), on obtient:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} m u_s^2(x, t) = -\tilde{\mu}(x, t), \tag{6.2.35}$$

$$\tilde{\mu}(x, t) = \\ = -\eta^{-1}(x, t) \left\{ \frac{1}{2m} \Delta\eta(x, t) + \operatorname{Re} \operatorname{Sp} \tilde{\rho}(x, t) [V, \psi(0)] \right\}. \tag{6.2.36}$$

En vertu de cette équation, on a

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(m^{-1} \tilde{\mu} + \frac{1}{2} u_s^2 \right) = 0, \quad \operatorname{rot} u_s = 0. \tag{6.2.37}$$

La phase φ se trouve exclue du hamiltonien efficace $\tilde{\mathcal{H}}(x, t)$ au moyen de l'équation (6.2.35)

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, t) = \mathcal{H} + \\ + \int d^3x' u_s(x+x')\,\hat{\pi}(x') - \frac{1}{m}\int d^3x' \tilde{\mu}(x+x')\,\hat{\rho}^{(m)}(x'). \quad (6.2.38)$$

Ainsi l'opérateur statistique $\tilde{\rho}(x, t)$ satisfait à l'équation (6.2.33) où le hamiltonien efficace $\tilde{\mathcal{H}}$ est déterminé par la formule (6.2.38), et les grandeurs $\tilde{\mu}$ et u_s par les formules (6.2.36), (6.2.37).

Lorsqu'on passe de l'opérateur statistique $\rho(t)$ à l'opérateur statistique $\tilde{\rho}(x, t)$, on peut dire que l'on passe à une nouvelle représentation commode pour l'étude des états faiblement non homogènes. Dans cette représentation, on peut définir les opérateurs $\tilde{a}(x, t)$ correspondant aux opérateurs initiaux $a(x)$ de telle sorte que

$$\mathrm{Sp}\,\rho(t)\,a(x) = \mathrm{Sp}\,\tilde{\rho}(x, t)\,\tilde{a}(x, t).$$

Les opérateurs $\tilde{a}(x, t)$ sont de toute évidence liés aux opérateurs initiaux par la transformation

$$\tilde{a}(x, t) = e^{iPx}U_\varphi(t)\,a(x)\,U_\varphi^+(t)\,e^{-iPx}. \quad (6.2.39)$$

En particulier, à partir de l'équation (2.2.31), on obtient pour $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\pi}$, $\hat{\rho}^{(m)}$:

$$\tilde{\hat{\varepsilon}}(x, t) = \hat{\varepsilon}(0) + \hat{\pi}(0)\,u_s(x, t) + \hat{\rho}^{(m)}(0)\,\frac{1}{2}u_s^2(x, t),$$
$$\tilde{\hat{\pi}}(x, t) = \hat{\pi}(0) + \hat{\rho}^{(m)}(0)\,u_s(x, t), \quad (6.2.40)$$
$$\tilde{\hat{\rho}}^{(m)}(x, t) = \hat{\rho}^{(m)}(0).$$

6.2.3. Equations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide parfait. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons obtenu l'expression des densités des flux de l'énergie, de l'impulsion et de la masse et trouvé les équations du mouvement pour l'opérateur statistique d'un liquide superfluide. Ces résultats permettent maintenant de trouver les équations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide. Nous nous limiterons au cas des équations de l'hydrodynamique d'un liquide parfait, c'est-à-dire que nous ne tiendrons pas compte des processus de dissipation dans les liquides superfluides. A cet effet, il suffit de connaître l'opérateur statistique en approximation zéro par rapport aux gradients.

L'état d'équilibre d'un liquide superfluide est, comme nous l'avons vu, caractérisé par la vitesse de la composante superfluide u_s et par les densités ζ_α, c'est-à-dire par les densités de l'énergie ε, de l'impulsion π et de la masse ρ ou, ce qui est la même chose, par

les variables u_s, Y_α (toutes ces grandeurs ne dépendent pas des coordonnées). C'est pourquoi, il est tout naturel de supposer que l'état hors d'équilibre d'un liquide superfluide, pour des intervalles de temps supérieurs au temps d'établissement de la distribution locale de Gibbs, sera caractérisé par les variables locales $u_s(x, t)$, $\zeta_\alpha(x, t)$ qui sont des fonctions variant lentement des coordonnées et du temps. Ceci signifie que l'opérateur statistique $\tilde{\rho}(x, t)$, pour $t \gg \tau_r$ sera une fonctionnelle universelle de u_s, ζ_α:

$$\tilde{\rho}(x, t) \underset{t \gg \tau_r}{\longrightarrow} \tilde{\sigma}(x;\ u_s(x', t), \zeta_\alpha(x', t)), \qquad (6.2.41)$$

ne dépendant du temps t que par l'intermédiaire des variables $u_s(x', t)$, $\zeta_\alpha(x', t)$, de plus cette fonctionnelle reste inchangée lors del a translation simultanée $x \to x + a, u_s(x', t) \to u_s(x' - a, t)$, $\zeta_\alpha(x', t) \to \zeta_\alpha(x' - a, t)$.

L'opérateur statistique grossier $\tilde{\sigma}$ doit de toute évidence satisfaire aux relations suivantes

$$\mathrm{Sp}\, \tilde{\sigma}(x;\ u_s, \zeta_\alpha)\tilde{\zeta}_\alpha(x, t) = \zeta_\alpha(x, t).$$

Les équations du mouvement (6.2.33) pour l'opérateur statistique grossier $\tilde{\sigma}$ peuvent s'écrire comme suit

$$[\tilde{\mathscr{H}}(x, t),\ \tilde{\sigma}(x;\ u_s, \zeta_\alpha)] = $$
$$= i \int d^3x' \left\{ \frac{\delta\tilde{\sigma}(x;\ u_s, \zeta)}{\delta\zeta_\alpha(x, t)} \frac{\partial\zeta_\alpha(x, t)}{\partial t} + \frac{\delta\tilde{\sigma}(x;\ u_s, \zeta)}{\delta u_s(x, t)} \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial t} \right\}. \qquad (6.2.42)$$

Les grandeurs $\partial u_s/\partial t$ et $\partial\zeta_\alpha/\partial t$ figurant ici doivent être exclues, la première à l'aide de l'équation (6.2.37), et la seconde à l'aide des lois de la conservation

$$\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial\zeta_{\alpha k}}{\partial x_k}, \qquad (6.2.43)$$

où $\zeta_{\alpha k}(x;\ u_s, \zeta) = \mathrm{Sp}\, \tilde{\sigma}(x;\ u_s, \zeta)\,\hat{\tilde{\zeta}}_{\alpha k}(x, t)$. Ces équations de pair avec l'équation (6.2.37) pour u_s sont, en fait, les équations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide. Cependant, pour qu'elles forment un système fermé d'équations, il y a lieu de trouver l'opérateur statistique grossier $\tilde{\sigma}$ en tant que fonctionnelle des grandeurs u_s, ζ_α.

Nous allons résoudre ce problème dans le cadre de la théorie des perturbations en supposant que les gradients de u_s et ζ_α sont petits. Dans ce cas, l'opérateur statistique $\tilde{\sigma}(x;\ u_s, \zeta)$ peut être développé en série suivant les gradients des grandeurs u_s, ζ_α:

$$\tilde{\sigma}(x:\ u_s,\ \zeta) = \tilde{\sigma}_0(u_s(x, t), \zeta(x, t)) + $$
$$+ \frac{\partial\zeta_\alpha(x, t)}{\partial x_k} \tilde{\sigma}_{\alpha k}(u_s(x, t), \zeta(x, t)) + $$
$$+ \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial x_k} \tilde{\sigma}_k(u_s(x, t), \zeta(x, t)) + \ldots, \qquad (6.2.44)$$

où $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_{\alpha k}$, $\tilde{\sigma}_k$ ne dépendent de x que par les grandeurs $u_s(x, t)$, $\zeta_\alpha(x, t)$ au point x.

Dans la représentation que nous avons envisagée, les opérateurs des flux $\hat{\hat{\zeta}}_{\alpha k}(x, t)$ dépendent, en vertu de (6.2.39), d'une manière non locale de la vitesse de la composante superfluide $u_s(x, t)$. C'est pourquoi, ils doivent également être développés suivant les puissances des gradients $u_s(x, t)$:

$$\hat{\hat{\zeta}}_{\alpha k}(x, t) = \hat{\zeta}^{(0)}_{\alpha k}(x, t) + \hat{\zeta}^{(1)}_{\alpha k}(x, t) + \ldots,$$

où les opérateurs $\hat{\zeta}^{(0)}_{\alpha k}(x, t)$ sont donnés en vertu de (6.2.40), (2.2.39) et (2.2.41) par les formules suivantes

$$\hat{\zeta}^{(0)}_{0k}(x, t) \equiv \hat{q}^{(0)}_k(x, t) = \hat{q}_k(0) + u_{sl}(x, t)\hat{t}_{lk}(0) + \frac{1}{2}u^2_s(x, t)\hat{\pi}_k(0) + \\ + u_{sk}(x, t)\left\{\hat{\varepsilon}(0) + u_{sl}(x, t)\hat{\pi}_l(0) + \frac{1}{2}u^2_s(x, t)\hat{\rho}^{(m)}(0)\right\}, \quad (6.2.45)$$

$$\hat{\zeta}^{(0)}_{lk}(x, t) = \hat{t}^{(0)}_{lk}(x, t) = \hat{t}_{lk}(0) + u_{sl}(x, t)\hat{\pi}_k(0) + \\ + u_{sk}(x, t)\hat{\pi}_l(0) + u_{sk}(x, t)\,u_{sl}(x, t)\hat{\rho}^{(m)}(0),$$

$$\hat{\zeta}^{(0)}_{4k}(x, t) \equiv \hat{j}^{(0)}_k(x, t) = \hat{j}_k(0) + u_{sk}(x, t)\hat{\rho}^{(m)}(0).$$

Les opérateurs $\hat{j}_k(0)$, $\hat{t}_{lk}(0)$, $\hat{q}_k(0)$ sont déterminés par les formules (2.2.39)-(2.2.41) et pris au point $x = 0$. (Les opérateurs $\hat{\zeta}^{(1)}_{\alpha k}$ sont proportionnels à $\partial u_s/\partial x_k$ et nous n'en aurons pas besoin lors de l'étude d'un liquide superfluide parfait.)

Le développement (6.2.44) de l'opérateur statistique $\tilde{\sigma}$ induit le développement des grandeurs $\tilde{\mu}$ et η suivant les gradients

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}(x, t) = \mu_0(x, t) + \mu_1(x, t) + \ldots, \\ &\eta(x, t) = \eta_0(x, t) + \eta_1(x, t) + \ldots, \\ &\mu_0(x, t) = -\eta_0^{-1}(x, t)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\tilde{\sigma}_0(u_s(x, t), \zeta(x, t))\,[V, \psi(0)], \\ &\eta_0(x, t) = \mathrm{Sp}\,\tilde{\sigma}_0(u_s(x, t), \zeta(x, t))\,\psi(0) \end{aligned} \quad (6.2.46)$$

Ce développement induit, à son tour, le développement du hamiltonien efficace $\tilde{\mathscr{H}}$ en série suivant les gradients

$$\tilde{\mathscr{H}}(x, t) = \tilde{\mathscr{H}}_0(x, t) + \tilde{\mathscr{H}}_1(x, t) + \ldots,$$

où

$$\tilde{\mathscr{H}}_0(x, t) = \mathscr{H} + Pu_s(x, t) - m^{-1}M\mu_0(x, t). \quad (6.2.47)$$

(Nous n'aurons pas besoin de l'opérateur $\tilde{\mathcal{H}}_1$ et nous n'allons pas donner son expression explicite.) L'opérateur statistique $\tilde{\sigma}_0$, en vertu de (6.2.42), (6.2.32), (6.2.34), doit satisfaire aux équations:

$$[\tilde{\mathcal{H}}_0(\boldsymbol{x}, t), \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta)] = 0, \qquad [P_k, \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta)] = 0, \tag{6.2.48}$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta)\, \psi(0) = 0, \quad \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta)\, \psi(0) > 0. \tag{6.2.49}$$

De plus, vu que $\operatorname{Sp} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{u}_s, \zeta)\, \hat{\tilde{\zeta}}_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \zeta_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$, on doit avoir la relation suivante

$$\operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta)\, \hat{\tilde{\zeta}}_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \zeta_\alpha(\boldsymbol{x}, t). \tag{6.2.50}$$

Après avoir trouvé $\tilde{\sigma}_0$ à partir de ces équations on peut en vertu des équations (6.2.37), (6.2.43) obtenir les équations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide parfait:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left\{ m^{-1}\mu_0 + \frac{1}{2} u_s^2 \right\} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_s = 0, \quad \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_{\alpha k}^{(0)}}{\partial x_k} = 0, \tag{6.2.51}$$

où μ_0 est donné par la formule (6.2.46) et

$$\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t) = \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta)\, \hat{\zeta}_{\alpha k}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t). \tag{6.2.52}$$

Nous allons montrer que pour $\tilde{\sigma}_0$ on doit prendre l'opérateur

$$\tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{u}_s, \zeta) = \exp\{\Omega - Y_0(\boldsymbol{x}, t)\, \mathcal{H}_{\bar{v}} - Y_k(\boldsymbol{x}, t)\, P_k - Y_4(\boldsymbol{x}, t)\, M\} \equiv w_{\bar{v}}, \tag{6.2.53}$$

qui satisfait aux équations (6.2.48), (6.2.49) dans le sens des valeurs quasi moyennes; toutes les valeurs moyennes figurant dans les équations (6.2.46) doivent également être entendues comme des valeurs quasi moyennes (voir 3.2.1):

$$\eta_0 = \langle \psi(0) \rangle, \quad \operatorname{Im} \langle \psi(0) \rangle = 0, \quad \mu_0 = -\eta_0^{-1} \operatorname{Re} \langle [V, \psi(0)] \rangle. \tag{6.2.54}$$

En vertu de (6.2.50) les fonctions Y_0, Y_k, Y_4 figurant dans (6.2.53) sont déterminées à partir des équations

$$\zeta_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \operatorname{Sp} w_{\bar{v}}(\boldsymbol{x}, t)\, \hat{\tilde{\zeta}}_\alpha(\boldsymbol{x}, t). \tag{6.2.55}$$

Nous allons montrer que la grandeur μ_0 figurant dans l'équation (6.2.51), pour la vitesse de la composante superfluide, est égale à

$$\mu_0 = -mY_4/Y_0. \tag{6.2.56}$$

Remarquons à cet effet que pour $\bar{v}$ quelconque, on a les relations

$$[w_{\bar{v}}, P_k] = 0, \quad [w_{\bar{v}}, \tilde{\mathcal{H}}_0] = \left(\frac{\mu_n}{m} + \frac{Y_4}{Y_0} \right) [M, w_{\bar{v}}] + [\delta\mathcal{H}, w_{\bar{v}}], \tag{6.2.57}$$

et par conséquent

$$\operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}} [V, \psi(0)] = \operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}} \left[\tilde{\mathscr{H}}_0 + \frac{\mu_0}{m} M - \mathscr{H}_0 - \boldsymbol{P} \boldsymbol{u}_s, \psi(0) \right] =$$

$$= m \frac{Y_4}{Y_0} \operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}} \psi(0) - \operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}} [\delta \mathscr{H}, \psi(0)]. \quad (6.2.58)$$

En accord avec la méthode des quasi-moyennes la grandeur $\{\psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n)\}$ est finie. C'est pourquoi. la grandeur $\bar{\nu}^{-1} \{[\delta\mathscr{H}, \psi(0)\}$ est également finie, et le dernier terme dans la formule (6.2.58) disparaît pour $\bar{\nu} \to 0$. D'où l'on obtient la formule (6.2.56).

En remarquant que la grandeur $\bar{\nu}^{-1} \{[\delta\mathscr{H}, \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n)]\}$ est finie, on a en vertu de (6.2.57), (6.2.56)

$$\{[\tilde{\mathscr{H}}_0, \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n)]\} = 0.$$

A partir de la première équation (6.2.57) on a de toute évidence

$$\{[P_k, \psi^+(x_1) \ldots \psi(x_n)]\} = 0.$$

On voit ainsi que $w_{\bar{\nu}}$ satisfait en effet aux équations (6.2.48) pour les valeurs quasi moyennes. De plus, l'opérateur statistique $w_{\bar{\nu}}$ satisfait au principe d'affaiblissement des corrélations. C'est pourquoi, on doit admettre qu'on a la relation (6.2.53).

Remarquons qu'en l'absence de gradients $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0$ et en vertu de (6.2.41) on a $\tilde{\rho}(x, t) \underset{t \gg \tau_r}{\to} \tilde{\sigma}_0$. Cette relation peut être envisagée comme une relation ergodique pour les états spatialement homogènes d'un liquide superfluide.

Connaissant $\tilde{\sigma}_0$, on peut en principe trouver les valeurs moyennes des densités ζ_α et des densités des flux $\zeta^{(0)}_{\alpha k}$. En vertu de (6.2.55), (6.2.40) les valeurs moyennes des densités sont données par les formules suivantes

$$\begin{gathered} \varepsilon(x, t) = \varepsilon^0(x, t) + \overset{0}{\pi}_k(x, t)\, u_{sk}(x, t) + \frac{1}{2} \rho^0(x, t)\, u_s^2(x, t), \\ \pi_k(x, t) = \overset{0}{\pi}_k(x, t) + \rho^0(x, t)\, u_{sk}(x, t), \quad \rho^{(m)}(x, t) = \rho^0(x, t), \end{gathered} \quad (6.2.59)$$

où

$$\varepsilon^0(x, t) = \{\hat{\varepsilon}(0)\}, \quad \overset{0}{\pi}_k(x, t) = \{\hat{\pi}_k(0)\}, \quad \rho^0(x, t) = \{\hat{\rho}^{(m)}(0)\},$$

et les valeurs quasi moyennes $\{\ldots\}$ sont calculées à l'aide de l'opérateur statistique $\tilde{\sigma}_0 = w_{\bar{\nu}}$, $\{\ldots\} = \lim_{\bar{\nu} \to 0} \lim_{\mathscr{V} \to \infty} \operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}} \ldots$

Puis, en utilisant la définition (6.2.45) des grandeurs $\hat{\zeta}^{(0)}_{\alpha k}$, on obtient en vertu de (6.2.52)

$$q_k^{(0)}(x, t) = q_k^0(x, t) + t_{kl}^0(x, t)\,u_{sl}(x, t) + \frac{1}{2}u_s^2(x, t)\,\pi_k^0(x, t) + \\ + u_{sk}(x, t)\{\varepsilon^0(x, t) + \pi^0(x, t)\,u_s(x, t) + \frac{1}{2}u_s^2(x, t)\,\rho^0(x, t)\},$$

$$t_{kl}^{(0)}(x, t) = t_{kl}^0(x, t) + \pi_k^0(x, t)\,u_{sl}(x, t) + \\ + \pi_l^0(x, t)\,u_{sk}(x, t) + \rho^0(x, t)\,u_{sk}(x, t)\,u_{sl}(x, t), \quad (6.2.60)$$

$$j_k^{(0)}(x, t) = \pi_k^0(x, t) + \rho^0(x, t)\,u_{sk}(x, t),$$

où les grandeurs

$$q_k^0(x, t) = \left\{\hat{q}_k(0)\right\}, \quad t_{kl}^0(x, t) = \left\{\hat{t}_{kl}(0)\right\}$$

ont été calculées au paragraphe 6.2.1 et sont données par les formules (6.2.18), (6.2.19).

Enfin, au lieu de Y_k, on introduit la grandeur u_n conformément à la formule

$$Y_k = Y_0(u_s - u_n)_k. \quad (6.2.61)$$

Comme nous allons tout de suite le voir, $u_n(x, t)$ peut être interprété comme la vitesse locale de la composante normale d'un liquide superfluide. (Cette définition se trouve en accord avec la définition du paragraphe 6.2.1, car pour $u_s = 0$, $Y = -Y_0 u_n$.)

En utilisant les formules (6.2.60), (6.2.18), (6.2.19), on peut écrire les densités des flux $t_{kl}^{(0)}$, $j_k^{(0)}$ comme suit

$$t_{kl}^{(0)} = p\delta_{kl} + \rho_n u_{nk} u_{nl} + \rho_s u_{sk} u_{sl}, \\ j_k^{(0)} = \pi_k = \rho_n u_{nk} + \rho_s u_{sk}, \quad (6.2.62)$$

où p est la pression du liquide superfluide définie comme

$$p = -\omega/Y_0. \quad (6.2.63)$$

Ces formules montrent que les grandeurs u_n et u_s doivent être interprétées comme les vitesses des composantes normale et superfluide du liquide.

Ainsi les équations de l'hydrodynamique d'un liquide superfluide peuvent s'écrire comme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} j^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial\pi_k}{\partial t} + \frac{\partial t_{kl}^{(0)}}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} q^{(0)} = 0, \\ \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(m^{-1}\mu_0 + \frac{1}{2}u_s^2\right) = 0, \quad \operatorname{rot} u_s = 0, \quad (6.2.64)$$

où les grandeurs $j^{(0)} = \pi$, $t_{kl}^{(0)}$, ε, $q_k^{(0)}$ sont déterminées par les formules (6.2.62), (6.2.60), (6.2.59).

Pour la première fois, les équations (6.2.64) ont été établies par Landau et portent le nom d'*équations de Landau* [71].

L'équation (6.2.64) qui contient $\partial\varepsilon/\partial t$ et exprime la loi de la conservation de l'énergie peut, comme il est facile de s'en rendre compte, s'écrire comme suit

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} s u_n = 0, \qquad (6.2.65)$$

où s est la densité de l'entropie, donnée par la formule suivante

$$s = -\lim_{\bar{v}\to 0} \lim_{\mathcal{V}\to\infty} \mathcal{V}^{-1} \operatorname{Sp} w_{\bar{v}} \ln w_{\bar{v}}.$$

Cette équation exprime le fait que l'écoulement d'un liquide superfluide parfait est adiabatique.

La grandeur su_n est la densité du flux de l'entropie. Ainsi, seule la composante normale d'un liquide superfluide a une entropie.

Nous avons montré que l'opérateur $\tilde{\sigma}_0$ satisfait aux équations (6.2.48). Il nous reste à vérifier si les relations (6.2.49) sont vérifiées. Nous allons voir ci-dessus que ces relations sont vraies sous certaines réserves imposées à l'opérateur $\hat{f}(x)$.

Nous allons montrer avant tout que l'opérateur $\hat{f}(x)$ doit contenir un nombre impair d'opérateurs de champ $\psi(x)$, $\psi^+(x)$. Remarquons à cet effet que

$$e^{-i\frac{\pi}{m}M} \psi(x) e^{i\frac{\pi}{m}M} = -\psi(x).$$

C'est pourquoi

$$e^{-i\frac{\pi}{m}M} \hat{f}(x) e^{i\frac{\pi}{m}M} = \beta_f \hat{f}(x), \qquad (6.2.66)$$

où $\beta_f = 1$ si $\hat{f}$ contient un nombre pair d'opérateurs ψ, ψ^+ et $\beta_f = -1$ si $\hat{f}$ en contient un nombre impair. En vertu de (6.2.53), (6.2.66) on a

$$\operatorname{Sp} w_{\bar{v}} \psi(0) = -(\operatorname{Sp} w_{\bar{v}} \psi(0))_{\bar{v}\to\bar{v}\beta_f}.$$

Nous allons voir que pour $\beta_f = 1$ (c'est-à-dire si l'opérateur $\hat{f}$ perturbant la symétrie contient un nombre pair d'opérateurs de champ) $\langle \psi(0) \rangle = 0$, et, par conséquent, ceci ne donne pas lieu à des singularités des valeurs quasi moyennes, dont nous avons besoin. C'est pourquoi, il y a lieu de supposer que $\beta_f = -1$, c'est-à-dire que le nombre d'opérateurs de champ figurant dans $\delta\mathcal{H}$ doit être impair. Dans ce cas, $\operatorname{Sp} w_{\bar{v}} \psi(0)$ est une fonction impaire de $\bar{v}$,

$$\operatorname{Sp} w_{\bar{v}} \psi(0) = -\operatorname{Sp} w_{\bar{v}} \psi(0) |_{\bar{v}\to -\bar{v}}. \qquad (6.2.67)$$

On peut en conclure que les valeurs quasi moyennes n'auront de sens que si $\bar{\nu}$ tend vers zéro soit à droite, soit à gauche [31].

Nous allons maintenant voir quelles doivent être les restrictions imposées à $\hat{f}(x)$ pour que la condition $\operatorname{Im}\{\psi\} = 0$ soit vérifiée. Remarquons à cet effet que

$$\mathcal{P}T\mathcal{H}(\mathcal{P}T)^{-1} = \mathcal{H}^*, \quad \mathcal{P}TP_k(\mathcal{P}T)^{-1} = P_k^*, \quad \mathcal{P}TM(\mathcal{P}T)^{-1} = M^*,$$

où T, $\mathcal{P}$ sont les opérateurs unitaires correspondant à l'inversion du temps et à l'image de l'espace. Nous allons considérer que l'opérateur $\hat{f}(x)$ est doué d'une certaine signature temporelle ε_f ($\varepsilon_f = \pm 1$). On a alors $\mathcal{P}T\delta\mathcal{H}(\mathcal{P}T)^{-1} = \varepsilon_f\delta\mathcal{H}^*$.

Il en résulte

$$(\operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}}\psi(0))^* = (\operatorname{Sp} w_{\bar{\nu}}\psi(0))_{\bar{\nu}\to\bar{\nu}\varepsilon_f}.$$

Ainsi la grandeur $\{\psi\}$ sera réelle si $\varepsilon_f = 1$.

Compte tenu de (6.2.67) on peut toujours faire la grandeur $\{\psi\}$ positive en faisant tendre ν vers zéro d'une certaine manière (c'est-à-dire en considérant que soit $\bar{\nu} \to +0$, soit $\bar{\nu} \to -0$). On peut supposer que si l'on choisit $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \psi(x) + \psi^+(x),$$

$\{\psi\}$ sera supérieur à zéro si $\bar{\nu} \to -0$.

§ 6.3. Equations de l'électrodynamique macroscopique

6.3.1. Equations de Maxwell-Lorentz pour les opérateurs des champs électromagnétiques. Nous allons maintenant passer à l'étude des champs électromagnétiques dans un milieu, qui représentent les valeurs moyennes des champs microscopiques agissant sur les particules du milieu et créés par ces particules.

Nous allons avant tout formuler les équations de l'électrodynamique quantique qui déterminent les champs électromagnétiques microscopiques dans le cas où les particules sont non relativistes.

Le système électrodynamique quantique que nous allons envisager est un ensemble de particules chargées et de photons. Son hamiltonien $\mathcal{H}(t)$, dans la représentation de Schrödinger, s'écrit comme suit

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_{\text{int}} + \\
+ \sum_a \frac{1}{2m_a}\int d^3x \left(\nabla + \frac{ie_a}{c}A(x, t)\right)\psi_a^+(x)\left(\nabla - \frac{ie_a}{c}A(x, t)\right)\psi_a(x) - \\
- \sum_a \int d^3x\psi_a(x)\,\mu_a\,\psi_a(x)\operatorname{rot} A(x, t) + \\
+ \sum_a e_a\int d^3x\psi_a^+(x)\,\psi_a(x)\psi^{(e)}(x, t), \qquad (6.3.1)$$

où $\psi_a(x)$ est l'opérateur d'annihilation des particules de la sorte a, de charge e_a et de masse m_a, $\varphi^{(e)}(x, t)$ le potentiel scalaire du champ électromagnétique extérieur, $A(x, t)$ l'opérateur du potentiel vectoriel du champ électromagnétique, $\mathscr{H}_f$ le hamiltonien du champ du rayonnement libre, soit

$$\mathscr{H}_f = \sum_{k\lambda} \omega_k c^+_{k\lambda} c_{k\lambda}, \qquad \omega_k = c\,|k|$$

($c_{k\lambda}$, $c^+_{k\lambda}$ sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon d'impulsion k et de polarisation $\lambda = 1, 2$, satisfaisant aux relations de permutation $[c_{k\lambda}, c^+_{k'\lambda'}] = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}$) et enfin $\mathscr{H}_{\text{int}}$ est le hamiltonien de l'interaction coulombienne des particules. L'opérateur $A(x, t)$ est une somme de deux termes

$$A(x, t) = a(x) + A^{(e)}(x, t),$$

où $A^{(e)}(x, t)$ est le potentiel vectoriel d'un champ extérieur donné (cette grandeur est un c-nombre) et $a(x)$ l'opérateur du potentiel vectoriel correspondant au champ électromagnétique quantifié:

$$a(x) = c \sum_{k\lambda} \left(\frac{2\pi}{\mathscr{V}\omega_k}\right)^{1/2} \{e^{(\lambda)}_k c_{k\lambda}\, e^{ikx} + \text{c.h.}\},$$

$e^{(\lambda)}_k$ sont ici les vecteurs de polarisation des photons satisfaisant aux conditions suivantes

$$e^{(\lambda)}_k k = 0, \qquad \sum_{\lambda=1}^{2} e^{(\lambda)}_{ki} e^{(\lambda)*}_{kj} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Le hamiltonien $\mathscr{H}(t)$ peut s'écrire comme suit

$$\mathscr{H}(t) = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_{\text{int}} + V(t), \quad \mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_f + \mathscr{H}_p,$$

où $\mathscr{H}_p$ est le hamiltonien des particules libres:

$$\mathscr{H}_p = \sum_a \frac{1}{2m_a} \int d^3x \nabla\psi^+_a(x) \nabla\psi_a(x)$$

et $V(t)$ le hamiltonien de l'interaction des particules avec le champ électromagnétique:

$$V(t) = -\frac{1}{c} \int d^3x A(x, t) \mathscr{J}(x, t) -$$
$$- \frac{1}{2c^2} \int d^3x A(x, t) \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(x) + \int d^3x \varphi^{(e)}(x, t)\, \hat{\rho}(x), \qquad (6.3.2)$$

où $\mathscr{J}(x, t)$ est l'opérateur de la densité du courant des particules en présence d'un champ électromagnétique

$$\mathscr{J}(x, t) = \sum_a \frac{ie_a}{2m_a} \left\{\left(\nabla + \frac{ie_a}{c} A(x, t)\right) \psi^+_a(x)\psi_a(x) - \text{c.h.}\right\} +$$
$$+ \operatorname{rot} \sum_a \psi^+_a(x) \mu_a \psi_a(x) = j(x) - \frac{1}{c} A^{(e)}(x, t) \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(x), \qquad (6.3.3)$$

μ_a étant la matrice du moment magnétique propre, $\hat{\rho}_a(x) \equiv e_a\psi_a^+(x)\,\psi_a(x)$ l'opérateur de la densité de la charge électrique des particules de la sorte a et $j(x)$ est l'opérateur de la densité du courant électrique en l'absence de champ électromagnétique extérieur:

$$j(x) = \sum_a \frac{ie_a}{2m_a}\left\{\left(\nabla + \frac{ie_a}{c}\,a(x)\right)\psi_a^+(x)\,\psi_a(x) - \text{c.h.}\right\} + \\ + \operatorname{rot}\sum_a \psi_a^+(x)\,\mu_a\psi_a(x). \qquad (6.3.4)$$

Nous allons maintenant trouver les opérateurs des champs électromagnétiques. L'opérateur du champ magnétique est donné par la formule

$$\hat{H}(x, t) = h(x) + H^{(e)}(x, t),$$

où $H^{(e)}(x, t) = \operatorname{rot} A^{(e)}(x, t)$ est le champ magnétique extérieur et $h(x)$ le champ magnétique quantifié, $h(x) = \operatorname{rot} a(x)$.

L'opérateur du champ électrique est donné par la formule

$$\hat{E}(x, t) = e(x) + E^{(e)}(x, t),$$

où $E^{(e)}(x, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^{(e)}(x, t) - \nabla\varphi^{(e)}(x, t)$ est le champ électrique extérieur et

$$e(x) = e^t(x) + e^l(x),$$

$$e^t(x) = -\frac{1}{c}\dot{a}(x) \equiv -\frac{i}{c}[\mathscr{H}(t),\ a(x)], \qquad (6.3.5)$$

$$e^l(x) = -\nabla a_0(x), \quad a_0(x) = \int d^3x'\,\frac{\hat{\rho}(x')}{|x - x'|}.$$

$e^t(x)$ est ici le champ électrique quantifié transversal et $e^l(x)$ le champ coulombien longitudinal créé par les charges de densité totale $\hat{\rho}(x) = \sum_a \hat{\rho}_a(x)$ ($a_0(x)$ est l'opérateur du potentiel scalaire agissant dans l'espace de Hilbert des particules).

Après avoir déterminé les champs, on peut passer à l'établissement des équations de leur mouvement dans la représentation de Schrödinger. A cet effet nous allons nous servir du fait que

$$[\mathcal{J}_i(x, t),\ \hat{\rho}(x')] = -i\sum_a \frac{e_a}{m_a}\,\hat{\rho}_a(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta(x - x').$$

A partir de cette relation et de (6.3.1) on a la loi de la conservation de la charge

$$\dot{\hat{\rho}}(x) \equiv i\,[\mathscr{H}(t),\ \hat{\rho}(x)] = -\operatorname{div}\mathcal{J}(x, t)$$

(nous avons tenu compte de ce que $[\mathscr{H}_{\text{int}}, \hat{\rho}(x)] = 0$). C'est pourquoi, en vertu de (6.3.5), on a

$$\dot{e}^l(x) i \equiv i[\mathscr{H}(t), e^l(x)] = \nabla \operatorname{div} \int d^3x' \frac{\mathscr{J}(x', t)}{|x-x'|}.$$

En utilisant les relations de permutation pour les opérateurs $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$, on a

$$e^t(x) \equiv -\frac{i}{c}[\mathscr{H}(t), a(x)] = i \sum_{k\lambda=1}^{2} \left(\frac{2\pi\omega_k}{V}\right)^{1/2} \{e_k^{(\lambda)} c_{k\lambda} e^{ikx} - \text{c.h.}\}.$$

C'est pourquoi, en utilisant de nouveau les relations de permutation pour les opérateurs $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$, on trouve

$$\frac{1}{c}\dot{e}^t(x) \equiv \frac{i}{c}[\mathscr{H}(t), e^t(x)] = \operatorname{rot} h(x) + \frac{i}{c}[V(t), e^t(x)].$$

Calculons maintenant le commutateur $[V(t), e^t(x)]$. Remarquant que

$$[a_i(x), e_s^t(x')] = 4\pi i c \delta_{is} \delta(x-x') - ic \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_s} \frac{1}{|x-x'|},$$

on trouve

$$\frac{i}{c}[V(t), e^t(x)] = -\frac{4\pi}{c}\mathscr{J}(x, t) - \frac{1}{c}\nabla \operatorname{div} \int d^3x' \frac{\mathscr{J}(x', t)}{|x-x'|}.$$

En substituant cette expression dans la formule pour $\frac{1}{c}\dot{e}^t(x)$ et en utilisant l'équation donnant $\dot{e}^l(x)$, on obtient finalement l'équation suivante pour le champ électrique $e(x)$:

$$\frac{1}{c}\dot{e}(x) = \operatorname{rot} h(x) - \frac{4\pi}{c}\mathscr{J}(x, t).$$

La variation du champ magnétique dans le temps est donnée par l'équation suivante

$$\frac{1}{c}\dot{h}(x) \equiv \frac{i}{c}[\mathscr{H}(t), h(x)] = \frac{i}{c}[\mathscr{H}_f, h(x)],$$

d'où en utilisant les relations de permutation pour les opérateurs $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$, on obtient

$$\frac{1}{c}\dot{h}(x) = -\operatorname{rot} e(x).$$

Les champs extérieurs $H^{(e)}$, $E^{(e)}$ satisfont aux équations de Maxwell

$$\operatorname{rot} E^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}H^{(e)}, \quad \operatorname{rot} H^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^{(e)} + \frac{4\pi}{c}j',$$

$$\operatorname{div} H^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} E^{(e)} = 4\pi\rho',$$

où j' et ρ' sont les densités des courants et des charges extérieurs.

Les opérateurs $\hat{E}$ et $\hat{H}$ satisfont donc aux équations suivantes

$$\operatorname{rot}\hat{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{H}, \quad \operatorname{rot}\hat{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{E} + \frac{4\pi}{c}(\mathcal{J} + j'),$$
$$\operatorname{div}\hat{H} = 0, \quad \operatorname{div}\hat{E} = 4\pi(\hat{\rho} + \rho'). \tag{6.3.6}$$

Nous appellerons ces équations équations de Maxwell-Lorentz pour les opérateurs des champs.

6.3.2. Réponse du système à une excitation électromagnétique extérieure. Pour obtenir les équations de Maxwell-Lorentz pour les champs moyens dans le milieu, il y a lieu de procéder au moyennage des équations (6.3.6) avec l'opérateur statistique du système formé par la substance et le champ électromagnétique quantifié.

Nous allons supposer que pour $t = -\infty$, le champ et la substance se trouvaient à l'état d'équilibre statistique et qu'il n'y avait pas de champ extérieur. Ceci signifie que la distribution de Gibbs w du système est déterminée pour $t = -\infty$ par le hamiltonien $\mathcal{H} = \mathcal{H}(-\infty)$ qui est la somme du hamiltonien de la substance $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{\text{int}}$, du hamiltonien du champ de rayonnement $\mathcal{H}_f$ et du hamiltonien de l'interaction de la substance et du champ électromagnétique $V = V(-\infty)$,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_f + V,$$
$$V = -\frac{1}{c}\int d^3x a(x) j(x) - \frac{1}{2c^2}\int d^3x a(x) \sum_a \frac{e_a}{m_a}\hat{\rho}_a(x)$$

Après l'apparition du champ extérieur $A^{(e)}(x, t)$, $\varphi^{(e)}(x, t)$ l'opérateur statistique du système $\rho(t)$ différera de la distribution de Gibbs, et sa variation dans le temps sera donnée par l'équation

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho(t)], \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H} + V^{(e)}(t)$$

et par la condition initiale $\rho(-\infty) = w$. Ici $V^{(e)}(t)$ est le hamiltonien de l'interaction du système et du champ extérieur

$$V^{(e)}(t) = -\frac{1}{c}\int d^3x A^{(e)}(x, t) j(x) + \int d^3x \varphi^{(e)}(x, t)\hat{\rho}_e(x) + \frac{1}{2c^2}\int d^3x A^{(e)}(x, t)^2 \sum_a \frac{e_a}{m_a}\hat{\rho}_a(x). \tag{6.3.7}$$

Nous allons maintenant trouver les valeurs moyennes des champs électromagnétiques $E(x, t)$, $B(x, t)$ agissant dans le milieu:

$$E(x, t) = \operatorname{Sp}\rho(t) E(x, t), \quad B(x, t) = \operatorname{Sp}\rho(t) H(x, t).$$

En introduisant également les valeurs moyennes des courants et des charges induits:

$$\tilde{\mathcal{J}}(x, t) = \operatorname{Sp}\rho(t)\mathcal{J}(x, t), \quad \tilde{\rho}(x, t) = \operatorname{Sp}\rho(t)\hat{\rho}(x),$$

on obtient, après le moyennage des équations (6.3.7), les équations de Maxwell-Lorentz suivantes pour les champs moyens dans le milieu

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\widetilde{\mathcal{J}} + \boldsymbol{j}'),$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi(\widetilde{\rho} + \rho'). \tag{6.3.8}$$

On voit que dans ces équations, en plus des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ et des densités du courant extérieur et des charges $\boldsymbol{j}^{(\prime)}$, $\rho^{(\prime)}$, on a encore les grandeurs $\widetilde{\mathcal{J}}$ et $\widetilde{\rho}$ qui sont les densités moyennes du courant et de la charge dans le milieu induits par les sources extérieures. C'est pourquoi le problème revient avant tout à trouver ces grandeurs.

A cet effet il y a lieu de se référer au § 4.1. Supposant le champ extérieur faible, on peut calculer les valeurs moyennes $\widetilde{\mathcal{J}}$ et $\widetilde{\rho}$ et utiliser la formule générale (4.1.7), en y entendant par $F_i(\boldsymbol{x}, t)$ les potentiels $-\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{(e)}(\boldsymbol{x}, t)$, $\varphi^{(e)}(\boldsymbol{x}, t)$. En supposant que l'opérateur $\hat{a}$ coïncide avec $\mathcal{J}$ ou avec $\hat{\rho}$, on obtient en approximation linéaire par rapport aux potentiels [79]:

$$\widetilde{\mathcal{J}}_k(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{c}A_k^{(e)}(\boldsymbol{x}, t)\sum_a \frac{e_a}{m_a}\rho_a +$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \left\{-G_{ki}^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t')\frac{1}{c}A_i^{(e)}(\boldsymbol{x}', t') +\right.$$
$$\left. + G_k^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t')\,\varphi^{(e)}(\boldsymbol{x}', t')\right\}, \tag{6.3.9}$$

$$\widetilde{\rho}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_a \rho_a + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \left\{-\overline{G}_i^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t')\frac{1}{c}A_i^{(e)}(\boldsymbol{x}', t') +\right.$$
$$\left. + G^{(+)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t')\,\varphi^{(e)}(\boldsymbol{x}', t')\right\}$$

où $G_{ki}^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)$, $G_k^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)$, $\overline{G}_i^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)$, $G^{(+)}(\boldsymbol{x}, t)$ sont les fonctions de Green retardées des courants et des charges:

$$G_{ki}^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) = -i\theta(t)\operatorname{Sp} w\,[j_k(\boldsymbol{x}, t), j_i(0)], \quad j_k(\boldsymbol{x}, t) \equiv j_k^{(H)}(\boldsymbol{x}, t),$$
$$G_k^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) = -i\theta(t)\operatorname{Sp} w\,[j_k(\boldsymbol{x}, t), \rho(0)],$$
$$G_k^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) = -i\theta(t)\operatorname{Sp} w\,[\rho(\boldsymbol{x}, t), j_k(0)], \tag{6.3.10}$$
$$G^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) = -i\theta(t)\operatorname{Sp} w\,[\rho(\boldsymbol{x}, t), \rho(0)], \rho(\boldsymbol{x}, t) \equiv \rho^{(H)}(\boldsymbol{x}, t).$$

Pour un système électriquement neutre le premier terme dans la seconde des formules (6.3.9) s'annule, $\rho \equiv \sum_a \rho_a = 0$.

Si $A_k^{(e)}(x, t) = \partial\chi/\partial x_k$, $\varphi^{(e)}(x, t) = -\partial\chi/c\partial t$, où χ est une fonction arbitraire, alors vu l'invariance du gradient, les densités du courant et de la charge s'annulent, donc

$$\frac{\partial \overline{G}_i^{(+)}(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G^{(+)}(x, t)}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial G_{ki}^{(+)}(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G_k^{(+)}(x, t)}{\partial t} + \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a \delta(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(x) = 0. \qquad (6.3.11)$$

Remarquons que ces formules peuvent également être obtenues à partir des définitions (6.3.10), en utilisant la loi de la conservation de la charge sous forme opératorielle

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} j(x, t) = 0,$$

et les relations de permutation

$$[\rho(x), \rho(x')] = 0,$$
$$[j_l(x), \rho(x')] = -i \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a(x) \frac{\partial}{\partial x_l} \delta(x - x').$$

Puis en utilisant la loi de la conservation de la valeur moyenne de la charge

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{J}(x, t) = 0,$$

on obtient d'une manière analogue

$$\frac{\partial G_i^{(+)}(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G^{(+)}(x, t)}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial G_{ki}^{(+)}(x, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{G}_i^{(+)}(x, t)}{\partial t} + \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a \delta(t) \frac{\partial}{\partial x_l} \delta(x) = 0. \qquad (6.3.12)$$

En utilisant les composantes de Fourier, on peut écrire les équations (6.3.9) sous la forme

$$\mathfrak{J}_k(k, \omega) = -\frac{1}{c} G_{ki}^{(+)}(k, \omega) A_i^{(e)}(k, \omega) + G_k^{(+)}(k, \omega) \varphi^{(e)}(k, \omega) - \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a A_k^{(e)}(k, \omega),$$

$$\tilde{\rho}(k, \omega) = -\frac{1}{c} \overline{G}_i^{(+)}(k, \omega) A_i^{(e)}(k, \omega) + G^{(+)}(k, \omega) \varphi^{(e)}(k, \omega)$$

(pour la définition des composantes de Fourier voir 4.1.1).

Les composantes de Fourier des fonctions de Green sont liées entre elles, en vertu de (6.3.11), (6.3.12), par les relations suivantes:

$$
\begin{gathered}
G_i^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) k_i - \omega G^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = 0, \\
\overline{G}_i^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) k_i - \omega G^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = 0, \\
G_{ji}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) k_i - \omega G_j^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) + k_j \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a = 0, \\
k_j G_{ji}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) - \omega \overline{G}_j^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) + k_i \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a = 0.
\end{gathered} \tag{6.3.13}
$$

Ces formules permettent facilement d'exprimer $\tilde{\mathcal{J}}_i (\boldsymbol{k}, \omega)$, $\tilde{\rho} (\boldsymbol{k}, \omega)$ en fonction des composantes de Fourier du champ électrique extérieur $\boldsymbol{E}^{(e)} (\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i\omega}{c} \boldsymbol{A}^{(e)} (\boldsymbol{k}, \omega) - i\boldsymbol{k}\varphi^{(e)} (\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\mathcal{J}}_i(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} \left\{ G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) + \delta_{ij} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a \right\} E_j^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega), \\
\tilde{\rho}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} \overline{G}_i^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) E_i^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega).
\end{gathered} \tag{6.3.14}
$$

En vertu de (6.3.13), les fonctions de Green scalaire $G^{(+)}$ et vectorielles $G_i^{(+)}$, $\overline{G}_i^{(+)}$ peuvent s'exprimer par la fonction de Green tensorielle $G_{ij}^{(+)}$. C'est pourquoi, en fin de compte, la réponse du système à un champ électrique extérieur est déterminée seulement par la fonction de Green tensorielle.

Nous allons supposer que le hamiltonien de la substance $\mathcal{H}_m$ est invariant par rapport à l'inversion du temps et que l'état d'équilibre statistique n'est pas dégénéré par rapport à la réflexion spatiale. Conformément à (4.1.30), on aura alors des relations

$$
\begin{gathered}
\overline{G}_i^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = -G_i^{(+)}(-\boldsymbol{k}, \omega) = G_i^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega), \\
G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = G_{ji}^{(+)}(-\boldsymbol{k}, \omega) = G_{ji}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega),
\end{gathered} \tag{6.3.15}
$$

exprimant le principe de symétrie des susceptibilités généralisées par rapport au champ extérieur.

Rappelons que l'opérateur $\int d^3x \rho(\boldsymbol{x})$ étant l'intégrale du mouvement par rapport au hamiltonien $\mathcal{H}_m$, les fonctions de Green vectorielle et scalaire s'annulent pour $\boldsymbol{k} = 0$:

$$
G_i^{(+)}(0, \omega) = G^{(+)}(0, \omega) = 0. \tag{6.3.16}
$$

Nous n'allons envisager ultérieurement qu'un milieu isotrope. La fonction de Green tensorielle sera alors de la forme :

$$G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\delta_{ij} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a - i\omega\bar{\sigma}^l(\boldsymbol{k}, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2} - \\ - i\omega\bar{\sigma}^t(\boldsymbol{k}, \omega)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right), \quad (6.3.17)$$

où

$$\bar{\sigma}^l(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{\omega}\left\{\sum_a \frac{e_a}{m_a}\rho_a + \frac{k_i k_j}{k^2} G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)\right\} = \frac{i\omega}{k^2} G^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega),$$

$$\bar{\sigma}^t(\boldsymbol{k} - \omega) = \frac{i}{\omega}\left\{\sum_a \frac{e_a}{m_a}\rho_a + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)\right\}. \quad (6.3.18)$$

En substituant cette expression pour $G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ dans (6.3.14) et compte tenu de (6.3.13), on obtient :

$$\tilde{\mathcal{J}}_i(\boldsymbol{k}, \omega) = \bar{\sigma}^l(\boldsymbol{k}, \omega)\, k_i \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)}{k^2} + \bar{\sigma}^t(\boldsymbol{k}, \omega) \frac{[[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)], \boldsymbol{k}]_i}{k^2},$$

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{\omega}\bar{\sigma}^l(\boldsymbol{k}, \omega)\, \boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega). \quad (6.3.19)$$

On voit que les grandeurs $\bar{\sigma}^l$ et $\bar{\sigma}^t$ donnent les composantes longitudinale et transversale (par rapport au vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$) de la densité du courant. Ces composantes sont proportionnelles aux composantes longitudinale et transversale du champ électrique extérieur. C'est pourquoi les grandeurs $\bar{\sigma}^l$ et $\bar{\sigma}^t$ peuvent être interprétées comme les coefficients de conductibilité électrique longitudinale et transversale du milieu. Cependant, on entend habituellement par coefficient de conductibilité électrique le coefficient de proportionnalité entre la composante du courant et la composante du champ électrique dans le milieu (voir le paragraphe 6.3.3). C'est pourquoi les grandeurs $\bar{\sigma}^l$ et $\bar{\sigma}^t$ seront appelées *coefficients externes de conductibilité électrique*, à la différence des *coefficients internes*, *ou réels*, *de conductibilité électrique* σ^l et σ^t que nous introduirons dans le paragraphe suivant.

Remarquant que

$$[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)] = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega),$$

où $\boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ est la composante de Fourier du champ magnétique extérieur, on peut récrire l'expression (6.3.19) pour $\tilde{\mathcal{J}}(\boldsymbol{k}, \omega)$, $\tilde{\rho}(\boldsymbol{k}, \omega)$ comme suit

$$\tilde{\mathcal{J}}_i(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\omega\bar{\varkappa}(\boldsymbol{k}, \omega) E_i^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega) + ic\bar{\chi}(\boldsymbol{k}, \omega)[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)]_i. \quad (6.3.20)$$

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{k},\ \omega) = -i\bar{\varkappa}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega),$$

où

$$\begin{aligned}\bar{\varkappa}(\boldsymbol{k},\ \omega) &= \frac{i}{\omega}\bar{\sigma}^{l}(\boldsymbol{k},\ \omega) = -\frac{1}{k^2}G^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega),\\ \bar{\chi}(\boldsymbol{k},\ \omega) &= \frac{i\omega}{c^2k^2}\{\bar{\sigma}^{t}(\boldsymbol{k},\ \omega) - \bar{\sigma}^{l}(\boldsymbol{k},\ \omega)\}.\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

Nous allons montrer qu'en fonction des grandeurs $\bar{\sigma}^l$ et $\bar{\sigma}^t$ que nous avons introduites, on peut exprimer la quantité d'énergie absorbée par le milieu à partir des sources de champ extérieur. La quantité d'énergie, absorbée par le milieu dans l'intervalle des fréquences $d\omega$ et l'intervalle des vecteurs d'onde $d\boldsymbol{k}$ est, en vertu de (4.1.13), donnée par la formule générale

$$Q_{\omega k}\,d\omega\,d\boldsymbol{k} = \frac{-2\omega}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Im}\,F_i^*(\boldsymbol{k},\ \omega)\,G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,F_j(\boldsymbol{k},\ \omega)\,d\omega\,d\boldsymbol{k},$$

où $F_i(\boldsymbol{k},\ \omega)$ est la composante de Fourier du champ extérieur $F_i(\boldsymbol{x},\ t)$ figurant dans le hamiltonien de l'interaction du milieu avec le champ extérieur,

$$V(t) = \int d^3x F_i(\boldsymbol{x},\ t)\,\xi_i(\boldsymbol{x}),$$

et $G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ est la composante de Fourier de la fonction de Green retardée des grandeurs ξ_i et ξ_j. Dans le cas que nous avons envisagé, le hamiltonien de l'interaction $V(t)$ est de la forme (6.3.7) et par conséquent

$$\begin{aligned}F_i^*(\boldsymbol{k},\ \omega)\,G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,F_j(\boldsymbol{k},\ \omega) &= -\frac{1}{c}A_i^{(e)*}(\boldsymbol{k},\ \omega)\times\\ &\times\left\{-\frac{1}{c}G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,A_j^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega) + G_i^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,\varphi^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\right\}+\\ &+\varphi^{(e)*}(\boldsymbol{k},\ \omega)\left\{-\frac{1}{c}\bar{G}_i^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,A_i^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega) + G^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,\varphi^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\right\},\end{aligned}$$

où $G_{ij}^{(+)}$, $G_i^{(+)}$, $\bar{G}_i^{(+)}$, $G^{(+)}$ sont les fonctions de Green déterminées par les formules (6.3.10). En utilisant (6.3.13), on peut en exclure les fonctions de Green scalaire et vectorielles:

$$\begin{aligned}F_i^*G_{ij}^{(+)}F_i &= \frac{1}{\omega^2}E_i^{(e)*}G_{ij}^{(+)}E_j^{(e)}+\\ &+\left\{\frac{k^2}{\omega^2}\varphi^{(e)*}\varphi^{(e)} - \frac{1}{\omega c}A_i^{(e)*}k_i\varphi^{(e)} - \frac{1}{\omega c}A_i^{(e)}k_i\varphi^{(e)*}\right\}\sum_a\frac{e_a}{m_a}\rho_a.\end{aligned}$$

Le second terme étant réel, on a

$$Q_{\omega k} = \frac{-2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\omega}\,E_i^{(e)*}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,E_j^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega).$$

Puis, en utilisant la formule (6.3.17) pour $G_{ij}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$, on trouve finalement:

$$Q_{\omega k}=\frac{2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Re}\,\{\bar{\sigma}^l(\boldsymbol{k}, \omega)\,|E_{\parallel}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)|^2+\bar{\sigma}^t(\boldsymbol{k}, \omega)\,|E_{\perp}^{(e)}(\boldsymbol{k}, \omega)|^2\}, \tag{6.3.22}$$

où

$$E_{\parallel}^{(e)}=\boldsymbol{k}\,\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(e)}}{k^2}, \qquad E_{\perp}^{(e)}=\frac{[[\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{E}^{(e)}],\ \boldsymbol{k}]}{k^2}.$$

Comme $Q_{\omega k}>0$, on a à partir de cette formule

$$\mathrm{Re}\,\bar{\sigma}^l>0, \quad \mathrm{Re}\,\bar{\sigma}^t>0. \tag{6.3.23}$$

Remarquons qu'on peut également vérifier ces inégalités à partir des relations explicites exprimant $\bar{\sigma}^l$ et $\bar{\sigma}^t$ avec des fonctions de Green. Les traces qui déterminent les fonctions de Green doivent alors être calculées à l'aide de la formule

$$\mathrm{Sp}\,wab=\sum_{nm} w_n\,\langle n|a|m\rangle\,\langle m|b|n\rangle,$$

où $j_\mu(x)$ est le vecteur-4 de la densité du courant de particules chargées (ces vecteurs d'état diagonalisent l'opérateur statistique d'équilibre w).

Comme nous l'avons déjà mentionné, toutes les formules précédentes concernent le cas non relativiste, lorsque le hamiltonien de l'interaction des particules de la substance avec le champ électromagnétique extérieur a la forme (6.3.7). Dans le cas relativiste le hamiltonien de l'interaction des particules de la substance et du champ électromagnétique extérieur est donné par la formule suivante

$$V^{(e)}(t)=-\frac{1}{c}\int d^3x\,j_\mu(x)\,A_\mu^{(e)}(x,\ t), \tag{6.3.24}$$

où $j_\mu(x)$ est le vecteur-4 de la densité du courant de particules chargées (de toutes sortes) et $A_\mu^{(e)}(x,\ t)$ le vecteur-4 du potentiel du champ électromagnétique extérieur. Cette expression, à la différence de (6.3.7), ne contient pas de terme quadratique par rapport à $A^{(e)}$. C'est pourquoi toutes les formules de ce paragraphe se simplifient et ne contiendront pas de termes de la forme $\sum_a \frac{e_a}{m_a}\rho_a$.

Dans le cas limite $c\to\infty$, lorsqu'on peut négliger l'interaction $\mathscr{H}_{\mathrm{int}}$ des photons et des charges de la substance, la fonction de Green décrivant la réponse du courant et de la charge au champ électromagnétique extérieur, sera comme précédemment donnée par les formules (6.3.10) dans lesquelles par la densité du courant on entend l'expression (6.3.5) exempte de termes contenant $a(x)$, et par w, la distribution de Gibbs avec le hamiltonien $\mathscr{H}_m$.

Pour conclure ce paragraphe, nous allons trouver la fonction de Green $G_{ij}^{(+)}(k, \omega)$ pour un gaz parfait de bosons ou de fermions. Dans ce cas, le hamiltonien $\mathscr{H}_m$ coïncide avec le hamiltonien $\mathscr{H}_0$:

$$\mathscr{H}_0 = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}, \qquad \varepsilon_p = p^2/2m,$$

et la distribution de Gibbs du moyennage dans $G_{ij}^{(+)}(k, \omega)$ coïncide avec la distribution de Gibbs w_0 d'un gaz parfait (voir la formule (3.1.2); on suppose qu'il n'y a de particules que d'une sorte).

En remarquant que

$$\psi_\sigma(x) = \mathscr{V}^{-1/2} \sum_p a_{p\sigma} e^{ipx},$$

on obtient en vertu de (6.3.5) l'expression suivante pour l'opérateur de la densité de courant:

$$j_l(x, t) = \mathscr{V}^{-1} \sum_{pp'} e^{ix(p-p')-it(\varepsilon_p-\varepsilon_{p'})} \left\{ a_{p'\sigma}^+ a_{p\sigma} \frac{e}{2m} (p+p')_l + \right.$$
$$\left. + a_{p'\sigma'}^+ (s_l)_{\sigma'\sigma} a_{p\sigma} \frac{i\mu}{s} (p-p')_k \, \varepsilon_{ikl} \right\}.$$

Il est facile de voir que

$$\operatorname{Sp} w_0 [a_{i_1}^+ a_{i_2}, a_{i_1'}^+ a_{i_2'}] = \delta_{i_1 i_2'} \delta_{i_2 i_1'} (n_{i_1} - n_{i_2}), \qquad i \equiv p, \sigma,$$

où $n_i = \operatorname{Sp} w_0 a_i^+ a_i$ est la fonction de distribution d'équilibre d'un gaz parfait de bosons ou de fermions. En utilisant cette formule, on obtient après des calculs simples l'expression suivante pour la fonction de Green $G_{ij}^{(+)}(x, t)$:

$$G_{ij}^{(+)}(x, t) = -i\theta(t) \left(\frac{e}{2m}\right)^2 \mathscr{V}^{-2} \sum_{pp'} \exp\{ix(p-p') - it(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})\} \times$$
$$\times (2s+1)(n_{p'} - n_p)(p+p')_i (p+p')_j + i\theta(t) \left(\frac{\mu}{s}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{(2s+1)s(s+1)}{3} \mathscr{V}^{-2} \sum_{pp'} \exp\{ix(p-p') - it(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})\} (n_{p'} - n_p) \times$$
$$\times \{(p-p')_i (p-p')_j - \delta_{ij}(p-p')^2\},$$

où s est le spin d'une particule. Nous avons tenu compte des formules suivantes pour les traces des matrices spinorielles:

$$\operatorname{Sp} s_l = 0, \qquad \operatorname{Sp} s_i s_j = {}^1/_3 (2s+1) s (s+1) \delta_{ij}.$$

La composante de Fourier de la fonction de Green $G_{ij}^{(+)}$ est donnée par la formule

$$G_{ij}^{(+)}(k, \omega) = \frac{i}{8\pi^2} \left(\frac{e}{2m}\right)^2 \int d^3p \, (n_p - n_{p-k})(2p-k)_i (2p-k)_j \times$$
$$\times (2s+1) \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-k}) + i \left(\frac{\mu}{s}\right) \frac{(2s+1)s(s+1)}{24\pi^2} \times$$
$$\times \int d^3p \, (n_p - n_{p-k}) \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-k}) (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j). \qquad (6.3.25)$$

Remarquant que

$$(2p - k)\,k = -2m\,(\varepsilon_{p-k} - \varepsilon_p + \omega - \omega),$$

et en utilisant (6.3.13), on obtient

$$G^{(+)}(k,\ \omega) = \frac{ie^2}{8\pi^2}(2s+1)\int d^3p\,(n_p - n_{p-k})\,\delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-k}). \tag{6.3.26}$$

Les formules (6.3.25), (6.3.26) déterminent les fonctions de Green électrodynamiques d'un gaz parfait de bosons ou de fermions.

6.3.3. Relation entre les susceptibilités internes et externes. Les équations de Maxwell-Lorentz (6.3.8) contiennent, en plus des champs moyens $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, les valeurs moyennes des densités du courant et de la charge des particules du milieu $\tilde{\mathcal{J}}$ et $\tilde{\rho}$, induites par les courants et les charges extérieures $\boldsymbol{j}'$, ρ'. Cependant, au lieu de ces grandeurs, on utilise habituellement les *vecteurs aimantation* $\boldsymbol{M}$ et *polarisation* $\boldsymbol{P}$, liés à $\tilde{\mathcal{J}}$ et $\tilde{\rho}$ par les relations suivantes

$$\tilde{\mathcal{J}} = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}, \qquad \tilde{\rho} = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}. \tag{6.3.27}$$

Il est évident qu'alors la loi de la conservation de la charge se trouve automatiquement vérifiée. Cependant ces équations ne déterminent pas d'une manière univoque les grandeurs $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{P}$ pour des $\tilde{\mathcal{J}}$ et $\tilde{\rho}$ donnés (car on a six inconnues et trois équations). On peut néanmoins définir les vecteurs aimantation et polarisation d'une manière univoque. Remarquons à cet effet que les densités du courant et de la charge $\tilde{\mathcal{J}}$ et $\tilde{\rho}$ que nous avons exprimées en fonction du champ extérieur $\boldsymbol{E}^{(e)}$ peuvent également s'exprimer en fonction des champs internes $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, à condition d'utiliser les équations (6.3.8) et les équations de Maxwell pour les champs extérieurs:

$$\begin{gathered} i\,[\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{H}^{(e)}] = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}^{(e)} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}', \qquad i\,[\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{E}^{(e)}] = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}^{(e)}, \\ i\boldsymbol{k}\boldsymbol{H}^{(e)} = 0, \qquad i\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(e)} = 4\pi\rho'. \end{gathered} \tag{6.3.28}$$

En effet, ces équations permettent d'exprimer $\boldsymbol{j}'$ et ρ' en fonction du champ extérieur $\boldsymbol{E}^{(e)}$; les équations (6.3.8) et les définitions (6.3.19) des densités du courant $\tilde{\mathcal{J}}$ et de la charge $\tilde{\rho}$ permettent ensuite de trouver la relation existant entre les champs externe et interne. On peut ainsi dire que dans le cas isotrope on a à sa disposition deux vecteurs indépendants: l'intensité du champ électrique interne $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ et le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ (le vecteur induction magnétique $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ sera alors donné par la formule $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\ \omega)]$). On peut maintenant trouver le vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$ de telle sorte qu'il soit dirigé le long du vecteur $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\ \omega)$, et le vecteur aimantation $\boldsymbol{M}$ le long du vecteur $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ ou, ce qui

est la même chose, le long du vecteur $[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)]$. L'introduction des vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ devient alors univoque, et on peut ainsi poser:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varkappa(\boldsymbol{k}, \omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\chi(\boldsymbol{k}, \omega)}{\mu(\boldsymbol{k}, \omega)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{6.3.29}$$

où

$$\mu(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 + 4\pi\chi(\boldsymbol{k}, \omega),$$

et $\varkappa$ et χ sont des constantes matérielles dépendant de $\boldsymbol{k}$ et de ω. La première est appelée susceptibilité diélectrique interne ou plus simplement *susceptibilité diélectrique*, et la seconde susceptibilité magnétique interne ou simplement *susceptibilité magnétique*. La grandeur μ est appelée *perméabilité magnétique*.

Nous allons maintenant introduire le vecteur champ magnétique $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega)$ et le vecteur induction électrique $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega) - 4\pi\boldsymbol{M}(\boldsymbol{k}, \omega), \\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) + 4\pi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}, \omega), \end{gathered} \tag{6.3.30}$$

A partir de (6.3.29) on a alors

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega) = \mu(\boldsymbol{k}, \omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}\omega), \tag{6.3.31}$$

où

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 + 4\pi\varkappa(\boldsymbol{k}, \omega).$$

Cette grandeur est appelée *perméabilité diélectrique* (*constante diélectrique*).

En vertu de (6.3.27), (6.3.30) les équations de Maxwell-Lorentz (6.3.8) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}', \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho' \end{gathered} \tag{6.3.32}$$

ou en composantes de Fourier

$$\begin{gathered} i[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{H}] = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}', \quad i[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}] = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}, \\ i\boldsymbol{k}\boldsymbol{B} = 0, \quad i\boldsymbol{k}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho'. \end{gathered} \tag{6.3.33}$$

A partir de (6.3.27), on a

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{k}, \omega) = ic[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{M}] - i\omega\boldsymbol{P}, \quad \tilde{\rho}(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\boldsymbol{k}\boldsymbol{P}.$$

C'est pourquoi, en vertu de (6.3.30), (6.3.31), on obtient

$$\begin{gathered} \tilde{\mathfrak{J}}(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\omega\varkappa(\boldsymbol{k}, \omega)\boldsymbol{E} + ic\frac{\chi(\boldsymbol{k}, \omega)}{\mu(\boldsymbol{k}, \omega)}[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B}], \\ \tilde{\rho}(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\varkappa(\boldsymbol{k}, \omega)\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}. \end{gathered} \tag{6.3.34}$$

Puis à partir des équations (6.3.28), (6.3.33) on a

$$H^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega)=\frac{\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\dfrac{k^2}{\mu}}{\dfrac{\omega^2}{c^2}-k^2}\boldsymbol{B},\qquad \boldsymbol{E}_{\perp}^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega)=\frac{\omega}{ck^2}\,\frac{\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\dfrac{k^2}{\mu}}{\dfrac{\omega^2}{c^2}-k^2}[\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{k}],$$

$$\boldsymbol{E}_{\parallel}^{(e)}(\boldsymbol{k},\ \omega)=\varepsilon\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}.$$

En substituant ces formules dans (6.3.19), on obtient

$$\mathfrak{J}(\boldsymbol{k},\ \omega)=\bar{\sigma}^l\varepsilon\boldsymbol{E}+\left\{\frac{\omega\bar{\sigma}^t}{ck^2}\,\frac{\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\dfrac{k^2}{\mu}}{\dfrac{\omega^2}{c^2}-k^2}-\varepsilon\bar{\sigma}^l\frac{\omega}{ck^2}\right\}[\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{k}].$$

En comparant cette formule avec (6.3.34), on voit que

$$-i\omega\varkappa=\bar{\sigma}^l\varepsilon,\qquad \frac{\chi}{\mu}=\frac{i\omega}{c^2k^2}\left\{\frac{\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\dfrac{k^2}{\mu}}{\dfrac{\omega^2}{c^2}-k^2}\bar{\sigma}^t-\varepsilon\bar{\sigma}^l\right\}.$$

D'où

$$\varepsilon=\left(1+\frac{4\pi\bar{\sigma}^l}{i\omega}\right)^{-1},$$

$$\frac{\chi}{\mu}=\frac{i\omega}{c^2k^2}\left\{\frac{\bar{\sigma}^t}{1+\dfrac{4\pi\bar{\sigma}^t}{i\omega}\left(1-\dfrac{k^2c^2}{\omega^2}\right)^{-1}}-\frac{\bar{\sigma}^l}{1+\dfrac{4\pi\bar{\sigma}^l}{i\omega}}\right\}.\qquad (6.3.35)$$

Tenant compte alors de ce qu'en vertu des équations de Maxwell-Lorentz on a

$$[\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B}]=\frac{c}{\omega}(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E})-k^2\boldsymbol{E}),$$

la densité du courant $\mathfrak{J}$ peut donc s'écrire comme suit

$$\mathfrak{J}(\boldsymbol{k},\ \omega)=\sigma^l(\boldsymbol{k},\ \omega)\boldsymbol{E}_{\parallel}(\boldsymbol{k},\ \omega)+\sigma^t(\boldsymbol{k},\ \omega)\boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{k},\ \omega),\qquad (6.3.36)$$

où $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ et $\boldsymbol{E}_{\perp}$ sont les composantes transversale et longitudinale du vecteur $\boldsymbol{E}$ par rapport au vecteur $\boldsymbol{k}$ et

$$\sigma^l=\frac{\bar{\sigma}^l}{1+\dfrac{4\pi\bar{\sigma}^l}{i\omega}},\qquad \sigma^t=\frac{\bar{\sigma}^t}{1+\dfrac{4\pi\bar{\sigma}^t}{i\omega}\left(1-\dfrac{k^2c^2}{\omega^2}\right)^{-1}}.\qquad (6.3.37)$$

On appelle les grandeurs σ^l et σ^t conductibilités internes longitudinale et transversale *).

---

*) La relation entre les susceptibilités internes et externes en l'absence de dispersion spatiale a été étudiée dans [54], et en présence de dispersion spatiale, dans [12].

Les susceptibilités $\varkappa$, χ peuvent, en vertu de (6.3.34), (6.3.36), s'exprimer en fonction de σ^l et de σ^t :

$$\varkappa = \frac{i}{\omega}\sigma^l, \quad \frac{\chi}{\mu} = \frac{i\omega}{c^2k^2}(\sigma^t - \sigma^l).$$

Ces formules sont analogues aux formules (6.3.21) pour $\bar{\varkappa}$ et $\bar{\chi}$. C'est pourquoi les grandeurs $\bar{\varkappa}$, $\bar{\chi}$ peuvent être appelées susceptibilités externes. Remarquons cependant que la grandeur $\bar{\varkappa}E^{(e)}$ pour des ω et $\boldsymbol{k}$ arbitraires ne coïncide pas avec le vecteur $\boldsymbol{P}$, et la grandeur $\bar{\chi}\boldsymbol{H}^{(e)}$ ne coïncide pas avec le vecteur $\boldsymbol{M}$.

Les équations (6.3.32) et (6.3.31) sont appelées *équations de Maxwell* pour le milieu.

Nous avons ainsi relié les susceptibilités et les conductibilités internes aux susceptibilités et aux conductibilités externes. Comme nous l'avons vu, ces dernières grandeurs s'expriment par des fonctions de Green retardées des courants et des charges microscopiques.

Au paragraphe 6.3.2, nous avons défini la fonction de Green $G^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$ d'un gaz parfait. Connaissant $G^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$, on peut à l'aide de la formule (6.3.35) (voir également la formule (6.3.17) pour σ^l)

$$\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi}{k^2} G^{(+)}(\boldsymbol{k}, \omega)$$

calculer la perméabilité diélectrique d'un gaz parfait

$$\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 + \frac{ie^2}{2\pi k^2}(2s+1)\int d^3p\,(n_p - n_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})\,\delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}). \tag{6.3.38}$$

Cette formule donne un résultat exact seulement dans le domaine des ω et $\boldsymbol{k}$ grands. Par contre si les pulsations ω et les vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}$ sont petits, on ne peut pas l'utiliser, car alors l'interaction entre les particules dont nous n'avons pas tenu compte en démontrant la formule (6.3.38) est importante.

La formule exacte pour $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ dans le domaine des basses fréquences peut être obtenue à partir des formules (5.4.61), (5.4.59) grâce auxquelles le problème de la recherche de l'expression asymptotique de la fonction de Green revient à la résolution de l'équation cinétique linéarisée. Si l'équation cinétique ne tient compte que du champ self-consistent et si l'interaction entre les particules est coulombienne, on obtient la formule suivante pour $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$:

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 1 - \frac{ie^2}{2\pi k^2}(2s+1)\int d^3p\,(n_p - n_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})\,\delta_+(\omega - \varepsilon_{\boldsymbol{p}} + \varepsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}),$$

qui est vraie à condition de négliger les phénomènes d'échange [103]. Dans le cas classique, où $k \ll \bar{\lambda}^{-1}$ ($\bar{\lambda}$ étant la longueur moyenne d'onde broglienne d'une particule), cette formule devient la formule (1.5.30) pour la constante diélectrique du plasma.

Dans le paragraphe précédent nous avons défini l'énergie $Q_{\omega k}$ absorbée par le milieu à partir des sources de champ électromagnétique extérieures. Nous avons précédemment exprimé $Q_{\omega k}$ en fonction du champ électrique extérieur. Mais cette grandeur peut également être exprimée en fonction des courants extérieurs. A cet effet, il y a lieu d'utiliser les équations de Maxwell (6.3.28) à partir desquelles on a

$$E_{\parallel}^{(e)} = -\frac{4\pi i}{\omega} j'_{\parallel}, \quad E_{\perp}^{(e)} = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{-1} j'_{\perp},$$

où $j'_{\parallel}$ et $j'_{\perp}$ sont les composantes longitudinale et transversale du vecteur j' par rapport au vecteur k. En substituant ces expressions dans (6.3.22) et compte tenu de la relation (6.3.35), on obtient

$$Q_{\omega k} = \frac{-2}{(2\pi)^4} \operatorname{Im} \left\{ \frac{4\pi}{\omega\varepsilon} |j'_{\parallel}|^2 + \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{|j'_{\perp}|^2}{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \frac{k^2}{\mu}} \right\}. \quad (6.3.39)$$

Vu que toujours $Q_{\omega k} > 0$, on a les inégalités

$$\operatorname{Im} \varepsilon > 0, \quad \operatorname{Im}\left(\varepsilon - \frac{c^2 k^2}{\omega^2 \mu}\right) > 0.$$

Notons que ces inégalités découlent de l'inégalité (6.3.23) et des relations (6.3.35) reliant ε et μ aux conductibilités extérieures $\bar{\sigma}^l$ et $\bar{\sigma}^t$.

On peut utiliser (6.3.39) pour trouver l'énergie que perd une particule chargée en passant à travers la substance. Si les pertes d'énergie ne sont pas grandes, le mouvement des particules peut être supposé uniforme. La densité du courant de la particule sera alors donnée par la formule

$$j'(x, t) = zev\,\delta(x - vt),$$

où ze est la charge de la particule et v sa vitesse. La composante de Fourier de la densité du courant est de toute évidence égale à

$$j'(k, \omega) = 2\pi zev\,\delta(\omega - kv).$$

Ceci permet de trouver les composantes longitudinale et transversale de $j'(k, \omega)$, et compte tenu de ce que

$$\delta^2(\omega - kv) = \frac{T}{2\pi}\delta(\omega - kv),$$

où T est le temps du parcours de la particule, on obtient l'expression suivante pour l'énergie perdue par la particule par unité de temps sur l'intervalle des fréquences $d\omega$ et des longueurs d'onde dk:

$$-d\varepsilon_{\omega k} = q_{\omega k}\, d\omega\, dk,$$

$$q_{\omega k} = \frac{Q_{\omega k}}{T} = -\left(\frac{ze}{\pi}\right)^2 \delta(\omega - kv)\,\omega \operatorname{Im} \frac{\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\varepsilon\mu}}{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \frac{k^2}{\mu}}. \quad (6.3.40)$$

En intégrant cette expression sur les ω et $\boldsymbol{k}$, on trouve la perte totale d'énergie de la particule par unité de parcours:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx}=\frac{1}{v}\int d\omega\, d^3k q_{\omega\boldsymbol{k}}.$$

Dans le domaine de la transparence, l'apport essentiel dans cette intégrale provient des pôles de l'expression sous l'intégrale donnés par les équations

$$\varepsilon(\boldsymbol{k},\ \omega)=0,\quad \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\boldsymbol{k},\ \omega)\mu(\boldsymbol{k},\ \omega)-k^2=0. \tag{6.3.41}$$

Les pertes liées aux zéros de ε sont dites *pertes de polarisation*, et celles liées aux zéros de $\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - k^2$ sont dites *pertes de Tcherenkov.*

Les relations (6.3.41) ont un sens physique simple. Ce sont les équations de dispersion pour les ondes libres susceptibles de se propager dans le milieu qui découlent des équations de Maxwell (6.3.32), à condition d'y poser $j' = \rho' = 0$. Il est facile de voir que l'équation de dispersion $\varepsilon = 0$ détermine les *ondes longitudinales* et l'équation $\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - k^2 = 0$ les *ondes transversales.*

BIBLIOGRAPHIE

1. *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский*, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962.
2. *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, «Наука», 1973.
3. *А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин*, Время намагничения слабого раствора He^3 в He^4, ДАН СССР 92, 259 (1953).
4. *А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский*, К теории релаксационных процессов при низких температурах, ЖЭТФ 36, 216 (1959).
5. *А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук*, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950.
6. *А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский*, Кинетика черного излучения, ДАН СССР 200, 1317 (1971).
7. *А. И. Ахиезер*, К теории теплопроводности диэлектриков, ЖЭТФ 10, 1934 (1940).
8. *А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар*, Теплопроводность ферродиэлектриков, ФТТ 2, 2442 (1960).
9. *А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский*, Введение в физическую кинетику, препринт ИТФ-71-96Р, Киев, 1971.
10. *А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар*, Кинетическое уравнение Больцмана, препринт ИТФ-73-48Р, Киев, 1973; Теория явлений переноса в газах, препринт ИТФ-73-49Р, Киев, 1973.
11. *А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов*, Электродинамика плазмы, «Наука», 1974.
12. *И. А. Ахиезер*, К теории электромагнитных восприимчивостей систем заряженных частиц, УФЖ, VI, 435 (1961).
13. *R. Balescu*, Statistical Mechanics of Charged Particles, London, 1963.
14. *R. Balescu*, Dynamical correlation patterns a new representation of the Liouville equation, Physica 56, 1 (1971).
15. *J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer*, Microscopic Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 106, 162 (1957); Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
16. *В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*, К теории неравновесных процессов в статистической механике II, препринт ИТФ-68-4, Киев, 1968.
17. *В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский*, Кинетика слабонеоднородных состояний в системах многих частиц I, препринт ИТФ-69-56, Киев, 1969.
18. *Н. Н. Боголюбов*. Лекції з квантової статистики, «Радянська школа», К., 1949 (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд-во «Наукова думка», Киев, 1970).

19. *Н. Н. Боголюбов*, Квазисредние в задачах статистической механики, препринт — 1451, ОИЯИ, Дубна, 1963 (см. Избранные труды в трех томах, т. 3, изд. «Наукова думка», Киев, 1971).
20. *Н. Н. Боголюбов*, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946 (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд. «Наукова думка», Киев, 1970).
21. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1976.
22. *Н. Н. Боголюбов*, К теории сверхтекучести, Изв. АН СССР, сер. физ., т. 11 (1947).
23. *Н. Н. Боголюбов*, О новом методе в теории сверхпроводимости, ЖЭТФ 34, 58 (1958); препринт П-94, ОИЯИ, Дубна, 1957.
24. *Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков*, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР, 1958.
25. *Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов*, Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике, ДАН СССР 126, 53 (1959).
26. *Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров*, Кинетические уравнения в квантовой механике, ЖЭТФ 17, 614 (1947).
27. *N. N. Bogoliubow, O. A. Parasiuk*, Acta Math. 97, 227 (1957).
28. *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров*, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», 1969.
29. *Н. Н. Боголюбов*, К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости, препринт Р-1395, ОИЯИ, Дубна, 1963 (см. Избранные труды в трех томах, т. 3, Изд-во «Наукова думка», Киев, 1971).
30. *Н. Н. Боголюбов*, Рівняння гідродинаміки в статистичній механіці, зб. праць ін-ту мат. № 10, 41 (1948) (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд-во «Наукова думка», Киев, 1970).
31. *Н. Н. Боголюбов* (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, «Наука», 1974.
32. *Н. Н. Боголюбов* (мл.), *Б. И. Садовников*, Функции Грина и функции распределения в статистической механике классических систем, ЖЭТФ 43, 677 (1962).
33. *Л. Больцман*, Лекции по теории газов, Гостехиздат, 1956.
34. *В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов*, Метод функций Грина в статистической механике, Физматгиз, 1961.
35. *M. Born, H. S. Green*, A general kinetic theory of liquids, Proc. Roy. Soc. A188, 10 (1947).
36. *E. Wigner*, Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, New York, 1959.
37. *E. P. Wigner*, On the quantum correction for thermodinamic equilibrium, Phys. Rev. 40, 749 (1932).
38. *Ю. П. Вирченко, С. В. Пелетминский*, Квантовые вириальные разложения в теории кинетических уравнений, ТМФ 27, 94 (1976).
39. *Ю. П. Вирченко*, Вириальные разложения в равновесной квантовой статистической механике, препринт ХФТИ 75-31, Харьков, 1975.
40. *А. А. Власов*, О вибрационных свойствах электронного газа, ЖЭТФ 8, 291 (1938).
41. *Гейзенберг*, Физические принципы квантовой теории, Гостехиздат, 1932.
42. *Дж. В. Гиббс*, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, 1946.
43. *Г. Голдстейн*, Классическая механика, «Наука», 1975.
44. *Л. Э. Гуревич*, Физическая кинетика, Гостехиздат, 1940.
45. *Л. Э. Гуревич*, Кинетика намагничения одноатомных парамагнитных газов, ЖЭТФ 6, 544 (1936).
46. *К. П. Гуров*, Основания кинетической теории, «Наука», 1966.
47. *К. П. Гуров*, К квантовой гидродинамике, ЖЭТФ 18, 110 (1948); 20, 279 (1950).

48. *J. Goldstone*, Field Theories of « Superconductor » Solutions, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
49. *И. И. Гольдман*, Колебания электронного газа с функцией распределения Ферми в состоянии вырождения, ЖЭТФ 17, 681 (1947).
50. *Ф. С. Джепаров, В. А. Красников*, Уравнения гидродинамики и функции Грина, ТМФ 14, 82 (1973).
51. *F. Dyson*, Thermodynamic Behavior of on Ideal Ferromagnet., Phys. Rev. 102, 1230 (1956).
52. *P. De Gennes*, Superconductivity of Metals and Alloys, New York, 1966.
53. *П. А. М. Дирак*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
54. *И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский*, Ван-дер-ваальсовы силы в неоднородном диэлектрике, ЖЭТФ 36, 1797 (1959).
55. *J. Ziman*, Principles of the Theory of Solids, Cambridge, 1964.
56. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, « Наука », 1967.
57. *Д. Н. Зубарев*, Статистический оператор для неравновесных систем, ДАН СССР 140, 92 (1961) ; Локально равновесный ансамбль Гиббса и его связь с теорией флуктуаций и явлений переноса, ДАН СССР 162, 532 (1965).
58. *Д. Н. Зубарев*, Неравновесная статистическая термодинамика, « Наука », 1971.
59. *Д. Н. Зубарев*, Граничные условия для статистических операторов в теории неравновесных процессов и квазисредние, ТМФ 3, 276 (1970).
60. *Д. Н. Зубарев, В. П. Калашников*, Построение статистических операторов для неравновесных процессов, ТМФ 3, 126 (1970).
61. Termodinamika dei processi irreversibili, Bologne, 1960.
62. *T. Carleman*, Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz, Uppsala, 1957.
63. *S. T. Choh, G. E. Uhlenbeck*, The Kinetic Theory of Phenomena in Dense Gases, Navy Theoretical Physics, Contract No. Nonr. 1224 (15), 1958.
64. *А. А. Красовский*, Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, « Наука », 1974.
65. *Ю. Л. Климонтович*, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд-во МГУ, 1964.
66. *Ю. Л. Климонтович*, Статистическая теория неупругих процессов в плазме, ЖЭТФ 52, 1233 (1967) ; ЖЭТФ 54, 135 (1968).
67. *Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин*, О спектрах систем взаимодействующих частиц, ЖЭТФ 23, 151 (1952).
68. *А. С. Компанеец*, Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами, ЖЭТФ 31, 876 (1956).
69. *L. N. Cooper*. Bound Electron Pairs in Degenerate Fermi Gas, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
70. *R. Kubo*, Journ. Phys. Soc. Japan, 12, No. 6, 570 (1957).
71. *Л. Д. Ландау*, Теория сверхтекучести гелия II, ЖЭТФ 11, 592 (1941).
72. *Л. Д. Ландау*, Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия, ЖЭТФ 7, 203 (1937).
73. *Л. Д. Ландау*, Теория ферми-жидкости, ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
74. *Л. Д. Ландау*, Колебания ферми-жидкости, ЖЭТФ 32, 59 (1957).
75. *Л. Д. Ландау*, О колебаниях электронной плазмы, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
76. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
77. *A. Lennard*, On Bogolubovs kinetic equation for a spatially homogeneous plasma, Ann. Phys. 3, 90 (1960).
78. *М. А. Леонтович*, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944.
79. *P. Martin, J. Schwinger*, Theory of Many-Particle Systems, Phys. Rev. 115, No 6, 1342 (1959).
80. *T. Matsubara*, Prog. Theor. Phys. 14, 351 (1955).

81. *P. Mazur, E. Montroll*, J. Math. Phys. 1, 70 (1960).
82. *H. Mori*, Statistical — Mechanical Theory of Transport in Fluids. Phys. Rev. 112, 1829 (1958).
83. *Фон-Нейман*, Математические основы квантовой механики, « Наука », 1964.
84. *R. Newton*, Scattering Theory of Waves and Particles, New York, 1967.
85. *С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский*, Операторы потоков физических величин и метод квазисредних, ТМФ 18, 121 (1974).
86. *С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*, К теории неравновесных процессов в статистической механике III, препринт ИТФ-68-5, Киев, 1968.
87. *С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*, Метод производящего функционала и вириальные разложения в неравновесной статистической механике, ТМФ 3, 287 (1970).
88. *С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*, К квантовой теории кинетических и релаксационных процессов, ЖЭТФ 53, 1327 (1967) ; К теории неравновесных процессов в статистической механике I, препринт ИТФ-68-3, Киев, 1968.
89. *С. В. Пелетминский, В. И. Приходько*, Метод асимптотических операторов в статистической механике I, II, ТМФ 12, 88 (1972); 12, 283 (1972); Метод асимптотических операторов (пространственно-неоднородные состояния), препринт ИТФ-71-87Р, Киев, 1971.
90. *С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов*, К кинетике пространственно-неоднородных состояний, ТМФ 6, 238 (1971).
91. *С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский*, Неравновесная энтропия и определение произведений обобщенных функций, ТМФ 20, 381 (1974); К вопросу о построении неравновесной энтропии, ТМФ 20. 85 (1974).
92. *С. В. Пелетминский*, К теории кинетических уравнений при наличии связанных состояний частиц, ТМФ 6, 123 (1971).
93. *С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов*, К кинетике систем в переменных внешних полях, ТМФ 7, 395 (1971).
94. *С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский, В. С. Щелоков*, « Низкочастотная асимптотика функций Грина и метод сокращенного описания », препринт ИТФ-75 129Р, Киев, 1975.
95. *С. В. Пелетминский*, Кинетика слабонеоднородных состояний в системах многих частиц II, препринт ИТФ-69-58, Киев, 1969.
96. *С. В. Пелетминский, В. С. Щелоков*, Низкочастотная асимптотика электродинамических функций Грина, ТМФ 25, 70 (1975).
97. *I. Prigogine*, Non-Equilibrium Statistical Mechanics, New York, 1962.
98. *В. И. Приходько*, Применение эргодических соотношений к неоднородным системам со слабым взаимодействием, препринт ИТФ-72-188Р, Киев, 1972.
99. *В. И. Приходько*, Слабонеоднородные состояния в системе типа жидкость-газ, препринт ИТФ-72-29Р, Киев, 1972.
100. *Б. Н. Провоторов*, О магнитном резонансном насыщении в кристаллах, ЖЭТФ 41, 1582 (1961).
101. *D. Ruelle*, Statistical Mechanics, Rigourous Results, New York, 1969.
102. *Б. И. Садовников*, Уравнения для « классических » функций Грина в кинетическом приближении, ДАН СССР 164, 785 (1965).
103. *В. П. Силин*, Введение в кинетическую теорию газов, « Наука », 1971.
104. *В. П. Силин, А. А. Рухадзе*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
105. *В. П. Силин*, К теории спектра возбуждений системы многих частиц, ЖЭТФ 23, 641 (1952).
106. *В. П. Силин*, Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов, ЖЭТФ 38, 1771 (1960).
107. *В. П. Силин*, О высокочастотной диэлектрической проницаемости плазмы, ЖЭТФ 41, 861 (1961).

108. *В. В. Толмачев*, Теория бозе-газа, Изд-во МГУ, 1969.
109. *В. В. Толмачев*, Теория ферми-газа, Изд-во МГУ, 1973.
110. *G. Uhlenbeck*, *G. Ford*, Lectures in Statistical Mechanics, Providence (Rod-Island), 1963.
111. *S. Fujita*, Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics, Philadelphie, 1966.
112. *I. E. Farquhar*, Ergodic theory in statistical mechanics : Interscience publishers a division of John Wiley & Sons, Ltd., London — New York — Sydney, 1964.
113. Ergodic theory, Academic Press New York and London 1960 (international school of physics « Enrico Fermi »).
114. *И. М. Халатников*, Теория сверхтекучести, « Наука », 1971.
115. *T. Hill*, Statistical Mechanics, New York, 1956.
116. *L. Van Hove*, Physica 21, 517 (1955).
117. *K. Huang*, Statistical Mechanics, New York, 1963.
118. *S. Chandrasekhar*, Stochastic Problems in Physics and Astronomy, Rev. Mod. Phys. 15, No. 1, 1-89 (Jan. 1943).
119. *S. Chapman*, *T. Cowling*, The Mathematical Theory of Non-Uinform Gases, Cambridge, 1952.

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse: 1[er] Rijski péréoulok, 2, Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

THÉORIE DU CORPS SOLIDE

par A. Davydov

L'ouvrage du professeur A. Davydov est un exposé développé du cours de la théorie du corps solide qu'il dispense depuis de nombreuses années aux étudiants de la faculté de physique de l'Université de Kiev. C'est un ouvrage de base consacré à la théorie des différents types d'excitations collectives élémentaires (phonons, plasmons, magnons et excitons) qui apparaissent dans les corps solides et qui se manifestent dans différents effets physiques. Ce livre initie le lecteur à l'étude des principales méthodes mises en œuvre en théorie du solide pour décrire les phénomènes physiques qui s'y manifestent. L'exposé est basé sur l'appareil mathématique de la théorie quantique moderne, ce qui permet à l'auteur de traiter à un niveau convenable de toutes les questions importantes de la théorie du solide. Ce livre donne une formation théorique amplement suffisante pour permettre au lecteur d'étudier les publications scientifiques consacrées aux recherches théoriques et expérimentales dans le domaine de la physique du solide.

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE

par A. Kostrikine

L'ouvrage de A. Kostrikine, membre-correspondant de l'Académie des sciences de l'UR.S.S., a pour base un cours de conférences d'algèbre supérieure, lues pendant plusieurs années à la faculté de mathématiques et de mécanique de l'Université de Moscou. Depuis longtemps l'on ressentait le besoin d'un manuel d'algèbre conçu dans un esprit et un style nouveaux. Cette lacune est maintenant comblée. En effet l'auteur s'est attaché à jeter un jour nouveau sur les divers aspects de l'algèbre sans pour autant abuser des notions abstraites. Outre les questions traditionnelles, il aborde les propriétés générales des applications et des relations binaires, les groupes de transformations, les propriétés structurales des groupes élémentaires, des éléments de la théorie des représentations, la divisibilité dans les anneaux, des notions générales sur les corps finis et les corps de nombres algébriques. Les nombreux exemples et exercices, qui sont de nature essentiellement théorique, prolongent le sujet principal et, en même temps qu'ils égayent l'exposé, soulignent l'élégance et la puissance des méthodes de l'algèbre. Beaucoup d'exercices sont accompagnés des indications nécessaires à leur résolution.

ÉLÉMENTS DE CALCUL NUMÉRIQUE EN ALGÈBRE LINÉAIRE

par V. Voïévodine

Le cours de V. Voïévodine, docteur ès sciences physiques et mathématiques, a pour objet la description et l'étude des méthodes numériques de résolution des problèmes d'algèbre linéaire. L'auteur soumet à l'étude systématique les erreurs d'arrondi des opérations arithmétiques élémentaires, leur origine, leurs propriétés et l'action qu'elles exercent sur les processus de calcul; pour la première fois sont examinées les propriétés probabilistes des erreurs d'arrondi. L'ouvrage traite des méthodes numériques principales relatives à la résolution des systèmes linéaires, au calcul des déterminants, à la résolution du problème des valeurs propres. Une attention particulière est portée sur l'étude de la stabilité numérique des méthodes. On y trouve également la description des méthodes de résolution des problèmes instables d'algèbre linéaire et des problèmes de dimension n. Le présent ouvrage est intimement lié au cours d'« Algèbre linéaire » de V. Voïévodine paru en français aux éditions « MIR » en 1976 et exposant la théorie de l'algèbre linéaire.